

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА К ЛУНЕ****В. А. Егоров****ВВЕДЕНИЕ**

При современном развитии ракетостроения становится реальным достижение скоростей, достаточных не только для создания искусственного спутника Земли, но и для полета к Луне. Однако до сих пор в литературе¹⁻⁵ не нашел удовлетворительного решения ряд важных вопросов теории полета к Луне: о форме и классификации траекторий на пассивном участке, о возможных траекториях облета Луны с возвращением к Земле, о возможности периодического облета Луны и Земли, вопрос о минимальных начальных скоростях, потребных для достижения Луны, и о попадании в Луну, а также весьма важный вопрос о влиянии разброса начальных данных на характеристики различных траекторий полета к Луне. Объясняется это определенными трудностями. Действительно, можно показать, что в простейшей постановке задача сводится к нерешенной в механике круговой ограниченной проблеме трех тел.

В 1953—1955 гг. в Математическом институте АН СССР было проведено систематическое исследование упомянутого выше круга вопросов и проведены численные расчеты с применением быстродействующей цифровой электронной машины. Основные результаты этой работы изложены в настоящей статье *).

В § 1 производится сведение задачи к круговой ограниченной проблеме трех тел: Земля, Луна, ракета. Уравнения этой задачи в системе координат, вращающейся вместе с прямой, соединяющей центры Земли и Луны, имеют интеграл энергии (Якоби). Это позволяет осуществить, следуя Хиллу⁷, энергетический подход к задаче и получить точное теоретическое решение вопроса о минимальных начальных скоростях, потребных для достижения Луны (§ 2).

Однако фактическое определение траекторий с минимальной скоростью методом численного интегрирования показывает, что эти траектории долгое время остаются близкими к эллипсам с фокусом в центре Земли, и что, прежде чем достигнуть Луны, ракета должна сделать вокруг Земли достаточно большое количество оборотов (порядка сотен и более). Поэтому указанные траектории не представляют практического интереса. Оказывается также, что минимальные скорости, потребные для достижения Луны на первом обороте, можно вычислять из условия попадания в Луну, полностью пренебрегая ее влиянием (§ 3).

В § 4 устанавливается невозможность захвата снаряда сферой действия Луны для траекторий, начинающихся у Земли и сближающихся с Луной на первом обороте (траекторий сближения).

*) Доложены в Математическом институте АН СССР в феврале 1956 г. Краткое сообщение имеется в заметке¹⁸.

Невозможность захвата для произвольных траекторий круговой ограниченной задачи трех тел удастся доказать лишь для достаточно малых отношений притягивающих масс (меньших, чем отношение масс Луны и Земли).

Для траекторий сближения оказывается возможным пренебрегать влиянием Луны вне ее сферы действия, и влиянием Земли внутри сферы действия Луны, так что движение вне сферы действия Луны происходит по геоцентрическому коническому сечению, а движение внутри сферы действия — по селеноцентрическому коническому сечению. Это дает простую, но вместе с тем достаточно точную приближенную методику исследования траекторий и позволяет, в частности, показать, что движение относительно Луны по траекториям сближения всегда происходит со скоростями, сильно превышающими параболические селеноцентрические скорости (§ 5).

Указанная приближенная методика рассмотрения траекторий сближения по характерным участкам позволяет установить основные закономерности и рассчитать характеристики движения. В частности, оказывается, что при начальных скоростях, лишь на 0,5 км/сек превышающих параболическую, характер закономерностей уже приближается к асимптотическому, отвечающему бесконечно большим начальным скоростям.

В случае движения в плоскости орбиты Луны удастся приближенно определить геоцентрические скорости выхода из сферы действия Луны, причем сразу для всех траекторий сближения с заданным вектором начальной скорости. Это дает возможность проанализировать эволюцию всего множества траекторий сближения с изменением величины и направления начальной скорости (§ 6) и позволяет решить основные задачи динамики полета к Луне в плоскости ее орбиты.

При решении задачи о попадании в Луну (§ 7) был разработан метод численного определения на цифровой машине начальных данных, отвечающих попаданию в центр Луны с наперед заданной точностью, что позволило провести массовый расчет попадающих траекторий. С помощью приближенной методики было установлено, что отклонение траектории от центра Луны является квадратичной, а не линейной функцией малых ошибок в начальных данных. Расчеты показали, что по потребным точностям начальных данных задача о попадании в Луну без какой-либо коррекции на пассивном участке является, по-видимому, технически реальной.

В задаче об облете Луны (§ 8) также был найден метод определения начальных данных, отвечающих возвращению к Земле. В этой задаче отклонение траекторий от центра Земли при возврате является, как и в задаче о попадании в Луну, квадратичной функцией ошибок в начальных данных. Выяснено, что по характеру сближения с Луной облетные траектории могут быть двух различных классов. Существуют также два класса траекторий сближения, возвращающихся к Земле, но не отвечающих облету — долетные классы. Для всех классов удастся проследить их возникновение, эволюцию и исчезновение с изменением начальной скорости. Выяснено также, что влияние разброса начальных данных убывает с увеличением расстояния облетной траектории от Луны, что в задаче об облете Луны на расстоянии, большем радиуса сферы действия Луны (66 000 км), точности, потребные для возвращения к Земле, не выше, чем в задаче о попадании в Луну с той же начальной скоростью. Поэтому осуществление облета Луны на достаточно далеком расстоянии, с возвращением на Землю без коррекции пассивного участка, по-видимому, является технически реальным.

Более заманчивая задача об облете с пологим входом в атмосферу Земли (§ 9) решается аналогично и имеет аналогичную классификацию.

Однако вследствие относительной малости толщины атмосферы осуществление пологого входа без соответствующей коррекции траектории сближения после облета Луны представляется мало реальным.

Что касается плоского периодического облета Луны и Земли по траекториям сближения (§ 10), то он практически невозможен. Оказывается, существует лишь одно семейство облетных периодических траекторий сближения и бесконечное множество (две последовательности) семейств долетных. Облетные решения отвечают гиперболическим начальным скоростям, удалены от Земли на расстояние порядка 100 000 км и более и оказываются неустойчивыми.

Была рассмотрена также задача о разгоне ракеты с помощью Луны без затраты топлива, например, с целью полета к другим планетам (§ 11). Эта задача интересна потому, что плоскость орбиты Луны образует небольшие углы с плоскостями орбит планет. Траектории, отвечающие разгону, близкому к максимально возможному (порядка 1,5 км/сек), должны проходить достаточно близко от поверхности Луны. Вследствие этого получение разгона, близкого к максимальному, без соответствующей коррекции пассивного участка перед сближением, по-видимому, нереально.

Кроме найденных попадающих, облетных и долетных траекторий, а также траекторий, отвечающих тому или иному разгону ракеты после сближения, существуют еще траектории, отвечающие большему или меньшему ее замедлению (относительно Земли). Других траекторий сближения не существует, и потому полученная классификация плоских траекторий сближения является полной.

В заключение статьи указываются возможные направления обобщения методики и результатов, в частности, указывается на возможность их обобщения для задач полета с Земли к внешним планетам солнечной системы.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Для целей настоящей работы нет необходимости учитывать все силы, действующие на пассивном участке траектории полета к Луне, а достаточно учесть лишь главные, основные силы, определяющие движение.

При анализе действующих сил в рассматриваемой задаче естественно предположить, что траектория полета начинается вне атмосферы на высоте порядка сотен километров и целиком находится внутри сферы действия Земли по отношению к Солнцу. При этом сфера действия Земли определяется следующим образом⁶. Рассматривается отношение силы, с которой Солнце возмущает геоцентрическое движение снаряда, к силе притяжения Земли. Рассматривается также отношение силы, с которой Земля возмущает гелиоцентрическое движение снаряда, к силе притяжения Солнца. Область пространства вокруг Земли, в которой первое отношение меньше второго, и называется сферой действия Земли^{*}).

Для определения радиуса сферы действия малого тела m по отношению к большому M имеется формула (⁶, стр. 194)

$$r_* = A \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \quad (1,1)$$

(где A — расстояние mM). В случае Земли и Солнца формула (1,1) дает $r_* \cong 930\,000$ км, что примерно в 2,5 раза превышает среднее расстояние от Земли до Луны, равное

$$a = 384\,400 \text{ км.}$$

^{*}) Геоцентрическим называется движение в перемещающейся поступательно системе координат с началом в центре Земли. Аналогично определяется гелиоцентрическое движение.

Оценим величину возмущающего действия Солнца по отношению к притяжению Земли. Отношение величины $\Delta F'$ возмущения к притяжению F центрального тела максимально на границе сферы действия и имеет оценку⁶

$$\frac{\Delta F'}{F} < \left(16 \frac{m}{M}\right)^{1/2}, \quad (1,2)$$

дающую для случая Земли и Солнца $\frac{\Delta F'}{F} < 0,138$. С убыванием расстояния r от Земли $\frac{\Delta F'}{F}$ убывает как r^3 , так что на расстоянии орбиты Луны имеем $\frac{\Delta F'}{F} = \frac{0,138}{(2,5)^3} < 0,01$, а при меньших расстояниях от Земли отношение возмущения от действия Солнца к притяжению Земли еще меньше. Будем предполагать, что снаряд не уходит далеко за пределы орбиты Луны. Тогда в рассматриваемой задаче влияние Солнца можно не учитывать.

Переходя к оценке возмущающего действия планет, замечаем, что расстояния от Земли до планет сравнимы с расстоянием до Солнца, а массы планет ничтожны по сравнению с массой Солнца. Значит, возмущающее действие планет по-прежнему можно не учитывать.

Рассмотрим, наконец, влияние Луны. Радиус ρ_* сферы действия Луны по отношению к Земле невелик: $m_1 : m_2 = 81,45$; $\rho_* = a (m_2 : m_1)^{1/3} = 66\,000$ км. Хотя для основной части рассматриваемого пространства возмущающее действие Луны по сравнению с притяжением Земли ничтожно, в сфере действия Луны оно играет основную роль и его нельзя не учитывать, тем более, что интересны как раз траектории, проходящие в сфере действия Луны. Таким образом, в рассматриваемой задаче следует учитывать только притяжения Земли и Луны.

Поскольку сжатие Земли и Луны изменяет силу тяготения меньше, чем на 1%, им можно пренебречь. Задача сводится к так называемой ограниченной эллиптической задаче трех тел: m_1 — Земля, m_2 — Луна, m_0 — снаряд.

