

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ
И ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

С. М. Рытов

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы спектрального описания тепловых флуктуаций величин, характеризующих состояние диссипативной системы, получили в последние годы существенное развитие. Чрезвычайно эффективным при решении этой задачи оказался прием, который восходит еще к работам П. Ланжевена¹ и Де Гааз Лоренца² по теории броуновского движения и заключается в том, что вводятся некоторые «сторонние» (внешние) флуктуационные силы, связанные с рассматриваемыми величинами в том же энергетическом смысле, в каком связаны между собой обобщенные координаты и силы. Поскольку основной задачей является при этом описание спектра флуктуаций, необходимые статистические характеристики сторонних сил сводятся к их функциям корреляции.

Впервые в такой постановке задача была решена в 1927 г. Найквистом³ применительно к флуктуациям тока в электрической цепи с сосредоточенными постоянными. Введя случайную стороннюю э. д. с. $\mathcal{E}(t)$, он перешел, в отличие от работ, цитированных выше, к спектральному представлению этой случайной э. д. с. и получил на основе термодинамики и теоремы о равномерном распределении энергии формулу для спектральной интенсивности $\overline{\mathcal{E}_\omega^2}$:

$$\overline{\mathcal{E}_\omega^2} = \frac{2}{\pi} \Theta R. \quad (1)$$

Здесь R — активное сопротивление цепи, $\Theta = kT$ — ее энергетическая температура ($k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура).

Формула (1) ограничена классической областью частот ($\hbar\omega \ll \Theta$) и условием квазистационарности, которое, впрочем, может быть в известной мере обойдено в тех случаях, когда речь идет о тепловых флуктуациях в линиях, введением распределенной (погонной) э. д. с. Помимо этих хорошо известных ограничений, формула (1) предполагает также, что проводимость материала шумящих элементов цепи настолько высока, что токами смещения в них можно пренебречь. Другими словами, (1) не охватывает предельного перехода $R \rightarrow \infty$.

Сравнительно недавно фундаментальная теорема Найквиста была существенно обобщена в цикле работ Каллена с соавторами⁴⁻⁸. В этих работах указанный спектральный подход был распространен на случай произвольной диссипативной системы, в которой флуктуации описываются любым числом n дискретных случайных функций $\xi_j(t)$. Соответственно вводится n обобщенных сторонних сил $f_j(t)$ и устанавливается

вид корреляционных матриц для спектральных амплитуд $\xi_{j\omega}$ и $f_{j\omega}$. А именно, если спектральные амплитуды связаны между собой алгебраическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \xi_{j\omega} &= \sum_k \alpha_{jk}(\omega) f_{k\omega}, \\ f_{j\omega} &= \sum_k \alpha_{jk}^{-1}(\omega) \xi_{k\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где α^{-1} — матрица, обратная α^*), то корреляционная матрица для $\xi_{j\omega}$ есть

$$\xi_{j\omega} \overline{\xi_{k\omega'}}^* = i C(\omega) (\alpha_{jk} - \alpha_{kj}^*) \delta(\omega - \omega'), \quad (3)$$

а для $f_{j\omega}$

$$\overline{f_{j\omega} f_{k\omega'}^*} = i C(\omega) (\alpha_{jk}^{-1*} - \alpha_{jk}^{-1}) \delta(\omega - \omega'), \quad (4)$$

где

$$C(\omega) = \frac{\hbar}{4\pi} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{\Theta}. \quad (5)$$

В классической области частот ($\hbar\omega \ll \Theta$)

$$C(\omega) = \frac{\Theta}{2\pi\omega}. \quad (5')$$

Как нетрудно видеть, в этом последнем случае из (4) следует при $n = 1$ первоначальная формула Найквиста. Указание на то, что квантово-механическое обобщение (1) сводится к замене Θ на квантовое выражение для средней энергии осциллятора, было сделано еще Найквистом³, но строгое обоснование этого довольно естественного обстоятельства было дано, конечно, лишь в результате квантово-механического вывода формул (3) и (4). Зависимость спектральных интенсивностей от адмитанса системы, даваемая этими формулами, для радиофизика или электрика должна представляться довольно очевидной. Именно такая зависимость следует из законов Кирхгофа для разветвленных цепей и формулы Найквиста для каждой отдельной ветви, если учесть еще статистическую независимость флуктуационных э. д. с., действующих в неперекрывающихся участках цепи.

Формулы (3) и (4) дают полное решение задачи о спектральном описании тепловых флуктуаций в любой диссипативной линейной системе с сосредоточенными параметрами. Зачастую нас интересуют, однако, не сосредоточенные, а распределенные (в общем случае — трехмерные) системы, флуктуации в которых описываются совокупностью случайных полей $\xi_j(t, \mathbf{r})$, удовлетворяющих уравнениям в частных производных. Речь может идти при этом как о тепловых флуктуациях электромагнитного поля, в том числе о тепловом излучении, так и о флуктуациях механических и тепловых параметров, характеризующих состояние сплошной среды. В данной статье суммируется цикл работ, выпол-

*) Матрица $Y_{jk} = i\omega\alpha_{jk}$ называется в работах^{7,8} матрицей адмитанса рассматриваемой диссипативной системы. Следует заметить, что корреляционная матрица (3) была получена М. А. Леонтовичем⁹ еще в 1941 г., но ее связь с адмитансом не была прослежена до конца. Флуктуационно-диссипационная теорема (3) и (4), полученная в^{7,8}, записана здесь в той форме, которая была придана ей Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем¹⁰.

ненных автором и рядом других советских физиков в период 1952—1956 гг. и касающихся именно электромагнитных флуктуаций теплового происхождения *).

Задача о спектральном описании тепловых флуктуаций электромагнитного поля была решена в 1952 г. первоначально для квазистационарной области частот М. А. Леонтовичем и автором¹¹, а затем и для общего случая системы максвелловских уравнений¹². Исходным пунктом в этих работах служила только теорема Найквиста, так что введение сторонних флуктуационных полей и установление корреляционных функций для их спектральных амплитуд было сделано на основе ряда физических соображений, еще не оформленных в виде какого-либо регулярного метода. Тем не менее эти основные элементы были найдены правильно и позволили построить развернутую теорию тепловых электрических флуктуаций¹³, которая охватывает в качестве предельных случаев:

а) классическую теорию теплового излучения (приближение геометрической оптики, т. е. размеры тел $l \gg \lambda$) и

б) теорию Найквиста (квазистационарная область, $l \ll \lambda$).