Задачу можно упростить, заметив, что орбита Луны близка к круговой (ее эксцентриситет $e = 0,0549$). Можно показать, что силы, возникающие от эллиптичности в уравнениях движения, написанных в системе координат x, y, z , вращающейся вместе с прямой $m_1 m_2$, составляют долю порядка e от центробежной и кориолисовой сил, т. е. лишь несколько процентов. Поэтому можно вместо эллиптической рассматривать круговую ограниченную задачу трех тел. Ее уравнения суть:

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \ddot{y} = -2\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (1,3)$$

Здесь

$$U = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{fm_1}{r} + \frac{fm_2}{\rho}, \quad (1,4)$$

где f — постоянная тяготения, r и ρ — расстояния снаряда m_0 от m_1 и m_2 соответственно; ось x постоянно проходит от m_2 к m_1 , а ось y проходит через центр тяжести системы $m_1 m_2$ в плоскости орбиты Луны.

За единицы приняты: для длин расстояние a между центрами Земли и Луны и для времени $\frac{T}{2\pi}$, где T — сидерический месяц (период обращения масс m_1 и m_2). Заметим, что по третьему закону Кеплера в этих единицах $f(m_1 + m_2) = a^3 \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-2} = 1$.

Круговая ограниченная задача трех тел, даже плоская, как известно, в общем виде в механике не решена. Для некоторых частных случаев, касающихся движений тел солнечной системы, имеются методы отыскания решений. Но траектории однократных полетов от Земли к Луне мало похожи на обычные орбиты тел солнечной системы, и указанные методы неэффективны.

В предлагаемой работе для отыскания возможных видов траекторий полета к Луне и для их приближенного расчета использована приближенная методика. Для уточненного расчета параметров движения и для определения влияния разброса начальных данных применялось численное интегрирование уравнений движения (1,3) при помощи быстродействующей цифровой машины.

Для теоретического решения вопроса о минимальных скоростях, потребных для достижения Луны, и вопроса о возможности захвата Луной снаряда с Земли использовался энергетический подход, аналогичный примененному Хиллом⁷.

§ 2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВОПРОСА О МИНИМАЛЬНЫХ СКОРОСТЯХ

Для определения минимальных скоростей, потребных для достижения Луны, воспользуемся тем, что уравнения (1,3) имеют известный интеграл Якоби⁶

$$\frac{1}{2} V^2 = U + h, \quad \text{где } h = \text{const.} \quad (2,1)$$

Очевидно, движение при фиксированных h ограничено поверхностями нулевой скорости, введенными Хиллом⁷:

$$U = -h. \quad (2,2)$$

С помощью исследования уравнения (2,2) можно показать (см. стр. 108), что при больших отрицательных h движение возможно только внутри непересекающихся поверхностей s' и s'' , близких к сферам с центрами m_1 и m_2 , да еще вне охватывающей s' и s'' поверхности s . Сечение каждой из поверхностей s , s' , s'' плоскостью xy близко к кругу. При начальной скорости $V_0=0$ поверхность s' проходит через начальную точку, а с ростом V_0 увеличивается, удаляясь от m_1 .

Поскольку пассивный участок начинается на расстояниях, много меньших расстояния до Луны, при малых V_0 движение может происходить только внутри поверхности s' и сближение с Луной невозможно.

С ростом начальной скорости V_0 величина h растет, поверхности s' и s'' расширяются, сближаясь, а поверхность s суживается. При некотором $v_0 = v_0'$ величина h достигнет такого значения $h=h_1$, что поверхности s' и s'' будут иметь одну общую точку L_1 (рис. 1) и при малых $(h-h_1)$ их будет соединять горловина около точки L_1 . Значит, становится возможным проникновение траектории, начавшейся вблизи m_1 , в область вокруг m_2 , т. е. становится возможным сближение ракеты с Луной. Половина сечения плоскостью xy поверхностей s , s' , s'' , отвечающих $h=h_1$ (кривые s_1 , s_1' , s_1''), представлена на рис. 1.

При дальнейшем росте h (V_0) достигается критическое значение $h_2 > h_1$ ($V_0 = V_0^{(2)}$), отвечающее соприкосновению поверхностей s и s'' в точке L_2 (кривая s_2 на рис. 1), так что становится возможным уход ракеты от Земли в бесконечность через горловину вблизи L_2 . Значит, минимальная скорость, потребная для достижения Луны, равна $V_0^{(1)}$, а минимальная скорость, потребная для ухода в бесконечность, равна $V_0^{(2)}$.

Кроме критических значений h_1 и h_2 , существуют еще критические значения $h_3 > h_2$ и $h_4 > h_3$. Значение h_3 отвечает возможности ухода в бесконечность через горловину вблизи L_3 (см. кривую s_3 на рис. 1). Зна-

чение $h_4 < 0$ и отвечает исчезновению кривых нулевой скорости на плоскости xy в симметричных относительно оси x точках L_4 и L_5 , т. е. отвечает возможности ухода ракеты в бесконечность по любому направлению в плоскости xy . Исчезновение поверхностей, ограничивающих пространственное движение, происходит при $h = 0$.

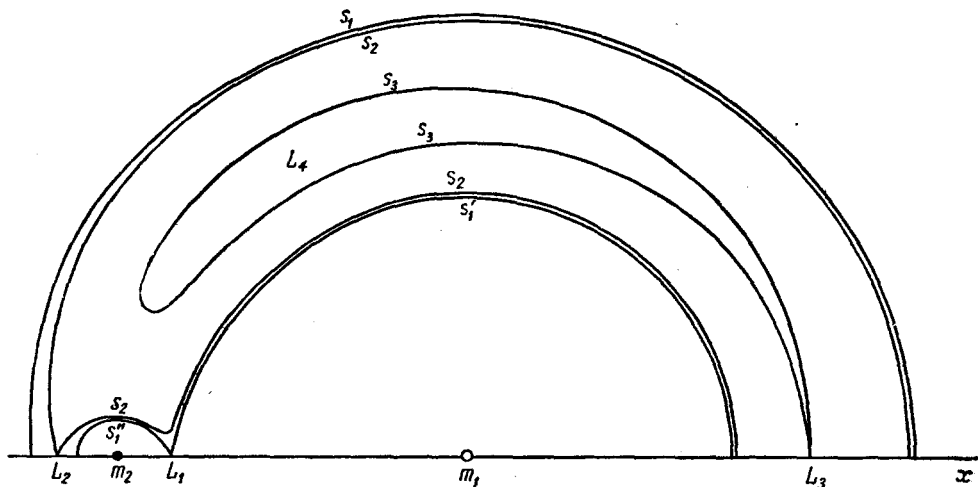


Рис. 1. Сечение критических поверхностей нулевой скорости для системы Земля — Луна плоскостью лунной орбиты. При скоростях, несколько больших минимальной, проникновение снаряда к Луне возможно лишь через горловину у точки L_1 .

Точки L_i (так называемые точки либрации) расположены в плоскости орбиты Луны и могут быть найдены как особые точки поверхностей (2,2); значения h находятся из (2,1) при $V=0$ по координатам точек L_i , а соответствующие начальные скорости $V_0^{(i)}$ находятся из (2,1) при $h = h_i$ по координатам заданной начальной точки.

Заметим, что величина критической начальной скорости $V_0^{(i)}$ получается одной и той же, независимо от ее направления, хотя, очевидно, она изменяется от точки к точке. Однако из (1,4) и (2,1) следует, что на сфере малого радиуса r скорости $V_0^{(i)}$ от точки к точке меняются мало. Оказывается, на сфере, отвечающей высоте 200 км, изменения скоростей $V_0^{(i)}$ будут порядка $5 \cdot 10^{-7} \frac{2\pi a}{T}$, так что практически скорости $V_0^{(i)}$ не зависят от положения на сфере. (Здесь, как и при расчете кривых на рис. 1, принималось $m_1 : m_2 = 81,45$.)

Результаты расчета расстояний r_i и ρ_i точек либрации от Земли и Луны, критических энергий h_i и критических скоростей $V_0^{(i)}$ в единицах $\frac{2\pi a}{T}$ и в км/сек — приведены в таблице I. Начальная высота бралась рав-

Таблица I

	r_i	ρ_i	h_i	$V_0^{(i)} \left(\frac{2\pi a}{T} \right)$	$V_0^{(i)} \left(\frac{\text{км}}{\text{сек}} \right)$
L_1	0,8491539	0,1508461	-1,594067	10,60335	10,84890
L_2	1,1677237	0,1677237	-1,585991	10,60411	10,84968
L_3	0,9929263	1,9929263	-1,506062	10,61165	10,85738
L_4	1	1	-1,494001	10,61278	10,85854

ной 200 км. Такая начальная высота бралась потому, что рассчитанные для нее траектории действительны и для больших начальных высот. Меньшие же начальные высоты взять нельзя из-за возрастания влияния сопротивления атмосферы.

Видим, что отличие первой и четвертой критических скоростей менее 10 м/сек, причем отличие первой скорости от второй и третьей от четвертой — всего лишь порядка 1 м/сек.

В километрах расстояния точек L_1 и L_2 от Луны равны соответственно 58 000 км и 65 000 км, т. е. обе эти точки находятся внутри сферы действия Луны довольно близко от ее границы.

Отметим, что при исследовании положения точек либрации была обнаружена ошибочность одной теоремы М. Мартина⁹, прорецензированной, но не исправленной А. Марковым¹⁰. Согласно этой теореме, если положить $m_2 = \mu$, $m_1 = 1 - \mu$, то должны иметь место неравенства: $\rho_1(\mu) < \rho_2(\mu)$ при $0 < \mu < \mu^*$, $\rho_1(\mu) = \rho_2(\mu)$ при $\mu = \mu^*$ и $\rho_1(\mu) > \rho_2(\mu)$ при $\mu^* < \mu < 1$. При этом утверждалось, что $\mu^* > \frac{1}{2}$.

Однако можно показать, что всегда $\rho_1(\mu) < \rho_2(\mu)$, и равенство их невозможно при $0 < \mu < 1$. Ошибка в доказательстве М. Мартина вкралась при приведении подобных членов.

В связи с этим оказывается беспредметной работа Д. Розенталя⁸, посвященная численному определению значения μ^* .

§ 3. ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ, ТРАЕКТОРИИ МИНИМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

Интересно узнать, хотя бы в плоской задаче, что представляют собой траектории минимальной скорости и можно ли так запустить снаряд с Земли, сообщив ему начальную скорость, чуть большую минимальной, что он по восходящей траектории поднимется к точке либрации L_1 , пройдет с малой скоростью горловину и затем достигнет Луны. Это можно узнать, вычисляя траектории с помощью вычислительной машины одним из методов численного интегрирования.

Заметим, что правые части уравнений движения быстро возрастают с приближением снаряда к Луне и делаются неограниченными для точных попаданий в центр Луны. Избавиться от этого можно с помощью регуляризирующего преобразования переменных.