В настоящее время уже нет надобности повторять те наводящие соображения, которые первоначально позволили установить вид корреляционных функций для сторонних флуктуационных электромагнитных полей. После работ Каллена и его соавторов появилась возможность вполне общего и регулярного применения флуктуационно-диссипационной теоремы к распределенным системам. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц¹⁰ сделали это для уравнений Максвелла, оперируя непосредственно с «дискретными» формулами (3) и (4). Для возможности применения этих формул они использовали разбиение сплошной системы на малые объемы с соответственной заменой дифференциальных уравнений разностными. В результате они получили для сторонних флуктуационных полей именно те корреляционные функции, которые были ранее найдены в работах¹¹⁻¹³. Хотя указанный способ в принципе решает вопрос, практически он не особенно удобен для приложений. Проще воспользоваться формулами, которые непосредственно обобщают флуктуационно-диссипационную теорему на любые распределенные системы. Эти формулы могут быть получены путем разложения случайных полей по некоторой (вспомогательной) полной системе ортонормированных функций и применения теорем (3) и (4) к коэффициентам таких разложений¹⁴. Мы приведем эти формулы, опуская их вывод.

2. ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Пусть тепловые флуктуации в рассматриваемой распределенной системе описываются совокупностью случайных полей $\xi^{(j)}(t, \mathbf{r})$, $j = 1, 2, \dots$. Им соответствуют флуктуационные сторонние силы с объемными плотностями $f^{(j)}(t, \mathbf{r})$, такие, что связанное с их работой изменение средней энергии в некотором объеме V идет со скоростью

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = \sum_j \int_V f^{(j)} \frac{\partial \bar{\xi}^{(j)}}{\partial t} dV = - \sum_j \int_V \xi^{(j)} \frac{\partial f^{(j)}}{\partial t} dV. \quad (6)$$

*) Следует подчеркнуть, что имеются в виду только работы, касающиеся корреляционной теории и ее приложений; поэтому ряд других интересных работ по тепловым электрическим флуктуациям не затрагивается. Часть этих работ перечислена в списке литературы²⁶⁻³¹.

Пусть далее спектральные амплитуды полей $\xi^{(j)}$ и $f^{(j)}$, т. е. амплитуды в разложениях Фурье

$$\xi^{(j)}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_{\omega}^{(j)}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} d\omega$$

и аналогично для $f^{(j)}$, связаны между собой линейными уравнениями, содержащими линейные пространственные операторы:

$$\xi_{\omega}^{(j)}(\mathbf{r}) = \sum_k A_{jk} f_{\omega}^{(k)}(\mathbf{r}), \quad f_{\omega}^{(j)}(\mathbf{r}) = \sum_k A_{jk}^{-1} \xi_{\omega}^{(k)}(\mathbf{r}). \quad (7)$$

В приложениях задана обычно матрица обратных операторов A_{jk}^{-1} , являющихся дифференциальными, т. е. $A_{jk}^{-1} = A_{jk}^{-1}(\nabla)$. Тогда, экстраполируя теоремы (3) и (4) на счетное множество переменных, нетрудно получить матрицы пространственных корреляционных функций для $\xi_{\omega}^{(j)}$ и $f_{\omega}^{(j)}$. Для краткости ограничимся формулой только для $f_{\omega}^{(j)}$:

$$\overline{f_{\omega}^{(j)}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) f_{\omega'}^{(k)*}(\mathbf{r})} = iC(\omega) \delta(\omega - \omega') \{A_{kj}^{-1*}(-\nabla_{\rho}) - A_{jk}^{-1}(\nabla_{\rho})\} \delta(\rho). \quad (8)$$

Функции корреляции параметров $\xi_{\omega}^{(j)}$ аналогичным образом выражаются через операторы A_{jk} . Введение флуктуационных сил именно тем и удобно, что в (8) входят операторы A_{jk}^{-1} , непосредственно заданные дифференциальными уравнениями системы.

3. ПРИМЕНЕНИЕ К ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМУ ПОЛЮ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Пусть среда описывается тензорами комплексных диэлектрической и магнитной проницаемостей ε_{jk} и μ_{jk} . Следуя¹⁰, введем флуктуационные силы в виде «сторонних» индукций $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$, так что соответствующее приращение электромагнитной энергии в объеме V будет

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right) dV, \quad (9)$$

а уравнения для спектральных амплитуд (индекс ω опускаем) запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} K_j &= -\varepsilon_{jk} E_k + \frac{c}{i\omega} \operatorname{rot}_j \mathbf{H}, \\ M_j &= -\mu_{jk} H_k - \frac{c}{i\omega} \operatorname{rot}_j \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из сопоставления (9) с (6) очевидно, что если за параметры $\xi^{(j)}$ взять $\frac{\mathbf{E}}{4\pi}$ и $\frac{\mathbf{H}}{4\pi}$, то обобщенными силами $f^{(j)}$ как раз и будут $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$. В свою очередь сопоставление (10) с (7) показывает, что матрица операторов A^{-1} есть

$$\begin{aligned} A_{KjKk}^{-1} &= -4\pi\varepsilon_{jk}, \\ A_{MjMk}^{-1} &= -4\pi\mu_{jk}, \\ A_{KjMk}^{-1} &= A_{MkKj}^{-1} = -\frac{4\pi c}{i\omega} \begin{pmatrix} 0 & \nabla_3 & -\nabla_2 \\ -\nabla_3 & 0 & \nabla_1 \\ \nabla_2 & -\nabla_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В результате по формуле (8) находим:

$$\left. \begin{aligned} \overline{K_{j\omega}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) K_{k\omega'}^*(\mathbf{r})} &= 4\pi i C(\omega) (\varepsilon_{jk} - \varepsilon_{kj}^*) \delta(\boldsymbol{\rho}) \delta(\omega - \omega'), \\ \overline{M_{j\omega}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) M_{k\omega'}^*(\mathbf{r})} &= 4\pi i C(\omega) (\mu_{jk} - \mu_{kj}^*) \delta(\boldsymbol{\rho}) \delta(\omega - \omega'), \\ \overline{K_{j\omega}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) M_{k\omega'}^*(\mathbf{r})} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Еще до разработки изложенной регулярной методики эти формулы были получены Ф. В. Бункиным¹⁵, обобщившим на основе косвенных физических соображений формулы для изотропной среды, найденные ранее автором^{12, 13}. Для изотропной среды ($\varepsilon_{jk} = \varepsilon \delta_{jk}$, $\mu_{jk} = \mu \delta_{jk}$) имеем

$$\overline{K_{j\omega}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) K_{k\omega'}^*(\mathbf{r})} = 4\pi i C(\omega) (\varepsilon - \varepsilon^*) \delta_{jk} \delta(\boldsymbol{\rho}) \delta(\omega - \omega') \quad (12)$$

и аналогичное выражение для M_{ω} через мнимую часть μ .

Согласно (11), среда, не обладающая потерями, не является и источником тепловых флуктуаций. При этом стороннее электрическое поле связано только с электрическими потерями, а стороннее магнитное поле — только с магнитными. Между собой эти поля не коррелированы. Разумеется, интенсивность теплового излучения может быть отлична от нуля и там, где нет сторонних полей, т. е. в полностью прозрачных средах, поскольку прозрачность обеспечивает возможность прихода излучения от удаленных тел.

Как следует из (12), спектральная интенсивность напряженности K/ε стороннего флуктуационного поля пропорциональна $i \left(\frac{1}{\varepsilon^*} - \frac{1}{\varepsilon} \right)$. Если учесть, что $\varepsilon = \varepsilon' - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$, то этот множитель равен $\frac{8\pi\sigma\omega}{(\varepsilon'\omega)^2 + (4\pi\sigma)^2}$, т. е. обращается в нуль как при $\sigma \rightarrow \infty$, так и при $\sigma \rightarrow 0$. Нетрудно понять, что при переходе от K/ε к интегральной э. д. с. двухполюсника для спектральной интенсивности э. д. с. получается при этом выражение, пропорциональное не R , а $R/(1 + \omega^2 C^2 R^2)$, где C — эквивалентная емкость двухполюсника, шунтирующая его активное сопротивление R . Тем самым, в отличие от (1), флуктуационная э. д. с. исчезает не только при переходе к идеальному проводнику ($R \rightarrow 0$), но и при переходе к идеальному диэлектрику ($R \rightarrow \infty$).

Фигурирующие в (10) сторонние индукции можно, конечно, выражать через соответствующие сторонние токи, что часто оказывается удобным. Так, например, вместо K_{ω} можно ввести сторонний электрический ток с плотностью $\mathbf{j}_{\omega} = \frac{i\omega}{4\pi} \mathbf{K}_{\omega}$. Из (11) и (5') следует, что в классической области частот ($\hbar\omega \ll \Theta$) функция корреляции компонент $\mathbf{j}'_{\omega}$ будет

$$\overline{j_{\omega}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) j_{\omega'}^*(\mathbf{r})} = \frac{\Theta \sigma_{jk}}{\pi} \delta(\boldsymbol{\rho}) \delta(\omega - \omega'), \quad (13)$$

где σ_{jk} — тензор проводимости.

4. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕОРИИ

Неоднородные уравнения Максвелла (10) позволяют ставить любую задачу о тепловых флуктуациях напряженностей поля (или каких-либо других величин, линейно связанных с этими напряженностями — плотностей заряда и тока, интегральных величин вроде полной силы тока и т. п.) как обычную краевую задачу электродинамики. Решение краевой

задачи составляет первый — чисто электродинамический — этап и приводит к выражениям для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (и других электрических и магнитных величин) в виде линейных интегральных операторов от сторонних полей или токов. Но нас интересуют обычно интенсивности флуктуаций, т. е. статистически усредненные билинейные функции от компонент $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, как, например, спектральные плотности электрической и магнитной энергии *):

$$w_{\omega}^{\text{эл}} = \frac{\epsilon + \epsilon^*}{8\pi} \overline{\mathbf{E}_{\omega} \mathbf{E}_{\omega}^*}, \quad w_{\omega}^{\text{маг}} = \frac{\mu + \mu^*}{8\pi} \overline{\mathbf{H}_{\omega} \mathbf{H}_{\omega}^*}, \quad (14)$$

вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{S}_{\omega} = \frac{c}{4\pi} \{ \overline{[\mathbf{E}_{\omega}, \mathbf{H}_{\omega}^*]} + \overline{[\mathbf{E}_{\omega}^*, \mathbf{H}_{\omega}]} \}, \quad (15)$$

средние максвелловские натяжения и т. п. Получение таких величин составляет второй — статистический — этап решения любой флуктуационной задачи и осуществляется при помощи уже известных функций корреляции сторонних полей (11).

Подчеркнем еще раз: так как электродинамическая часть задачи решается на основе общих уравнений поля, соотношение между размерами тел (l) и длиной волны (λ) никак не ограничивается, т. е. решение охватывает все дифракционные явления, имеющие место при данных геометрических условиях. В предельных же случаях $l \gg \lambda$ или $l \ll \lambda$ вступают в силу соответственно приближение геометрической оптики (классическая теория теплового излучения) или квазистационарное приближение (теория Найквиста для флуктуаций интегральных величин в цепях с сосредоточенными параметрами). Очевидно, наибольший интерес представляет применение теории к задачам, в которых l одного порядка с λ (как это большей частью имеет место в диапазоне СВЧ), поскольку именно в таких случаях нельзя подойти к вопросу ни с классической теорией теплового излучения, ни с квазистационарной теорией, пользующейся интегральными э. д. с. Найквиста. Прежде чем привести примеры решения конкретных задач, укажем на одну разновидность изложенного метода, представляющую известный практический интерес.

5. СЛУЧАЙ ХОРОШО ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛ¹³

Если скин-эффект выражен достаточно сильно, то, как известно, электромагнитное поле вне тел лишь немного возмущено по сравнению с тем, какое было бы в случае идеально проводящих тел той же формы и расположения. Это позволяет вообще освободиться от явного учета поля внутри тел и рассматривать только интересующее нас внешнее поле, подчинив его некоторым приближенным граничным условиям, близким к условиям на поверхности идеального проводника. Указанные приближенные соотношения, на возможность использования которых в качестве граничных условий указал в 1940 г. М. А. Леонтович¹⁶, можно получить как путем решения задачи о скин-эффекте методом возмущений¹⁷, так и из простых наглядных соображений. Эти условия связывают между собой значения тангенциальных компонент внешнего электрического и магнитного полей на поверхности тела:

$$\sqrt{\mu} \mathbf{H}_t = -\sqrt{\epsilon} [\mathbf{N}, \mathbf{E}_t],$$

где $\mathbf{N}$ — единичный вектор нормали к поверхности.

*) Формулы (14) относятся к случаю недиспергирующей среды.