В плоской задаче наиболее удобно известное преобразование Тиле¹⁵. Для его применения начало координат переносится в середину отрезка $m_1 m_2$, а за единицу измерения берется $c = \frac{a}{2}$ вместо a (рис. 2):

$$\xi = c_1 + 2x; \quad \eta = 2y, \quad \text{где} \quad c_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0,9757478. \quad (3,1)$$

Получаются уравнения

$$\ddot{\xi} = 2 \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial U'}{\partial \xi}; \quad \ddot{\eta} = -2 \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial U'}{\partial \eta} \quad (3,2)$$

и интеграл Якоби

$$V^2 = 2U' + H, \quad \text{где} \quad U' = \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) - c_1 \xi + \frac{8m_1}{r} + \frac{8m_2}{\rho}, \quad H = \text{const.} \quad (3,3)$$

Преобразование Тиле состоит в переходе к новым переменным τ , $U(\tau)$ и $V(\tau)$ по формулам $dt = r\rho d\tau$ и $\zeta = \cos W$, где

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \text{а} \quad W = U + iV. \quad (3,4)$$

Как нетрудно проверить, это преобразование действительно приводит к уравнениям с правыми частями, регулярными во всей конечной плоскости W . В переменных Тиле на быстродействующей электронной цифровой машине СЦМ¹⁷ все траектории (около тысячи) вычислялись с 5-ю—7-ю верными знаками. Удобным средством контроля точности оказался интеграл Якоби (3,3).

Приведем результаты расчета траекторий с минимальной скоростью. Первой была вычислена траектория с первой критической скоростью

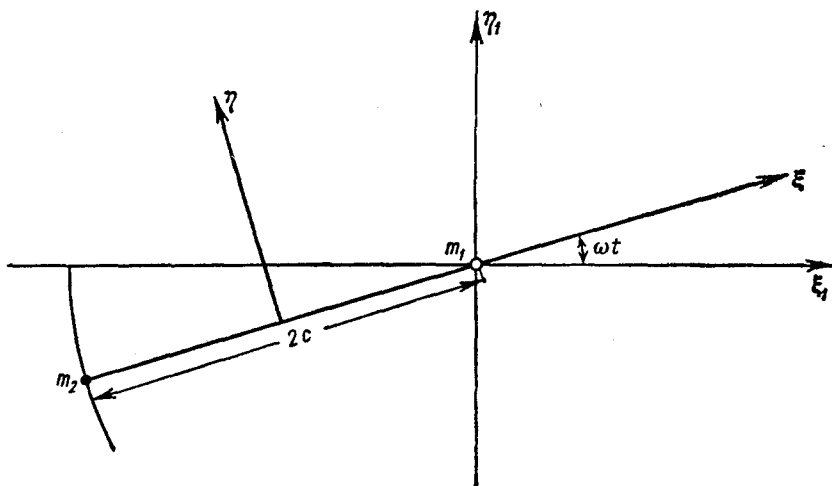


Рис. 2. Связь геоцентрических координат ξ_1, η_1 с вращающимися ξ, η . Начальное направление оси ξ_1 от m_1 (Луны) к m_2 (Земле).

$V_0 = V_0^{(1)}$, направленной перпендикулярно начальному геоцентрическому радиусу r_1 в сторону вращения Луны. При этом геоцентрическая начальная скорость снаряда, как можно заключить из рис. 2, оказывалась максимальной. Траектория начиналась на высоте 200 км при $q=a$. Оказалось, что эта траектория возвращается к Земле, не доходя до критической кривой s'_1 примерно на 30 000 км. Были прослежены еще 5 оборотов указанной траектории на интервале, превышающем месяц, но апогейное расстояние практически не изменилось.

Вычисленная траектория во вращающихся координатах приведена на рис. 3 (6-й оборот не показан, так как пересекается с первым). Время полета здесь и далее отмечено вдоль кривых в сутках *). В невращающейся геоцентрической системе $m_1\xi_1\eta_1$ (ось ξ_1 направлена по оси ξ в момент $t=0$; рис. 2) виткам типа восьмерок на рис. 3 отвечают кривые, обходящие Землю в том же направлении и лежащие почти на один и тот же эллипс с фокусом в центре Земли (рис. 4). Рост апогейного радиуса хотя и заметен, но мал.

Если для какой-либо траектории с начальной скоростью $V_0 = V_0^{(1)}$ согласно § 2 поверхность s'_1 рано или поздно достигается, то из приведенного расчета следует, что это произойдет лишь через достаточно большое количество оборотов вокруг m_1 .

Кроме рассмотренной, были вычислены траектории, отличающиеся от нее направлением начальной скорости (рис. 5). Оказалось, что для апогейного расстояния первого оборота траектории выбор направления

*) Земля, Луна и траектории на рисунках с делениями по осям нанесены соответственно масштабу.

начальной скорости не безразличен. А именно, из сравнения траекторий на рис. 5 (например, траекторий *I* и *IV*) видно, что апогейное расстояние оказывается тем больше, чем больше величина начальной геоцентрической скорости.

Заметим, что кривые типа *IV* на рис. 5, обходящие Землю по часовой стрелке, в геоцентрической системе координат очень близки, как и

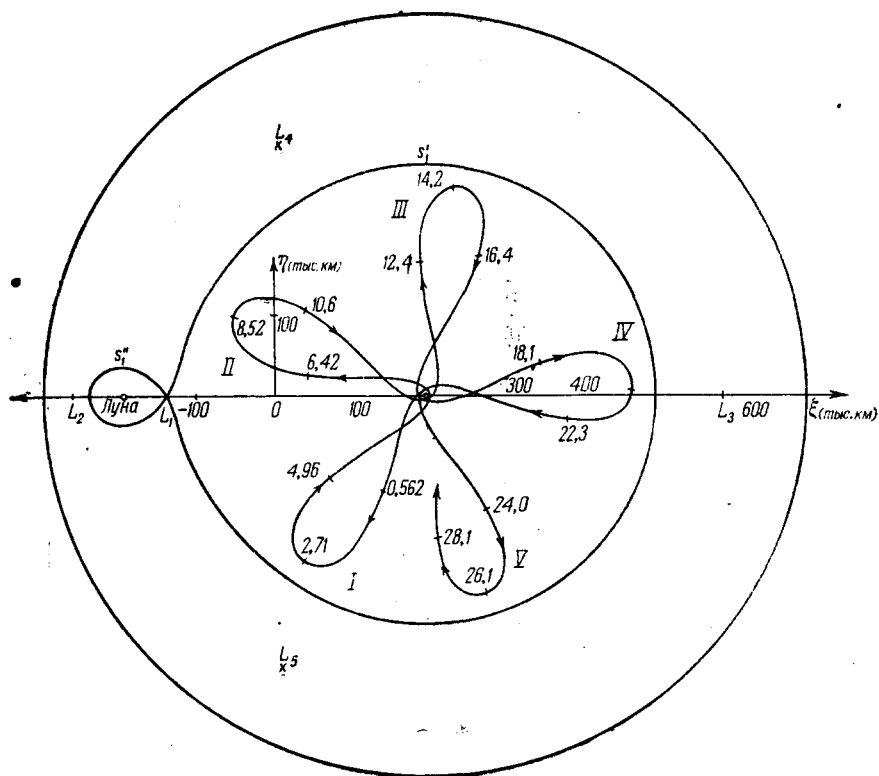


Рис. 3. Первые обороты траектории с минимальной критической начальной скоростью во вращающихся координатах. Критическая кривая s'_1 не достигается в течение месяца. (Кривые на фигурах с делениями по осям нанесены в масштабе).

кривые на рис. 4, к эллипсам с фокусом в центре Земли, причем эти эллипсы проходятся по часовой стрелке.

Факты, аналогичные приведенным для траекторий с начальной скоростью $V_0 = V_0^{(1)}$, имеют место и для траекторий $V_0 = V_0^{(i)}$, $i = 2, 3, 4$. Оказалось, в частности, что на первом обороте эти траектории не только не достигают соответствующих кривых s_i , но даже не доходят до кривой s'_i (рис. 1).

Таким образом, минимальные скорости, полученные в § 2 с помощью интеграла Якоби, для достижения Луны на первом обороте (что как раз наиболее интересно) совершенно недостаточны. Учесть условие достижения Луны на первом обороте в методе § 2 не удастся, и приходится искать другой подход к задаче.

Из того, что на первом обороте движения с минимальными скоростями оказались в геоцентрических координатах очень близкими к движениям по соответствующим эллипсам с фокусом в центре Земли, следует, что для таких движений на первом обороте влияние Луны практически несущественно. Это наводит на мысль попытаться найти мини-

мальные скорости для достижения Луны на первом обороте приближенно, полностью пренебрегая влиянием Луны.

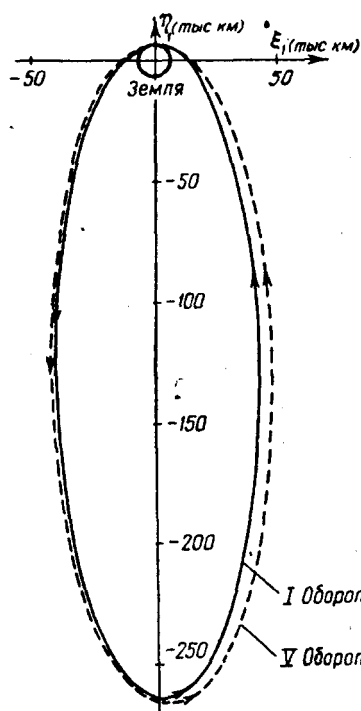


Рис. 4. Предыдущая траектория в геоцентрических координатах. Заметно увеличение орбиты под действием лунных возмущений.

В этом случае будет существенна начальная скорость V_1 в невращающейся геоцентрической системе $m_1\xi_1\eta_1$, а не скорость в системе $0\xi\eta$ (рис. 2). Минимальная геоцентрическая начальная скорость, как нетрудно понять, должна просто отвечать достижению апогейного радиуса r_a , равного расстоянию до Луны.

Определим величину V_1 минимальной скорости, считая заданным ее угол α_1 с начальным геоцентрическим радиусом r_1 .