Естественно использовать преимущества указанной постановки задачи и в вопросе об электромагнитных флуктуациях. Для этого оказывается достаточно ввести в граничные условия М. А. Леонтовича поверхностные сторонние поля, а именно:

$$\sqrt{\mu}(\mathbf{H}_t + \mathfrak{W}) = -\sqrt{\varepsilon}[\mathbf{N}, \mathbf{E}_t + \mathfrak{R}]. \quad (16)$$

Задача о нахождении флуктуационных полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ ставится теперь однородными уравнениями Максвелла, но с неоднородными условиями (16) на поверхностях проводников. Для получения средних энергетических величин необходимы функции корреляции поверхностных сторонних полей $\mathfrak{W}$ и $\mathfrak{R}$, но они однозначным образом вытекают из уже известных корреляционных функций (11).

Описанное видоизменение теории значительно упрощает решение ряда задач и во многих случаях оказывается применимым в диапазоне СВЧ.

6. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ

а) Излучение в свободное пространство

Пусть излучающим телом является бесконечный круглый цилиндр, радиус которого a может находиться в любом соотношении с длиной волны λ в окружающей прозрачной среде (для простоты — в вакууме). Материал цилиндра немагнитный ($\mu = 1$). Нас интересует мощность P_ω теплового излучения с единицы длины цилиндра в единичном интервале частот около ω . Решение имеет вид⁽¹³⁾

$$P_\omega = \frac{\Theta}{2\pi} f\left(\varepsilon, \frac{a}{\lambda}\right).$$

Не приводя довольно громоздкого общего выражения для функции f , ограничимся тремя частными случаями.

Обозначим через d толщину скин-слоя в материале цилиндра:

$$d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}.$$

При $a \gg \lambda \gg d$, т. е. для толстого и хорошо проводящего цилиндра, мощность p_ω , излучаемая с единицы поверхности ($p_\omega = P_\omega/2\pi a$), есть

$$p_\omega = \frac{2\Theta}{3\pi^2} k^3 d^{\frac{2}{3}} \left(k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \right).$$

Такая мощность излучается с единицы любой хорошо проводящей поверхности в случае столь коротких волн, что справедливо приближение геометрической оптики. Написанная формула является прямым следствием закона Кирхгофа. Две нижеследующие формулы относятся к противоположному случаю тонкого цилиндра ($\lambda \gg a$).

Если он проводит хорошо ($a \gg d$), то

$$p_\omega = \frac{\Theta k}{4\pi^2 a} \sqrt{\frac{d}{a |\ln(ka/2)|^3}}.$$

Эта формула охватывает переход к идеальному проводнику, когда $\sigma \rightarrow \infty$

и $d \rightarrow 0$. Если же, наоборот, $|\varepsilon|^2$ невелико, так что $\lambda \gg a |V\varepsilon|$, то

$$p_\omega = \frac{\Theta k^3}{6\pi^2} a \varepsilon'', \quad \left(\varepsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right).$$

Здесь охвачен переход к идеальному диэлектрику (т. е. случай $\varepsilon'' \rightarrow 0$). Зависимость p_ω от ω и a во всех трех случаях совершенно различна.

Аналогичная задача для шара радиуса a , сделанного из хорошо проводящего материала ($a \gg d$), была решена по методу, изложенному в разделе 5¹³. На рис. 1 показана зависимость мощности p_ω , излучаемой с единицы поверхности шара, от ka , причем изменяется радиус a . Кривая построена для $kd \leq 0,001$ (для $ka < 3$ кривые, соответствующие значениям $kd \leq 0,001$, совпадают).

При $ka \ll 1$ (но, конечно, $ka \gg kd$) p_ω принимает значение

$$p_\omega = \frac{3\Theta}{4\pi^2} k^3 d.$$

К этому результату можно придти и с помощью формулы Найквиста, если исходить из выражения для излучения флуктуационного

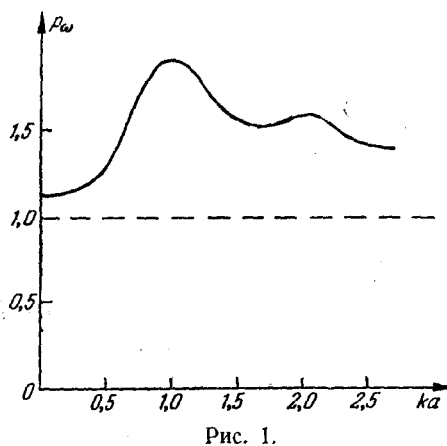


Рис. 1.

тока, текущего в маленьком (по сравнению с λ) кольцевом витке¹³. При больших ka удельная мощность p_ω приближается к тому же значению, которое получилось выше для толстого хорошо проводящего цилиндра и которое следует из закона Кирхгофа. То обстоятельство, что p_ω при $ka \sim 1$ превышает в полтора-два раза значение, вытекающее из закона Кирхгофа, а также осциллирующий ход p_ω при небольших ka (максимумы ложатся примерно на те значения ka , которые соответствуют собственным колебаниям электрического типа), является результатом дифракции излучаемых волн вокруг шара.

В приведенных задачах условия облегчены симметричностью тел: поток энергии флуктуационного излучения распределен равномерно по всем радиальным направлениям. Интереснее те случаи, когда излучающее тело не столь симметрично, а представляет собой, например, пластинку или отверстие в экране, проволочную или щелевую антенну. В таких случаях излучение уже не будет равномерным, а будет обладать диаграммой направленности, зависящей от формы и размеров излучателя и от рассматриваемого спектрального интервала, т. е. от длины волны.

На рис. 2 приведены диаграммы направленности теплового излучения тонкой прямолинейной антенны конечной длины $2L$, вычисленные для $\beta = 2kL = 5$ (верхний квадрант) и $\beta = 2,5\pi$ (нижний квадрант)¹⁸. Для сравнения пунктиром показаны диаграммы, соответствующие сосредоточенной э. д. с., приложенной в середине антенны. Теория позволяет рассчитать не только направленность излучения, но и распределение шумового тока вдоль антенны, зависимость сопротивления излучения от β и т. п.¹⁸.

В этой задаче тоже есть упрощающее обстоятельство, затрагивающее как ее электродинамическую часть, так и статистическую. Это — предпо-

ложение о тонкости провода, которое, во-первых, позволяет перейти от общих уравнений поля к уравнениям теории тонких проволочных антенн, развитой несколько лет назад М. А. Леонтовичем и М. Л. Левиным¹⁹, а

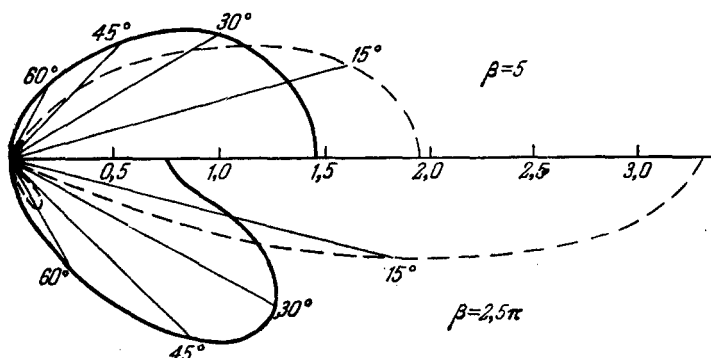


Рис. 2.

во-вторых, дает возможность ввести вместо стороннего поля, распределенного по объему провода, погонную электродвижущую силу Найквиста, распределенную только по длине антенны¹³.

б) Излучение в линиях и объемных резонаторах.

Другой круг вопросов, где общая теория находит себе естественное и практически интересное применение,— это тепловое излучение не в свободное пространство, а в полости и каналы с металлическими стенками — объемные резонаторы, волноводы и коаксиалы, т. е. тепловое излучение в радиоаппаратуре сверхвысокочастотного диапазона. Здесь тоже решен ряд конкретных задач, например, о тепловом излучении перегородки в волноводе, об излучении стенок самого волновода и т. п.¹³.

Общим результатом здесь является своеобразная форма закона Кирхгсфа, которую целесообразно называть волноводной и которая связывает мощность теплового излучения, проходящего через сечение канала, с коэффициентами поглощения излучающего тела для различных типов волн, возможных в данном канале¹³. А именно, полная спектральная мощность P_ω , поступающая в волновод от некоторого излучателя, удовлетворяющего принципу взаимности и имеющего температуру Θ , есть

$$P_\omega = \frac{\Theta}{2\pi} \sum'_{m, n} \{A_{mn}^{(E)} + A_{mn}^{(H)}(\omega)\}, \quad (17)$$

где $A_{mn}^{(E, H)}(\omega)$ — коэффициенты поглощения излучателя для TM - и TE -волн номеров m , n . Штрих около знака суммы отмечает, что суммирование производится лишь по тем значениям m и n , которые соответствуют бегущим (докритическим) волнам. Если для излучающего тела принцип взаимности не выполняется ввиду наличия гиротропности (нелинейные свойства мы исключаем), то к коэффициентам поглощения в (17) добавятся разности соответствующих коэффициентов прозрачности для волн прямого и встречного направлений распространения²⁰.

Формула (17) справедлива не только для фидеров, но и для любой совокупности нормальных волн, распространяющихся в одном измерении. В частности, к такому же виду можно привести мощность, излучаемую цилиндром, шаром или каким-либо другим телом в свободное пространство.

Поэтому только «одномерность» результата (17) дает основание называть его волноводной формой закона Кирхгофа. Впрочем, это оправдано еще и потому, что как раз волноводы представляют реальную возможность выделять волны отдельных типов и номеров, в то время как при излучении в свободное пространство интерес представляет лишь вся входящая в (17) сумма, причем сумма бесконечная ввиду отсутствия критических частот.

Иллюстрацию формулы (17) дает рис. 3, на котором в условном масштабе показана зависимость мощности P_ω , излучаемой в прямоугольный волновод хорошо проводящей перегородкой, от параметра $\xi = 2a/\lambda$,

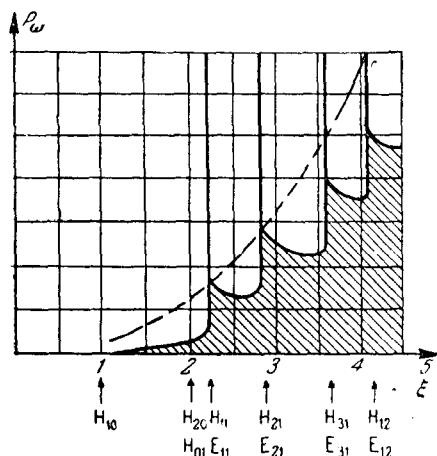


Рис. 3.

где a — меньшая сторона прямоугольного сечения. Острые пики коэффициентов поглощения TM -волн, расположенные на критических частотах этих волн, дают выбросы P_ω , которые в принятом масштабе далеко выходят за пределы чертежа. Пунктиром показан тот ход $P_\omega(\xi)$, который получается при экстраполяции на область малых ξ классического закона Кирхгофа.

Следует заметить, что пока излучателями являются равномерно нагретые тела, волноводная форма закона Кирхгофа может быть получена помимо общей теории электрических флуктуаций, на основе только энергетических соображений и теоремы о распределении энергии по степеням свободы. Но как только вопрос ставится о неравномерном нагреве и (или) неоднородных телах (что более интересно с практической точки зрения), решение задачи требует привлечения именно общей теории. Ее регулярная методика применима и в этих условиях, так как при макроскопических неоднородностях материала и температуры пространственная δ -корреляция стороннего поля может быть сохранена. Результатом является волноводная форма закона Кирхгофа, обобщенная в соответствии с указанной постановкой вопроса ^{20, 21}.

7. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА ВЗАИМНОСТИ

Если представляет интерес не только полный поток теплового излучения, даваемый формулой (17), но и его пространственное распределение и вообще вся структура теплового флуктуационного поля, то энергетических соображений и теоремы о распределении энергии по степеням свободы уже недостаточно. Соответствующие результаты могут быть получены только на основе общей теории электрических флуктуаций.

Как было отмечено, первым этапом является при этом решение электродинамической краевой задачи. Тем самым в ответ уже включены все интерференционные и дифракционные явления, имеющие место при данных геометрических условиях. Предположим теперь, что для рассматриваемого тела уже имеется готовое решение дифракционной задачи, например, известно дифракционное поле, которое образуется при облучении данного тела волной, исходящей из диполя, расположенного где-либо во внешнем пространстве. Тогда, как показал М. Л. Левин ²², можно получить с помощью теоремы взаимности весьма простые формулы, в которых интенсивность теплового излучения тела в какой-либо внешней точке выражена через вспомогательное поле, создаваемое диполем, помещенным

в эту точку. Нахождение энергии теплового излучения и других средних квадратичных величин сводится таким путем к квадратурам, причем для хорошо проводящих тел расчет еще более упрощается, а в предельных случаях коротких и длинных волн становится элементарным.