С помощью условия $r_a = a$ получим выражение большой оси минимального эллипса:

$$2a_3 = \frac{a^2 - r_1^2 \sin^2 \alpha_1}{a - r_1 \sin^2 \alpha_1}. \quad (3,5)$$

С помощью геоцентрического интеграла энергии найдем минимальную начальную скорость $V_1(r_1, \alpha_1)$:

$$\left. \begin{aligned} V_1^2 &= r_1 V_n^2(r_1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a_3} \right); \\ V_n^2(r_1) &= \frac{2f m_1}{r_1}, \end{aligned} \right\} \quad (3,6)$$

где V_n — параболическая скорость. Для высоты 200 км и вертикального направления $\alpha_1 = 0$ начальной скорости имеем

$$V_n = 10,99967 \text{ км/сек},$$

и величина минимальной начальной скорости $V_1 = 10,90525 \text{ км/сек}$. Эта

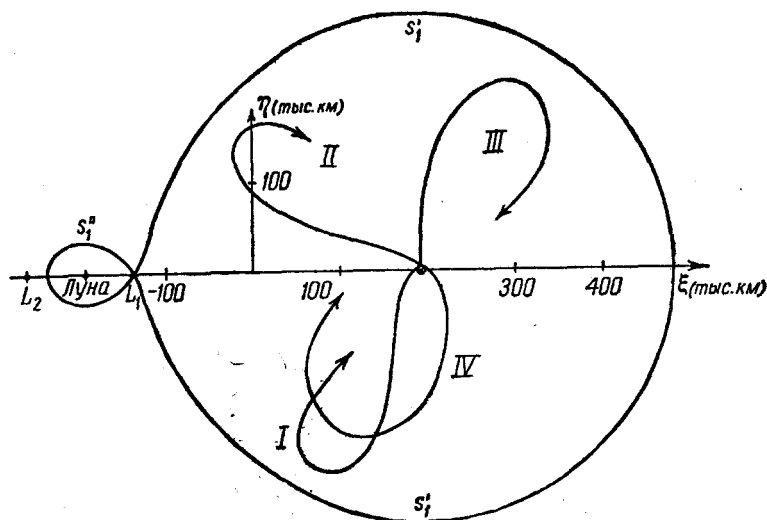


Рис. 5. Влияние изменения направления начальной скорости во вращающихся координатах $0\xi\eta$ на траекторию.

величина примерно на 60—50 м/сек превышает геоцентрические скорости, отвечающие первой—четвертой критической скорости (соответственно) при $\alpha = 0$.

Из (3,5) и (3,6) следует, что с изменением направления начальной скорости от вертикального до горизонтального, т. е. при изменении $0 < |\alpha_1| < \frac{\pi}{2}$, величина начальной скорости монотонно растет. Следовательно, приведенное значение начальной скорости, отвечающее вертикальному ее направлению, — наименьшее из минимальных. Однако его отличие от значения, отвечающего горизонтальному направлению $|\alpha_1| = \frac{\pi}{2}$, невелико. Например, при начальной высоте 200 км это отличие составляет всего лишь 1,6 м/сек.

Начальное положение рассчитывается достаточно просто. По величине V_1 и направлению α_1 начальной скорости легко находятся параметры эллипса, угловое расстояние Φ и время полета между начальным и конечным радиусами. Начальное положение, отвечающее достижению Луны, находится из условия встречи снаряда с Луной в упрежденной точке.

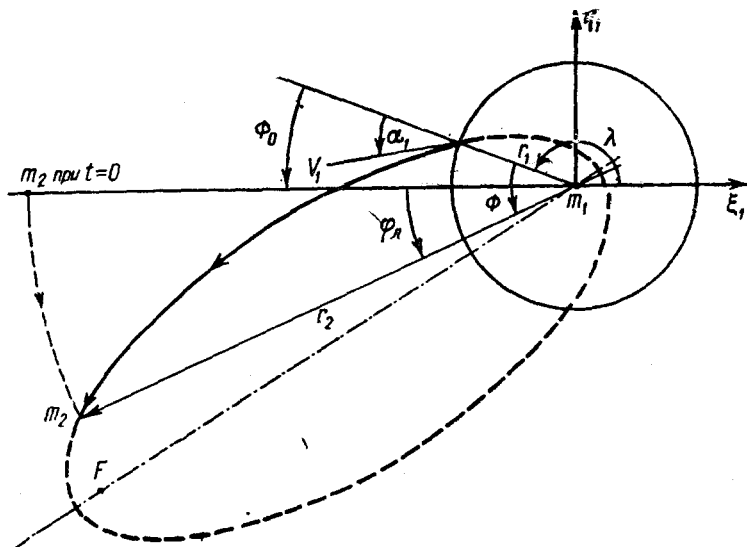


Рис. 6. Расчет попадания в Луну без учета ее влияния при $\alpha_1 > 0$.

В случае движения в плоскости орбиты Луны, начальное положение определяется только углом λ начального радиуса с осью ξ ($|\lambda| < \pi$). При условии, что в начальный момент ось ξ идет по оси ξ_1 , имеем (рис. 6):

$$\lambda = \pi \operatorname{sign} \alpha_1 - \Phi_0, \quad \Phi_0 = \Phi - \varphi_1, \quad \varphi_1 = \omega T_{1,2}, \quad (3.7)$$

где ω — угловая скорость Луны, $T_{1,2}$ — время полета до упрежденной точки, определяемое по формулам теории космических сечений. Для всех углов здесь и в дальнейшем положительным считается направление против часовой стрелки.

Траектории, определяемые уравнениями (3,2) и начальными данными, получаемыми из формул (3,5) — (3,7), были найдены численным интегрированием на машине для значений $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$ и ряда близких значений. Одна из них представлена на рис. 7. Оказалось, что условие $r_a = a$ дает минимальную скорость, потребную для достижения центра Луны, достаточно точно (с точностью порядка 0,02 м/сек), так что со-

ответствующие начальные данные действительно можно рассчитывать, полностью пренебрегая влиянием Луны.

Полученный результат означает, в частности, что распространенное мнение, будто бы для достижения Луны достаточно достигнуть удаления,

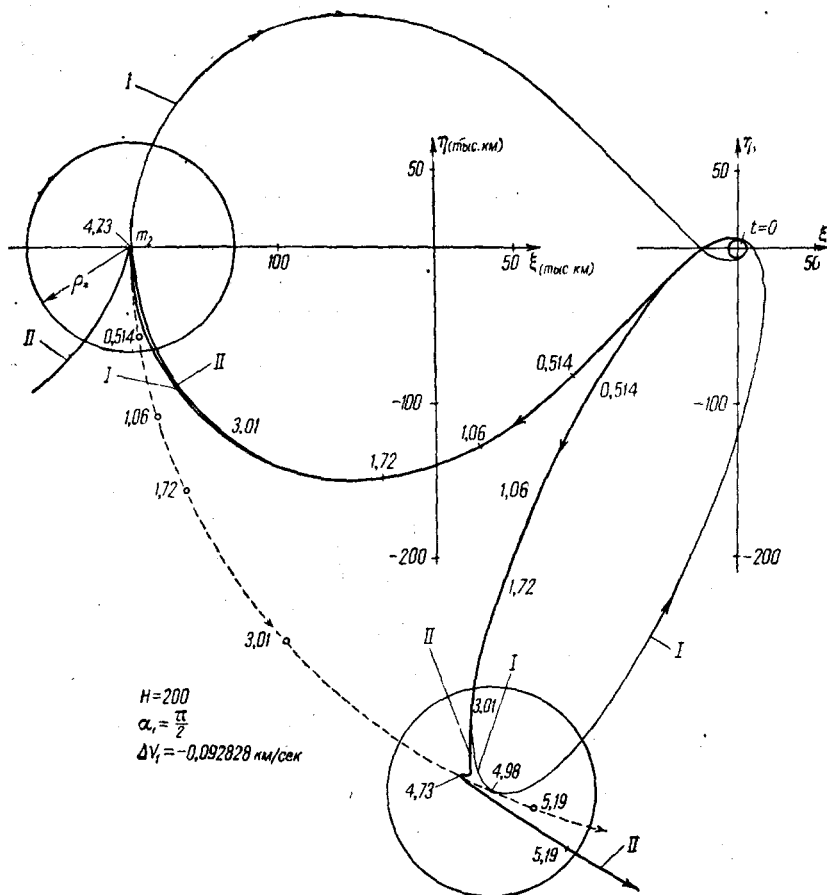


Рис. 7. Отличие попадающей траектории II от соответствующего эллипса I при минимальной начальной скорости. Видно, что попадание можно рассчитывать без учета влияния Луны.

на котором притяжения Земли и Луны равны, — неверно. Это подтвердили и расчеты соответствующих траекторий с учетом притяжения Луны для $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}, 0, +\frac{\pi}{2}$ (см. например, на рис. 8 траекторию с $\alpha_1 = +\frac{\pi}{2}$).

Заметим, что даже в случаях, изображенных на рис. 7 и 8, когда снаряд и Луна до сближения обходят Землю в одном направлении, и влияние Луны особенно сильно, движения с учетом влияния Луны (жирные кривые) и без учета (тонкие кривые) до входа в сферу действия Луны (круг $\rho = \rho_*$) практически совпадают. При скоростях, больших минимальных, влияние возмущений оказывается еще меньше.

Теперь можно получить простое объяснение, почему при начальной скорости в системе $O\xi\eta$, чуть большей первой критической скорости $V_0^{(1)}$

(§ 2), снаряд не может на первом обороте траектории подняться к точке либрации L_1 , пройти горловину с очень малой скоростью и достигнуть Луны. Действительно, геоцентрическая константа площадей $\delta(L_1)$, отвечающая относительно покою в точке L_1 , превосходит начальную константу площадей $\sigma(A_1)$ по меньшей мере в 3,9 раза *), и возмущения от Луны не могут эту разницу свести к нулю в течение одного оборота.

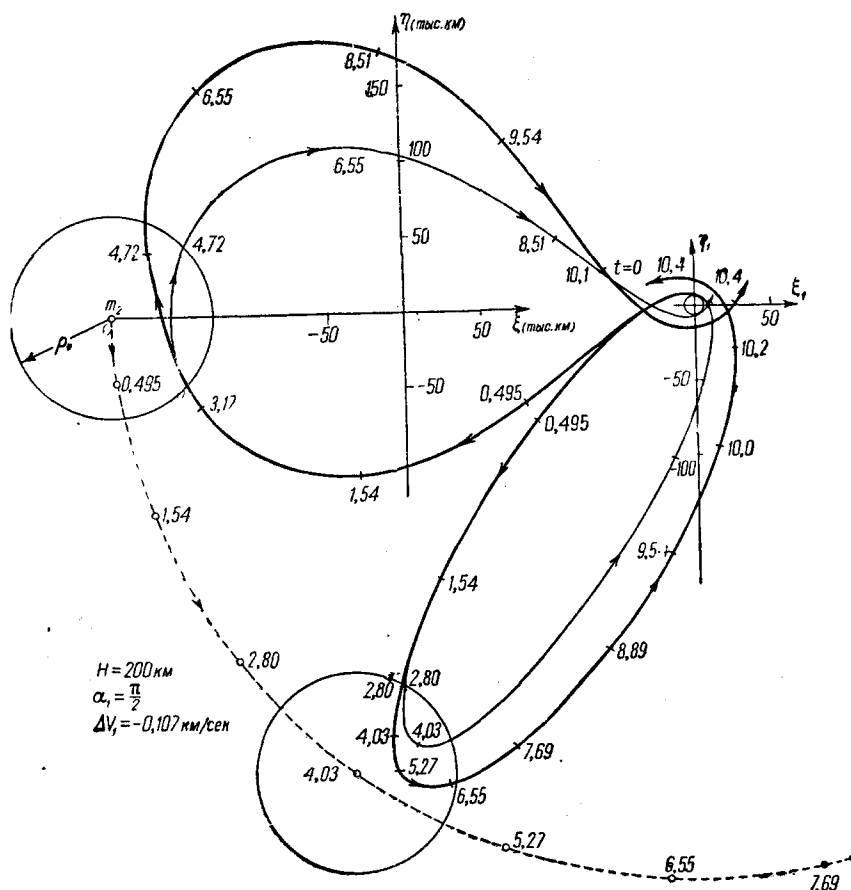


Рис. 8. Возмущение Луной эллипса, достигающего точки равенства притяжений Земли и Луны.

Оценим по порядку величины количество оборотов, потребное для достижения критической кривой s'_1 (рис. 1) при первой критической начальной скорости. Поскольку для траектории на рис. 2 при начальной величине $\delta(A_1) = 71\,300 \text{ км}^2/\text{сек}$ за 6 оборотов накопилось $\Delta\delta = 6810 \text{ км}^2/\text{сек}$, можно ожидать, что для достижения кривой s'_1 потребуется количество оборотов порядка

$$\frac{\sigma(L_1) - \sigma(A_1)}{\Delta\sigma} \cdot 6,$$

т. е. порядка 200 оборотов.

Заметим, что отличие геоцентрических энергий снаряда, находящегося в относительном покое в точке L_1 , и снаряда, имеющего критичес-

*) $\sigma(L_1) = \omega r_{L_1}^2 \cong 282\,000 \text{ км}^2/\text{сек}$, $|\sigma(A_1)| \cong r_1 V_0^{(1)} < 72\,400 \text{ км}^2/\text{сек}$.

кую начальную скорость $V_0^{(1)}$, ничтожно по сравнению с его начальной кинетической энергией $\frac{1}{2}(V_0^{(1)})^2$. Поэтому возмущающее действие Луны при скоростях V_0 , близких к $V_0^{(1)}$, в основном сводится к изменению геоцентрической секториальной скорости σ .

§ 4. О ВОЗМОЖНОСТИ ЗАХВАТА ЛУНОЙ СНАРЯДА С ЗЕМЛИ

Среди траекторий, вычисленных при решении вопроса о минимальных начальных скоростях, не оказалось траекторий, отвечающих захвату.

С помощью результатов Хопфа¹¹ можно прийти к заключению, что множество траекторий снаряда в фазовом пространстве, про которые нельзя сказать, что они не отвечают захвату, имеет лебеговскую меру нуль. Для решения задач о полете к Луне важно знать, существует ли хоть одна траектория, отвечающая захвату, или нет. Если она существует, то, хотя ее исключительные начальные данные невозможно реализовать в точности, все же, реализуя достаточно близкие к ним данные, можно было бы получать траектории, делающие сколь угодно большое количество обращений вокруг Луны, прежде чем удалиться от нее. Это, очевидно, представляет интерес, например, для создания искусственного спутника Луны без помощи двигателя.

Однако можно доказать, что захват Луной снаряда, пришедшего от Земли, на первом обороте его траектории невозможен ни при каких начальных данных. Это утверждение доказывается с помощью идеи В. Г. Фесенкова¹², состоящей в преобразовании интеграла Якоби (2,1) до захвата к геоцентрическим элементам a_1, p_1, i_1 , после захвата — к селеноцентрическим элементам a_2, p_2, i_2 , исключении константы h и установлении противоречивости результата.

Противоречивость удается доказать благодаря специфике начальных данных траекторий, начинающихся у Земли и на первом обороте сближающихся с Луной (ср.¹²). Как и у В. Г. Фесенкова, принималось, что захват происходит, если, начиная с некоторого момента, траектория не выходит из сферы, внутри которой притяжение Луны сильнее притяжения Земли. Радиус этой сферы $\rho_0 \cong \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1/3} = 42\,700$ км. Если вместо этой сферы пользоваться сферой действия Луны $\left(\rho = \rho_* = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2/3} = 66\,000$ км), доказательство остается в силе. Отметим, что это доказательство может быть проведено и при меньшем соотношении притягивающих масс $m_2 : m_1$, если только начальное расстояние тела m_0 от массы m_1 достаточно мало по сравнению с расстоянием $m_1 m_0$.

Таким образом, снаряд, выпущенный с Земли и на первом обороте вошедший в сферу действия Луны, обязательно выйдет из нее. Это означает, что получение постоянного спутника Луны на первом обороте без помощи двигателя невозможно.

Для случая сближения снаряда с Луной по произвольной траектории невозможность захвата доказать не удастся.

Невозможность захвата для произвольных траекторий в круговой ограниченной задаче трех тел удастся доказать лишь для достаточно малых отношений притягивающих масс, меньших, чем отношение массы Луны к массе Земли. Приведем это доказательство. Положим $m_1 + m_2 = 1$ и пусть $m_2 = \mu$. Тогда $m_1 = 1 - \mu$, $\rho_0 \cong \sqrt[3]{\mu}$.

Согласно § 2, если тело m_0 приходит к m_2 на каком-либо обороте из внутренности критической поверхности s' , то $h > h_1$, а если из бес-

конечности, то $h > h_2$. При этом

$$-h_i = U_i = \frac{[1 - \mu + (-1)^i \rho_i]^2}{2} + \frac{1 - \mu}{1 + (-1)^i \rho_i} + \frac{\mu}{\rho_i}, \quad i = 1, 2. \quad (4,1)$$

При малых μ имеем¹³

$$\rho_i = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + (-1)^i \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - \frac{1}{9} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{3/3} + \dots, \quad \text{и} \\ -2h_i = 3 + 10 \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - \left[3 + (-1)^i \frac{4}{9}\right] \mu^{3/3} \quad (4,2)$$

с точностью до $\left(\frac{\mu}{3}\right)^{4/3}$.

Предполагая, что захват произошел, и преобразуя (2,1) к m_2 -центрическим элементам, в силу неравенства $-2h < -2h_1$ получим:

$$\frac{\mu}{a_2} + 2\sqrt{\mu p_2} \cos i_2 < 10 \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \mu F_1, \quad (4,3)$$

где F_1 — конечно. В силу $a_2 < \sqrt{\mu}$ имеем

$$\sqrt{\mu} - 2\mu^{3/4} < 10 \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \mu F_1.$$

Так как младшая степень μ слева меньше, чем справа, при достаточно малых μ последнее неравенство противоречиво, и захват невозможен. Нетрудно показать, что результат сохранится, если вместо сферы $\rho < (\mu)^{1/3}$ пользоваться сферой действия $\rho < (\mu)^{2/3}$.

Результат (4,3) исправляет критерий невозможности захвата В. Г. Фесенкова¹² для малых μ

$$\frac{1}{a_2} + 2\sqrt{p_2} \cos i_2 < \mu F, \quad (4,4)$$

где F конечно. Критерий (4,4) отличается от (4,3) потому, что в¹² при доказательстве в левых частях формул типа (4,4) опущено μ . Кроме того, в¹² при получении критерия (4,4) не рассматривались выражения $h_i(\mu)$, а использовалось преобразование Тиссерана¹³ и следующее утверждение¹² (стр. 45):

«Легко видеть, что при всех обстоятельствах движения тела m_0 , при которых возможно его сближение с m_1 , выражение $\frac{1}{a_1} + 2\sqrt{p_1} \cos i_1$ должно быть всегда меньше 3». Это утверждение неправильно. Преобразуя (2,1) к элементам a_1 , p_1 , i_1 и пользуясь (4,2), можно получить

$$\frac{1}{a_1} + 2\sqrt{p_1} \cos i_1 = 3 + 10 \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \mu \varphi,$$

(где φ — конечно), что для достаточно малых μ больше 3.

Для $\mu^{-1} = 81,45$ неравенство (4,3) еще не противоречиво, и для произвольных траекторий, приходящих к Луне, вопрос о захвате остается открытым, в то время как по критерию В. Г. Фесенкова (4,4) получается, что захват невозможен.

Независимо от того, возможен захват или нет, создание временного спутника Луны без помощи двигателя в принципе возможно. Действительно, если начальная скорость снаряда превосходит первую критическую скорость, но меньше второй, т. е. если $h_1 < h < h_2$, то, согласно § 2, снаряд не сможет уйти в бесконечность, но может пройти через горловину у точки либрации L_1 к Луне (рис. 1). Конечно, предварительно,

согласно § 3, он должен сделать достаточно большое количество оборотов вокруг Земли. Поскольку горловина может быть сделана сколь угодно узкой при достаточно уменьшении начальной скорости, снаряд, по-видимому, может двигаться около Луны сколь угодно долго, прежде чем выйдет через горловину обратно.

Что касается практической реализации такого искусственного спутника Луны, то она вряд ли возможна по следующим причинам. Во-первых, отличие первой и второй критических скоростей составляет менее 1 м/сек, и промежуточную скорость трудно реализовать. Во-вторых, снаряд, прежде чем достигнуть горловины, может упасть на Землю, и в-третьих, возмущения Солнца, которыми пренебрегалось, легко могут вывести h из диапазона $h_1 < h < h_2$, т. е. привести к закрытию горловины или уходу снаряда в бесконечность.

§ 5. ПРИБЛИЖЕННАЯ МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Назовем траекториями сближения траектории, начинающиеся вблизи Земли (тела m_1) и на первом обороте вокруг Земли входящие в сферу действия Луны (тела m_2).

Поскольку траектория сближения, войдя в сферу действия, обязательно выходит из нее, движение по траектории сближения можно разбить на 3 участка: движение к сфере действия, движение внутри сферы действия и движение от сферы действия.

Возмущение Луной геоцентрического движения к сфере действия, как мы видели в § 3, практически несущественно. То же относится и к движению от сферы действия. Столь же мало сказывается и возмущение Землей селеноцентрического движения в сфере действия, как следует из самого определения сферы действия. Поэтому возмущениями по сравнению с притяжением центрального тела всюду можно пренебречь.

Пренебрегая возмущениями, получаем, что участки траектории вне сферы действия, отнесенные к геоцентрической системе $m_1\xi_1\eta_1\zeta_1$, суть конические сечения с фокусом m_1 , а участок движения внутри сферы действия, отнесенный к селеноцентрической системе $m_2\xi_2\eta_2\zeta_2$, есть коническое сечение с фокусом m_2 (см. рис. 9а, отвечающий случаю движения в плоскости орбиты Луны).

На участке от начальной точки до точки входа в сферу действия (входной точки) траектория, в зависимости от геоцентрической начальной скорости, может быть эллипсом, гиперболой или параболой. Очевидно, что при эллиптической скорости, большей минимальной, вход ракеты в сферу действия возможен как на восходящей ветви геоцентрической траектории, так и на нисходящей ее ветви, а при параболической и гиперболческой скоростях вход возможен только на восходящей ветви.