Пусть диполь с моментом $\mathbf{p}$ (колеблющимся с частотой ω) расположен в некоторой точке P и создает в присутствии излучающего тела дифракционное поле $\mathbf{E}_0$. Это поле обуславливает в элементе объема dV рассматриваемого тела (для простоты — изотропного) тепловые потери

$$dQ_0 = \frac{\sigma}{2} |\mathbf{E}_0|^2 dV.$$

Применение теоремы взаимности и функции корреляции (13) дает тогда для среднего квадрата $\mathbf{p}$ -компоненты теплового поля, создаваемого данным телом в точке P , выражение

$$|\overline{E_p}|^2 = \frac{2}{\pi\omega^2 |\mathbf{p}|^2} \int \Theta dQ_0, \quad (18)$$

где интегрирование распространяется на объем тела. Аналогичными квадратурами выражаются интенсивность теплового магнитного поля $\mathbf{H}$, а также средние значения произведений различных компонент $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Формула (18) не предполагает равномерного нагрева тела. Вводя эффективную температуру (с весом, равным плотности тепловых потерь):

$$\tilde{\Theta} = \frac{1}{Q_0} \int \Theta dQ_0,$$

можно переписать (18) в виде

$$|\overline{E_p}|^2 = \frac{2\tilde{\Theta}Q_0}{\pi\omega^2 |\mathbf{p}|^2}. \quad (18')$$

Если тело находится в свободном пространстве и точка P удалена на расстояние $R \gg \lambda$ (волновая зона), то (18') преобразуется в формулу

$$|\overline{E}|^2 = \frac{\tilde{\Theta}A}{ck^2R^2},$$

где $A = \frac{Q_0}{\frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2}$ — эффективный поперечник поглощения тела для плоской волны амплитуды $\mathbf{E}_0$, падающей в направлении $\mathbf{R}$.

Указанным способом М. Л. Левин²³ получил формулы для коротковолнового теплового излучения хорошо проводящих плоских пластин и для тел вращения, а также формулы для излучения сфероидов в противоположном случае длинных волн. Он нашел, далее, флуктуационное поле вблизи хорошо проводящих поверхностей.

В частности, им показано, что при приближенном учете зоммерфельдовой функции ослабления получаются следующие выражения для плотностей электрической и магнитной энергии флуктуационного поля на расстоянии z от проводящей плоскости:

$$\begin{aligned} w_{\omega}^{\text{эл}} &\approx \frac{\eta w_0}{2} \left(\ln \frac{L}{z} + \frac{3}{4k^2 z^2} \right), \\ w_{\omega}^{\text{маг}} &\approx \frac{\eta w_0}{2} \left(\ln \frac{L}{z} + \frac{1}{4k^2 z^2} + \frac{1}{2k^4 z^4} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, $w_0 = \frac{\Theta k^2}{\pi^2 c}$ — плотность энергии равновесного теплового

излучения, $\eta = \sqrt{\frac{\mu w}{8\pi\sigma}} = \frac{\mu kd}{2}$ (d — толщина скин-слоя) и $L \sim \frac{\sigma\mu\lambda^2}{c} \sim r/r_{\text{числ}}$ ($r_{\text{числ}}$ — так называемое численное расстояние). Расстояние z рассматриваемой точки от плоскости подчинено в этих формулах условиям $L \gg z \gg d$. Из (19) следует, что при $z \ll \lambda$ магнитная энергия значительно превосходит электрическую, так что на таких расстояниях

$$\frac{w}{w_0} \approx \frac{w_{\text{маг}}}{w_0} \approx \frac{\eta}{4k^4 z^4}. \quad (20)$$

В той же работе вычислено в приближении геометрической оптики флуктуационное поле в фокусе параболического зеркала и в центре сферического.

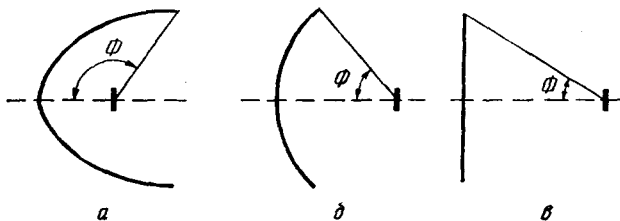


Рис. 4.

Применяя тот же метод, М. Л. Левин выяснил вопрос о тепловых шумах, наводимых в произвольной проволочной антенне внешними излучателями, в частности поверхностью земли, над которой расположена антенна²⁴.

Спектральная интенсивность (по положительным частотам ω) тепловой э. д. с., наводимой в антенне излучением окружающих тел, в том случае, когда это не магнитные тела ($\mu = 1$), обладающие сильно выраженным скин-эффектом ($kd \ll 1$), оказывается равной

$$\overline{\mathcal{E}}_{\omega}^2 = \frac{4\theta}{\pi} \frac{kd}{c} F,$$

где F — безразмерный фактор, зависящий от взаимного расположения антенны и тел, от их формы и длины волны. Для полуволнового вибратора, расположенного: а) в фокусе параболического зеркала, б) в центре сферического зеркала и в) на оси круглого плоского зеркала (рис. 4), фактор F , вычисленный в приближении геометрической оптики, меняется в функции от угла раскрытия Φ так, как показано на рис. 5, а, б, в.

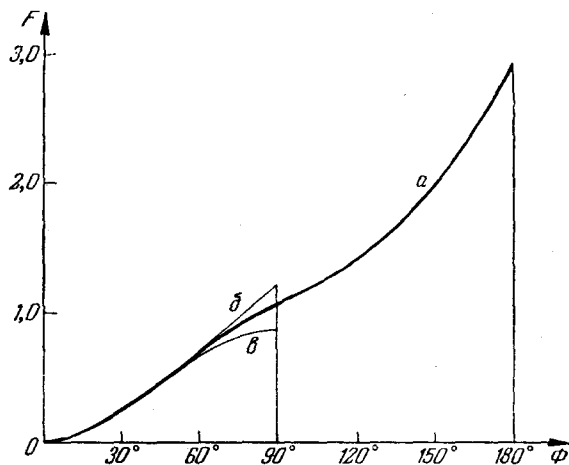


Рис. 5.

Из имеющихся в литературе решений дифракционных задач*) описанный способ позволит еще во многих случаях получить флуктуа-

*) Укажем, в частности, на недавно вышедший сборник статей «Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения». Изд-во Сов. радио, 1957.

ционное электромагнитное поле для соответствующих тел. Можно назвать, например, излучение диска, эллиптического цилиндра, флуктуационное поле в ближней зоне для круглого цилиндра и шара и т. д.

8. ТЕПЛОВОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВБЛИЗИ ОТ ИЗЛУЧАЮЩИХ ТЕЛ

Разграничение флуктуационного поля ближней зоны и флуктуационного излучения, конечно, не случайно. Классическая теория теплового излучения, опираясь на геометрическую оптику, имеет дело только с волновым полем. Если, как это принимает классическая теория, длина волны исчезающе мала, то на любом конечном расстоянии от источника мы уже находимся в его волновой зоне. Общая электродинамика расширяет представление об электромагнитном поле теплового происхождения. Случайные элементарные источники, которые распределены в объеме тела и описываются с помощью стороннего поля, создают не только электромагнитные волны, но и квазистационарное поле, более быстро спадающее с расстоянием. Внутри тела, т. е. в поглощающей среде, волновое и квазистационарное поля перемешаны и, строго говоря, неразделимы. Но вне тела, в окружающей непоглощающей среде или вакууме, они ведут себя различно. Элементарные волновые поля, складываясь, дают излучение данного тела, т. е. суммарное хаотическое волновое поле. Элементарные же квазистационарные поля не создают потока энергии, но образуют быстро убывающее с удалением от поверхности тела суммарное квазистационарное тепловое поле. Это поле, как бы выстилающее поверхности тел, в такой же мере чуждо классической теории теплового излучения, в какой оно совершенно естественно и понятно с точки зрения флуктуационной электродинамики¹³.

Плотность энергии квазистационарного теплового поля возрастает с приближением к поверхности тела и, начиная с расстояний порядка длины волны, преобладает над плотностью энергии излучения. Этот факт отражен в формулах (19), (20). Отсюда следует, что полости, размеры которых меньше длины волны, заполнены в основном именно квазистационарным тепловым полем. Отсюда же можно заключить, что какое-либо устройство, обладающее частотно-селективным поглощением, будучи поднесено к поверхности нагретого тела ближе, чем на длину волны, должно зарегистрировать сильное возрастание флуктуационных напряженностей.

Но это не единственное проявление квазистационарного теплового поля. Оно существенным образом сказывается в совсем ином явлении, которое было исследовано на основе изложенной здесь теории Е. М. Лифшицем²⁵. Он рассмотрел пондеромоторные силы взаимодействия тел, обусловленные флуктуационным электромагнитным полем в пространстве между поверхностями этих тел. Пусть, например, два полупространства, заполненные для простоты одним и тем же веществом при одинаковой температуре, разделены плоским зазором. Флуктуационная электродинамика позволяет найти тепловое электромагнитное поле в этом зазоре и вычислить затем среднее значение соответствующей компоненты максвелловского тензора натяжений, т. е. силу притяжения на единицу поверхности тел.

Сделав это, Е. М. Лифшиц получил таким образом выражение для силы «молекулярного сцепления» между макроскопическими телами, применимое при любых плотностях тел и любых температурах. Это выражение автоматически учитывает преобладание квазистационарного теплового поля в случае тонких зазоров и, наоборот, преобладание волнового поля, т. е. эффекты запаздывания, при большой ширине зазора. При низких

температурах ($\Theta \ll \hbar\omega$) единственным масштабом для ширины зазора являются те длины волн, которые сильнее всего поглощаются рассматриваемым веществом. Обозначим такую характерную длину волны через λ_a . Сила сцепления F оказывается обратно пропорциональной кубу расстояния l между поверхностями, если последнее мало по сравнению с этими длинами волн ($l \ll \lambda_a$), и четвертой степени расстояния, если оно велико ($l \gg \lambda_a$). В этом последнем случае сила сцепления для двух металлов оказывается в первом приближении равной

$$F = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 l^4},$$

т. е. вообще не зависит от рода металлов. При соприкосновении же двух диэлектриков (или диэлектрика с металлом) входит множитель, зависящий только от статических значений диэлектрических проницаемостей. Сказанное справедливо, однако, при том условии, что ширина зазора l , будучи велика по сравнению с λ_a , вместе с тем мала по сравнению с радиусом корреляции поля теплового излучения $\lambda_r \sim \frac{\hbar c}{\Theta}$, т. е. в области

$\lambda_a \ll l \ll \lambda_r$. При достаточно низких температурах эта область всегда существует, но при более высоких, например при комнатных температурах, может оказаться, что $\lambda_r \leq \lambda_a$, и тогда случай $l \gg \lambda_a$ будет означать, что $l \gg \lambda_r$. При этих условиях сила притяжения существенно зависит от температуры. Для двух одинаковых веществ она равна в первом приближении

$$F \approx \frac{\Theta}{8\pi l^3} \left(\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 1} \right)^2,$$

где ϵ_0 — статическое значение диэлектрической проницаемости.

Теория макроскопических сил сцепления строилась ранее на основе элементарного закона ван-дер-ваальсовых сил между атомами или молекулами, что заранее ограничивало результат случаем разреженных сред. Чисто феноменологическая теория, основанная на флуктуационной электродинамике, снимает это ограничение. Напротив, исходя из выражения для макроскопической силы сцепления, можно в случае разреженных сред сделать обратное заключение — о законе попарного взаимодействия отдельных нейтральных атомов и молекул. Такой путь, как это ни парадоксально, на первый взгляд, оказывается проще, чем прямой квантово-механический расчет для двух нейтральных частиц, при котором закон взаимодействия получается лишь в высоких порядках при вычислениях методом возмущений.

9. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ТЕПЛОМ ИЗЛУЧЕНИИ

С интерференционными явлениями в тепловом излучении приходится практически сталкиваться в аппаратуре для сверхвысоких радиочастот, когда поступающее в волновод тепловое излучение частично отражается на другом конце из-за неполноты согласованной нагрузки. В волноводе образуются стоячие волны, контрастность которых зависит от полосы пропускания приемника, или, говоря языком оптики, от степени монохроматичности наблюдаемого излучения. Аналогичные явления происходят всякий раз, когда размеры пространства, предоставленного тепловому полю, недостаточны велики, подобно тому, как возникает оптическая интерференция в тонких пластинках. В оптике при данной монохроматичности света интерференция с увеличением толщины пластинки

смазывается, исчезает. Точно так же и в диапазоне микроволн, при данной полосе пропускания аппаратуры, интерференционные явления исчезают, когда заполненное тепловым излучением пространство (в приведенном примере — длина волновода) становится слишком большим. Плотность энергии делается тогда равномерной и вступают в силу асимптотические законы классической теории излучения.