Расчет движения к сфере действия производится по геоцентрическим начальным данным: r_1 , λ_1 , V_1 , α_1 . Во входной точке геоцентрические координаты и скорость V_2 (геоцентрические входные данные) пересчитываются в селеноцентрическую систему $m_2\xi_2\eta_2\zeta_2$, и получаются селеноцентрические входные данные (рис. 9а).

Можно показать, что участок траектории сближения, расположенный внутри сферы действия Луны, в селеноцентрических координатах всегда является гиперболой. На границе сферы действия селеноцентрическая скорость V'_2 превосходит параболическую скорость на границе

сферы действия $V'_n = \sqrt{2 \frac{f m_2}{\rho_*}} \cong 0,383 \text{ км/сек}$ более чем вдвое.

Указанный факт объясняет невозможность захвата для траекторий сближения. Кроме того, благодаря гиперболчности скорости окрестно-

сти границы сферы действия проходятся очень быстро, и возмущения хотя и достигают вблизи границы сферы действия величины порядка 0,7 от притяжения центрального тела, все же не успевают заметно сказаться на траекториях сближения.

Движение внутри сферы действия Луны определяется по селеноцентрическим интегралам энергии и площадей. В точке выхода из сферы

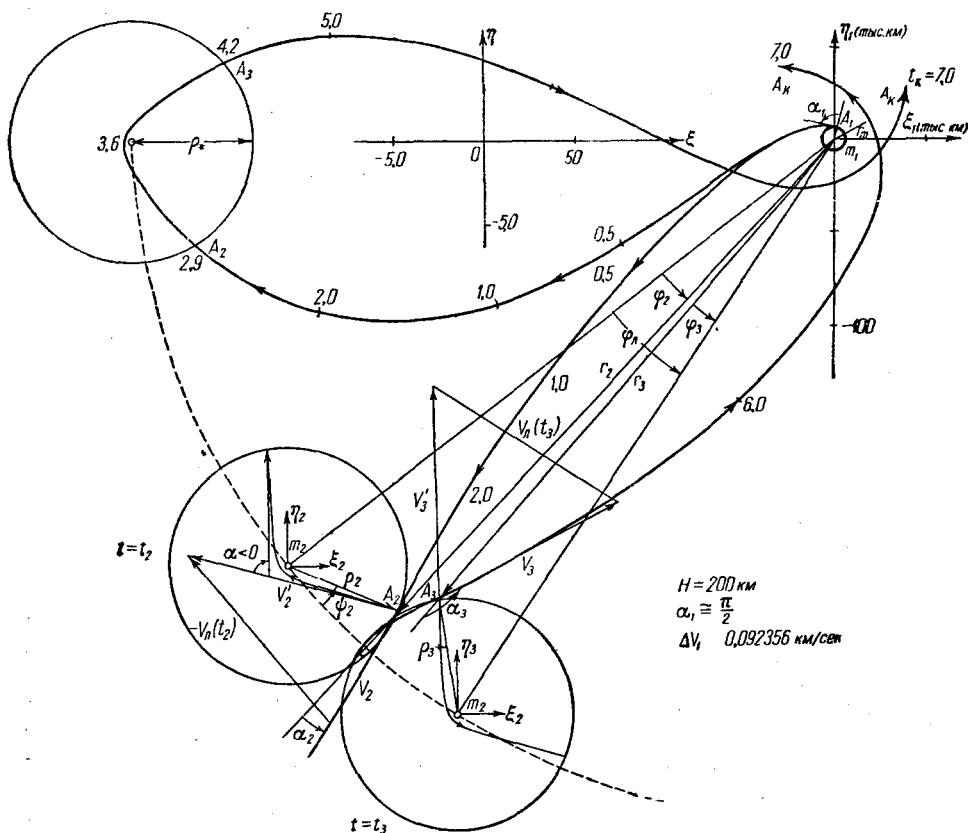


Рис. 9а. Приближенный расчет движения. Траектория. Вне сферы действия Луны пренебрегается возмущениями от Луны, а внутри — возмущениями от Земли. Внутри сферы действия селеноцентрическое движение происходит по гиперболе.

действия селеноцентрические координаты и выходная скорость V_3' (селеноцентрические выходные данные) пересчитываются (рис. 9а) на геоцентрические выходные данные.

После выхода из сферы действия Луны движение рассчитывается по геоцентрическим интегралам энергии и площадей с новыми значениями постоянных. Движение после выхода из сферы действия может быть по отношению к Земле либо восходящим, либо нисходящим.

Покажем на примере траектории, изображенной на рис. 9а, как строится план входных и выходных скоростей. Примем на плане скоростей направление геоцентрического радиуса в момент входа t_2 за горизонтальное (рис. 9б). Из некоторой точки O проведем вектор входной геоцентрической скорости V_2 , образующий угол α_2 со входным геоцентрическим радиусом, и из конца его проведем вектор $-V_A(t_2)$, образующий с трансверсалью угол ϕ_2 , равный углу входного радиуса с направлением

Земля — Луна. Суммарный вектор $V'_2 = V_2 - V_A(t_2)$ будет входной селеноцентрической скоростью.

Так как селеноцентрическое движение происходит по коническому сечению, то $|V'_3| = |V'_2|$. Пусть α — угол изменения направления селено-

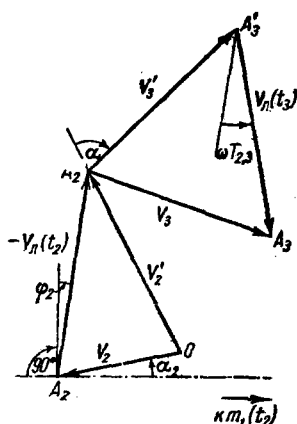


Рис. 9б. План скоростей в точках пересечения траектории со сферой действия.

центрического движения снаряда Луной за время его пребывания в сфере действия. Проведем из конца вектора V'_2 вектор V'_3 , образующий с V'_2 угол α , и из конца его проведем вектор $+V_A(t_3)$, образующий угол $\omega(t_3 - t_2) = \omega T_{2,3}$ с вектором $V_A(t_2)$. Суммарный вектор $V_3 = V'_3 + V_A(t_3)$ есть вектор выходной геоцентрической скорости.

§ 6. АНАЛИЗ ТРАЕКТОРИЙ СБЛИЖЕНИЯ

С помощью методики, описанной в § 5, можно рассчитать и построить любую траекторию сближения. Представляет интерес проанализировать, хотя бы приближенно, совокупность всех возможных движений по траекториям сближения. Рассмотрим для этого характеристики совокупности траекторий сближения в начале и в конце каждого из последователь-

ных участков движения. Одновременно будем производить соответствующие построения на плане скоростей.

Участок движения к сфере действия определяется начальными данными. Начальную высоту будем считать фиксированной и в расчетах примем ее равной 200 км. Результаты будут пригодны и для высот, превышающих рассматриваемую вдвое или даже в несколько раз (например, для высоты спутника-станции), так как изменения начальной высоты невелики по сравнению с начальным геоцентрическим радиусом. Угол α_1 начальной скорости с этим радиусом будет изменяться в диапазоне $-90^\circ < \alpha_1 < 90^\circ$, а сама начальная скорость V_1 будет основным переменным параметром.

Рассмотрим совокупность возможных величин геоцентрических входных данных. Указанные величины рассчитываются по начальным с помощью геоцентрических интегралов энергии и площадей. Рассмотрим входную геоцентрическую скорость V_2 и ее угол α_2 со входным геоцентрическим радиусом для среднего значения этого радиуса $r_2 = a$, т. е. на удалении лунной орбиты. Тогда, согласно интегралу энергии, входная скорость будет зависеть только от начальной скорости, или, что то же, от избытка ΔV_1 скорости над параболической V_n . Функция $V_2(V_1)$ является монотонно возрастающей (рис. 10). Угол α_2 зависит не только от начальной скорости, но и от начального угла α_1 , и имеет его знак. Функция $\alpha_2(V_1)$ является монотонно убывающей и для начального угла $\alpha_1 = 90^\circ$, т. е. для горизонтального направления начальной скорости представлена на рис. 10. При уменьшении начального угла соответствующая кривая, начинаясь по-прежнему с ординаты 90° , будет проходить под представленной.

Для определения возможных диапазонов изменения входных данных при изменении входного радиуса были вычислены аналогичные рассмотренным кривые (рис. 10).

$$\widehat{V}_2(V_1), \widehat{\alpha}_2(V_1) \text{ и } \widetilde{V}_2(V_1), \widetilde{\alpha}_2(V_1), \quad (6,1)$$

отвечающие, соответственно,

$$r_2 = a + \rho_* \quad \text{и} \quad r_2 = a - \rho_*,$$

где ρ_* — радиус сферы действия.

Видно, что для начальных скоростей, не близких к минимальным, изменения величины и направления входной геоцентрической скорости внутри интервала $|r - a| < \rho_*$ малы. Для таких начальных скоростей можно приближенно считать, что при фиксированных V_1 и α_1 величина

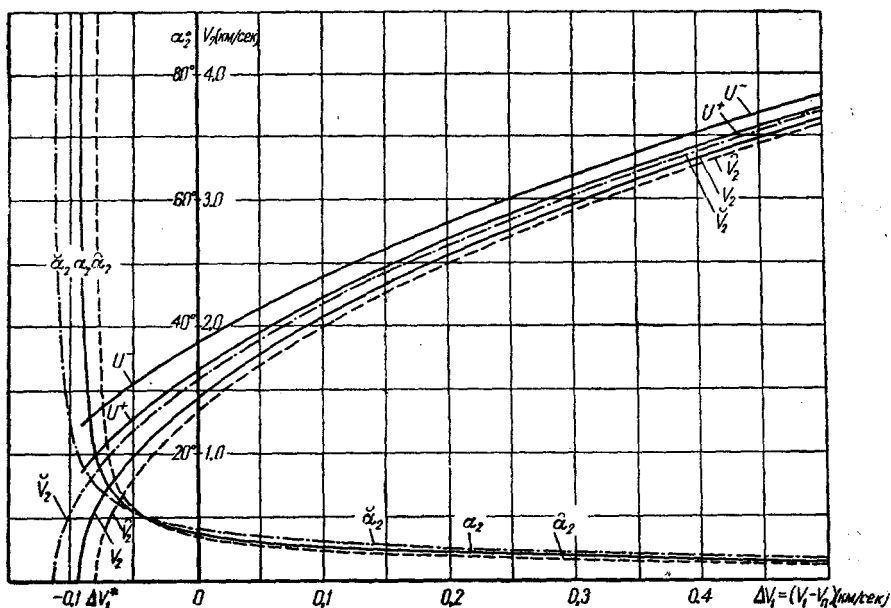


Рис. 10. Изменение характеристик в точке входа в сферу действия в зависимости от избытка ΔV_1 начальной скорости V_1 над параболической V_n . $\tilde{V}_2$, $\hat{V}_2$ и $\check{\alpha}_2$, $\hat{\alpha}_2$ — крайние значения входной геоцентрической скорости V_2 и ее угла α_2 со входным геоцентрическим радиусом. U^+ и U^- — значения входной селеноцентрической скорости для углов начальной скорости с радиусом $\pm 90^\circ$.

и направление входной геоцентрической скорости не зависят от точки входа, т. е. от траектории, и имеют средние значения

$$V_2(r_2) \equiv V_2(a) \quad \text{и} \quad \alpha_2(r_2) \equiv \alpha_2(a). \quad (6,2)$$

Условимся здесь и в дальнейшем рассматривать только траектории сближения, проходящие в плоскости орбиты Луны. Пусть начальная скорость V_1 и ее угол с радиусом a_1 фиксированы, и траектория сближения меняется только за счет угла λ начального радиуса с направлением Луна — Земля. Тогда для начальных скоростей, не близких к минимальным, вектор V_2 на плане скоростей (рис. 96 и 14) согласно (6,2) будет одним и тем же для всех рассматриваемых траекторий.

Времена полета до орбиты Луны $T_{1,2}(V_1)$ для вертикального и горизонтального направления начальной скорости представлены на рис. 11. Они оказались весьма близкими. Этот факт, а также резкость изменений рассмотренных кривых на рис. 10 и 11 при скоростях, близких к минимальным, объясняется вытянутостью конических сечений, отвечающих движению к сфере действия по траекториям сближения (их эксцентриситет близок к 1).

При достаточном возрастании начальной скорости кривые

$$V_2(V_1), \alpha_2(V_1) \text{ и } T_{1,2}(V_1)$$

приближаются соответственно к асимптотам

$$V_2 = V_1; \alpha_2 = \arcsin \frac{r_1 \sin \alpha_1}{r_2}; T_{1,2} = 0, \quad (6,3)$$

где r_1 и r_2 — начальный и входной радиусы. Асимптотический характер этих кривых замечен уже при начальных скоростях, лишь на 0,5 км/сек превышающих параболическую (рис. 10 и 11).

Перейдем к анализу движения в сфере действия. Селеноцентрические входные данные определяются по геоцентрическим. При этом учет малого угла ψ_2 (рис. 9а и 9б) между геоцентрическими радиусами Луны и точки входа, как можно показать, не имеет принципиального

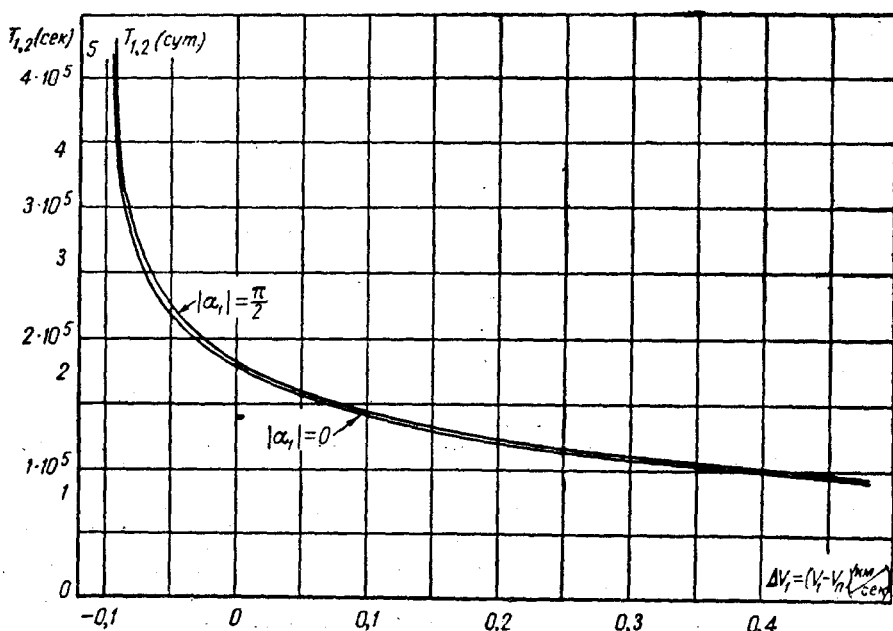


Рис. 11. Времена полета до орбиты Луны. Вертикальному направлению начальной скорости ($\alpha_1 = 0$) отвечают наименьшие времена полета, горизонтально — наибольшие.

значения для последующих результатов. Если этим углом пренебречь, то скорость Луны в момент входа t_2 будет ортогональна входному радиусу, а величина и направление входной селеноцентрической скорости V_2 на плане скоростей будут одними и теми же для всех рассматриваемых траекторий (рис. 14). Это значит, что начальные участки селеноцентрических траекторий в сфере действия будут параллельны.

Если точку входа характеризовать углом ψ_2 ее селеноцентрического радиуса-вектора со скоростью Луны (рис. 9а), то при изменении угла λ вход будет возможен в диапазоне углов ψ_2 , по протяженности близком к 180° . Кривые одной половины этого диапазона обходят центр Луны по часовой стрелке (рис. 12, б), кривые другой половины — против (рис. 12, а).

Для плоских траекторий сближения можно показать, что окрестность значения $|\psi_2| = 180^\circ$ является запретной зоной на сфере действия, через которую вход происходить не может, каковы бы ни были началь-

ные данные. Это значит, что снаряд не может входить в сферу действия, догоняя Луну в ее движении по орбите.

Напомним, что входная и выходная селеноцентрические скорости равны по величине. Общая их величина U есть монотонно возрастающая функция начальной скорости. Для начальных углов скорости с радиусом $\alpha_1 = \pm 90^\circ$ она представлена на рис. 10 (кривые U^+ и U^-). Можно показать, что при изменении α_1 в диапазоне $-90^\circ < \alpha_1 < +90^\circ$ величина селеноцентрической скорости на границе сферы действия монотонно убывает от U^- до U^+ . Разность скоростей $U^- - U^+$ невелика и быстро стремится к нулю с ростом начальной скорости. Так, уже при $\Delta V_1 = 0,5$ км/сек разность составляет лишь около 3% от полусуммы этих скоростей. Заметим, что при произвольных начальных скоростях селеноцентрическая скорость на границе сферы действия превосходит входную геоцентрическую скорость, т. е. $U(V_1) > V_2(V_1)$ (рис. 10).

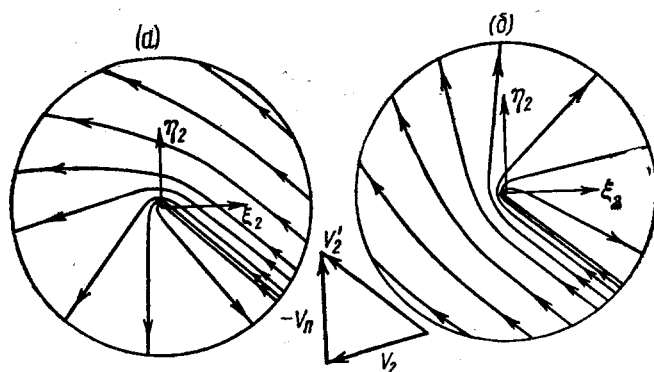


Рис. 12. Селеноцентрические траектории в сфере действия Луны. Точки входа занимают примерно половину сферы действия. V'_2 — селеноцентрическая входная скорость.

Движение внутри сферы действия и селеноцентрические выходные данные рассчитываются с помощью селеноцентрических интегралов энергии и площадей. В частности, можно рассчитать изменение Луной направления селеноцентрического движения, т. е. угол α между входной и выходной селеноцентрическими скоростями. Поскольку рассматриваемые траектории имеют одну и ту же величину входной скорости, угол α определяется только расстоянием d линии действия вектора этой скорости от центра Луны. Условимся приписывать этому расстоянию знак α , т. е. знак направления обхода Луны. Очевидно, Луна тем сильнее изменит направление движения, т. е. угол $|\alpha|$ будет тем больше, чем ближе к Луне начальное направление движения. Для разных фиксированных значений входной селеноцентрической скорости кривые $\alpha(d)$ представлены на рис. 13.

Если принять, что для рассматриваемых траекторий расстояние d изменяется в пределах $-\rho_* < d < \rho_*$, то угол $\alpha(d)$ будет принимать любое значение между -180° и $+180^\circ$, и векторы выходных селеноцентрических скоростей на плане скоростей будут сплошь заполнять круг радиуса U с центром A'_2 (верхний круг на рис. 14).

Рассмотрим изменение скоростей и траекторий в сфере действия при изменении угла λ начального радиуса с направлением Луна — Земля, т. е. при повороте участка движения к сфере действия, как целого, вокруг центра Земли. Пусть восходящая траектория сперва касается сферы действия, обходя ее против часовой стрелки (рис. 12, а). Имеем

$$d = \rho_*, \alpha = 0 \text{ и } V'_3|_{\alpha=0} = V'_2$$

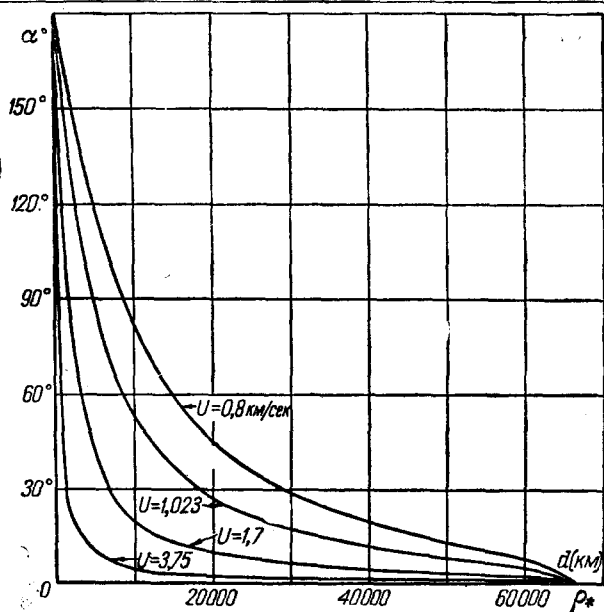


Рис. 13. Угол между касательными к гиперболе во входной и выходной точках сферы действия, как функция расстояния d касательной к траектории во входной точке от центра Луны. U — величина скорости.