Таким образом, для достаточно селективного (узкополосного) приемника поле теплового излучения — даже равновесного — не является однородным и изотропным. В нем имеются интерференционные максимумы и минимумы, объяснение которых выходит за пределы классической теории излучения, но которые полностью учитываются общей теорией¹³.

10. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

До недавнего времени вопрос о тепловом излучении анизотропных (в том числе и гиротропных) сред нельзя было считать изученным достаточно полно. Законы Кирхгофа, составляющие основу классической теории теплового излучения, установлены для изотропных сред. Непосредственное их применение к анизотропным средам встречает известные трудности, связанные главным образом с наличием двойного преломления. Между тем, указанный вопрос приобрел интерес в первую очередь в связи с радиоастрономией (тепловое излучение солнечной короны при учете общего магнитного поля Солнца, а также тепловое излучение солнечных пятен). Другая возможная область применения соответствующей теории касается самой аппаратуры, а именно теплового излучения ферритов, применяемых в волноводных трактах современных приемников. Очевидно, корреляционные функции (10) позволяют полностью охватить и задачи об излучении анизотропных сред, так что в принципе, т. е. отвлекаясь от увеличения чисто вычислительных трудностей, мы имеем и здесь готовый аппарат для получения решения.

Детальный анализ, проведенный Ф. В. Бункиным¹⁵, показал, что поток теплового излучения от элемента объема однородной магнитоактивной среды состоит, вообще говоря, из трех потоков: двух собственных (обыкновенные и необыкновенные волны) и интерференционного, характерного именно для магнитоактивной среды. При переходе к простой анизотропии (одноосному кристаллу) интерференционный поток исчезает, а собственные потоки удовлетворяют соответственно обобщенному закону Кирхгофа: излучательные способности для обоих видов волн ($i=1, 2$) в направлении, образующем угол θ с осью симметрии, равны

$$\eta_{\omega i}(\theta) = \alpha_{\omega i}(\theta) I_{\omega i}(\theta). \quad (21)$$

Здесь $I_{\omega i}(\theta)$ — равновесные интенсивности в прозрачном одноосном кристалле, найденные в работе¹³, а $\alpha_{\omega i}(\theta)$ — поглощательные способности, определенным образом связанные с вещественными и мнимыми частями комплексных показателей преломления для волн обоих видов и данного направления распространения.

Исследование показало, что в реальных условиях наблюдения интерференционный поток не играет роли и в случае магнитоактивной среды, т. е. практически справедлив закон (21) с соответствующими выражениями для $\alpha_{\omega i}(\theta)$.

Более детальному изучению был подвергнут более общий случай квазиоднородных магнитоактивных сред, т. е. случай геометрического приближения, которое полностью применимо к излучению солнечной короны и пятен. Разумеется, здесь оказываются справедливыми уравнения переноса, которые можно было бы написать сразу, исходя из обычных

энергетических соображений. Но уравнения переноса имеют реальное содержание только в том случае, если известны выражения для поглощательной и излучательной способностей среды. Как раз этот последний вопрос решается наилучшим образом при помощи регулярного метода флуктуационной электродинамики.

В цитируемой работе Ф. В. Бункина рассмотрен также практически интересный случай слабой гиротропности, когда обусловленные анизотропией эффекты невелики и могут быть учтены в первом приближении как поправки к решению для изотропной среды. Выражения для этих поправок, а тем самым для интенсивностей излучения и его степени поляризации оказываются в этом случае весьма простыми.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. P. Langevin, C. R. (Paris) **146**, 530, 1908.
2. G. L. de Haas-Lorentz, Die Wissenschaft **52**, 86, Braunschweig (1913).
3. H. Nyquist, Phys. Rev. **29**, 614 (1927); **32**, 110 (1928).
4. H. B. Callen a. T. A. Welton, Phys. Rev. **83**, 34 (1951).
5. J. L. Jackson, Phys. Rev. **87**, 471 (1952).
6. H. B. Callen a. R. F. Greene, Phys. Rev. **86**, 702 (1952).
7. H. B. Callen, M. L. Barash a. J. L. Jackson, Phys. Rev. **88**, 1382 (1952).
8. R. F. Greene a. H. B. Callen, Phys. Rev. **86**, 1387 (1952).
9. М. А. Леонтович, J. of Phys. (USSR) **4**, 499 (1941).
10. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Теоретическая физика, т. VI, Гостехиздат, М., 1957.
11. М. А. Леонтович и С. М. Рытов, ЖЭТФ **23**, 246 (1952).
12. С. М. Рытов, ДАН СССР, **87**, 535 (1952).
13. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, изд-во АН СССР, М., 1953.
14. С. М. Рытов, ДАН СССР **110**, 371 (1956).
15. Ф. В. Бункин, Теория теплового излучения анизотропных сред, канд. диссерт., Физич. ин-т им. П. Н. Лебедева АН СССР, 1955; ЖЭТФ **32**, 338 и 811 (1957).
16. М. А. Леонтович, Исследования по распространению радиоволн, Сборник II, М., 1948.
17. С. М. Рытов, ЖЭТФ **10**, 180 (1940).
18. М. Л. Левин и С. М. Рытов, ЖТФ **25**, 323 (1955).
19. М. А. Леонтович и М. Л. Левин, ЖТФ **14**, 481 (1944); Изв. АН СССР, сер. физ. **8**, 157 (1944).
20. С. М. Рытов, «Радиотехника», **10**, № 2,3 и № 3,3 (1955).
21. С. М. Рытов, ЖЭТФ **27**, 571 (1954).
22. М. Л. Левин, ДАН СССР **102**, 53 (1955).
23. М. Л. Левин, ЖЭТФ **31**, 302 (1956).
24. М. Л. Левин, ЖТФ **25**, 2313 (1955).
25. Е. М. Лифшиц, ДАН СССР **97**, 643 (1954); **100**, 879 (1955); ЖЭТФ **29**, 94 (1955).
26. Г. С. Горелик, УФН **44**, 33 (1951).
27. В. Л. Гинзбург, УФН **46**, 348 (1952); **52**, 494 (1954); **56**, 146 (1955).
28. В. Л. Гинзбург и В. М. Файн, ЖЭТФ **32**, 162 (1957).
29. М. Л. Левин, УФН **52**, 486 (1954); **56**, 146 (1955).
30. C. W. Mc Combie, Phys. Rev. **100**, 444 (1955).
31. J. Weber, Phys. Rev. **90**, 357, 977; **92**, 847 (1953); **94**, 211, 215, **95**, 1706, **96**, 556 (1954); **101**, 1619, 1620 (1956).