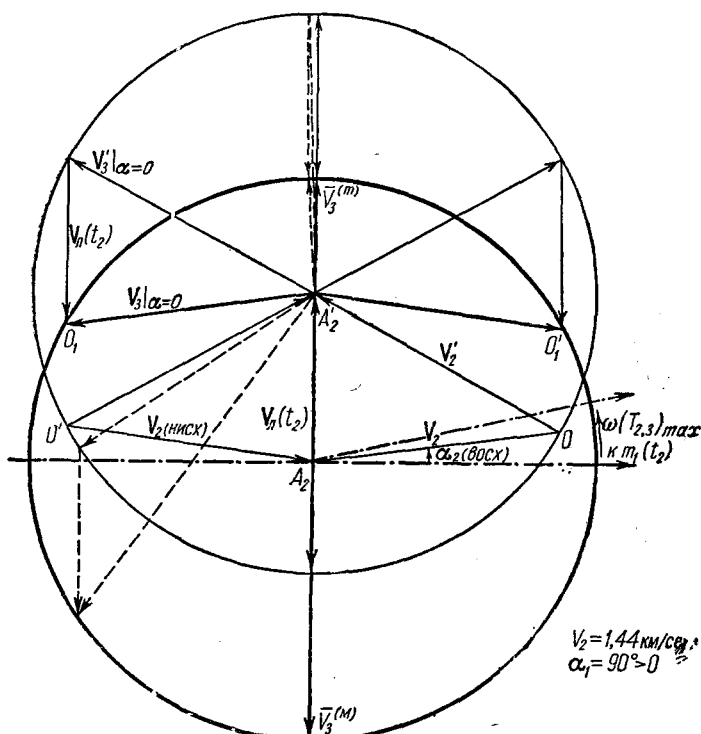


Рис. 14. План выходных скоростей. Верхний круг — селеноцентрические скорости, нижний — геоцентрические. Движение после сближения с Луной возможно по всем направлениям. Скорости $V_{3|alpha=0}^1$ и $V_{3|alpha=0}$ отвечают тривиальному решению.

(рис. 14). С ростом λ траектория будет приближаться к Луне, будет происходить уменьшение d и рост α , т. е. поворот вектора V'_3 против часовой стрелки. Когда станет $d=0$, то α достигнет 180° и будет иметь место попадание в центр Луны (рис. 12, а). При дальнейшем росте λ становится $d < 0$ и скачком становится $\alpha_1 = -180^\circ$, так как изменяется направление обхода центра Луны (рис. 12, б). Однако точка выхода из сферы действия и конец вектора выходной скорости V'_3 обходят соответствующий круг непрерывно, причем всюду против часовой стрелки. Когда вектор V'_3 обойдет полный круг, становится снова $\alpha=0$, $V'_3|_{\alpha=0} = V'_2$ (рис. 14), и сближение перестает иметь место. Решения с $V'_3 = V'_2$ можно назвать тривиальными.

Для малых d , как нетрудно показать, расстояние траекторий от центра Луны является малой порядка d^2 , причем при любых селеноцентрических скоростях на границе сферы действия. Для попадания в Луну (§ 7) это будет важно.

Заметим, что при малых d траектория в сфере действия изгибается так круто, что по внешнему виду приближается к углу, образуемому соответствующими ей скоростями V'_2 и V'_3 на плане скоростей (рис. 14).

Интересны еще зависимости $|d|$, α , Φ' от U , отвечающие траекториям с фиксированным расстоянием от центра Луны. (Здесь Φ' есть угол, проходимый селеносферическим радиусом-вектором при движении внутри сферы действия.) Они являются убывающими функциями, и для траекторий, близких к поверхности Луны, представлены на рис. 15. Видим, что значения d , отвечающие касанию Луны, малы, менее 5400 км. Величина угла поворота направления движения Луной α превышает 90° лишь для скоростей U , близких к минимальным, и с ростом U приближается к нулю. На рис. 14 векторы, отвечающие траекториям касания, проведены пунктиром. Очевидно, траекториям сближения, не соударяющимся с Луной, могут отвечать лишь векторы, заключенные между пунктирными.

Времена полета внутри сферы действия $T_{2,3} = t_3 - t_2$ как функции расстояния $|d|$ для фиксированных значений селеноцентрической скорости U на границе сферы действия представлены на рис. 16. Оказывается, максимумы времен полета достигаются при $d = \frac{\rho_* V'_n}{U \sqrt{2}}$, где V'_n — селеноцентрическая параболическая скорость на границе сферы действия. Однако эти максимумы слабо выражены, и для расстояний $|d|$, не близких к радиусу сферы действия, можно считать $T_{2,3}$ постоянным и зависящим только от U .

Рассмотрим, наконец, геоцентрические выходные данные. Не останавливаясь на них подробно, построим лишь выходные геоцентрические

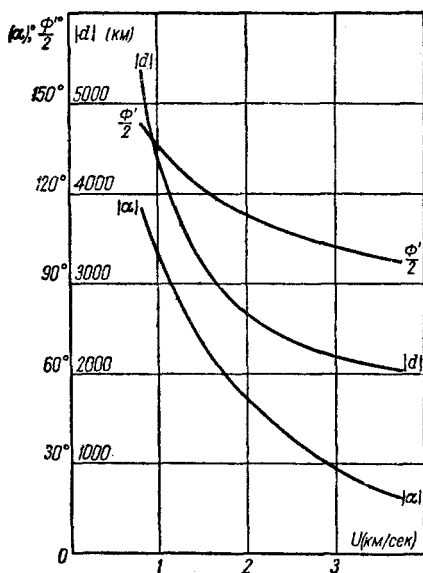


Рис. 15. Характеристики траекторий проходящих у поверхности Луны: Φ' — селеноцентрический угол, проходимый снарядом внутри сферы действия, α — угол между касательными к гиперболе во входной и выходной точках, d — расстояние касательной от центра Луны, U — входная селеноцентрическая скорость.

скорости $V_3(d)$ на плане скоростей. Эти скорости получаются из соответствующих селеноцентрических скоростей $V'_3(d)$ прибавлением вектора скорости Луны $V_L(t_3)$, который повернут относительно $V_L(t_2)$ на небольшой угол $\omega(t_3 - t_2) < \omega(T_{2,3})_{\max}$ между направлениями Земля — Луна в моменты входа и выхода (рис. 14). Удастся показать, что учет этого угла не имеет принципиального значения для проводимого рассмотрения, и им можно пренебрегать. Тогда геометрическое место концов векторов геоцентрических выходных скоростей $V_3(d)$, идущих из точки A'_2 , будет кругом радиуса U , но с центром в точке A_2 (нижний круг на рис. 14). Таким образом, план выходных скоростей является чрезвычайно простым.

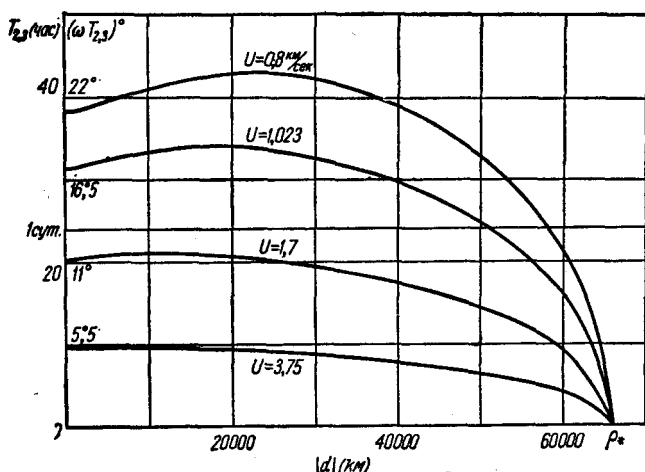


Рис. 16. Время полета в сфере действия. Заметно быстрое убывание времен полета с ростом скорости U .

Рассмотрим теперь сближение на нисходящих ветвях с теми же начальными данными r_1 , V_1 , α_1 , считая начальные скорости V_1 эллиптическими. При тех же допущениях, что и для восходящих ветвей, получим векторы $O'A'_2 = V_2$ и $O'A'_2 = V'_2$ (рис. 14), симметричные прежним относительно прямой $A_2A'_2$. Поскольку любому вектору V'_3 , отвечающему углу α , соответствует симметричный относительно $A_2A'_2$ вектор V_3 для восходящих ветвей, отвечающий углу $-\alpha$, то план скоростей будет просто симметричен плану для восходящих ветвей, а круги концов векторов V_3 будут совпадать. Благодаря этому можно одновременно исследовать оба плана.

В обоих случаях из рис. 14 видим, что максимальное значение выходной геоцентрической скорости $V_3^{(m)} = U + V_L$, а минимальное $V_3^{(m)} = U - V_L$, и что при $U > V_L$ существуют выходные геоцентрические скорости V_3 любого направления, каковы бы ни были величина и направление начальной скорости. Так как величина U монотонно убывает по мере роста угла α_1 , начальной скорости с радиусом, то план скоростей, построенный для угла $\alpha_1 = 90^\circ$, будет иметь несколько меньшие размеры, чем план для угла $\alpha_1 = -90^\circ$, а при промежуточных углах все характеристики плана скоростей промежуточны.

Проследим кратко эволюцию плана скоростей с изменением начальной скорости V_1 , начиная с больших значений избытка ΔV_1 начальной скорости над параболической. При гиперболических скоростях

сближение, очевидно, возможно лишь на восходящей ветви. При $\Delta V_1 = 0,5 \text{ км/сек}$ имеем (рис. 10): $|\alpha_2^\pm| = 3^\circ$, $V_2 = 3,64 \text{ км/сек}$, $U^+ = 3,73 \text{ км/сек}$, $U^- = 3,83 \text{ км/сек}$, где знак «+» отвечает углу $\alpha_1 = +90^\circ$, а «-» отвечает $\alpha_1 = -90^\circ$. Так как U^+ и U^- различаются мало, планы скоростей для всех углов α_1 практически совпадают. Все выходные геоцентрические скорости сильно гиперболические.

С уменьшением начальной скорости все скорости уменьшаются, и вскоре минимальные геоцентрические выходные скорости становятся эллиптическими, хотя входные скорости еще гиперболические. Впервые то случится при $\Delta V_1 = 0,149 \text{ км/сек}$ для угла $\alpha_1 = +90^\circ$. С дальнейшим убыванием начальной скорости эллиптические выходные скорости появляются и для отрицательных углов α_1 . Для угла $\alpha_1 = -90^\circ$ они появятся только при $\Delta V_1 = 0,114 \text{ км/сек}$.

При переходе начальной скорости V_1 через параболическую становится возможным сближение на нисходящей ветви. При $V_1 = V_p$ имеем (рис. 14):

$$V_2 = 1,44 \text{ км/сек}; |\alpha_2^\pm| = 7^\circ, 5;$$

$$U^+ = 1,65 \text{ км/сек};$$

$$U^- = 1,87 \text{ км/сек}.$$

Область эллиптических геоцентрических выходных скоростей занимает на плане скоростей примерно треть соответствующего круга (рис. 14). Для углов $\alpha_1 = \pm 90^\circ$ имеем соответственно максимальные скорости $V_3^{(m)} = 2,67 \text{ км/сек}$; $V_3^{(m)} = 2,9 \text{ км/сек}$ и минимальные $V_3^{(m)} = 0,63 \text{ км/сек}$; $V_3^{(m)} = 0,85 \text{ км/сек}$.

Наконец, когда с уменьшением начальной скорости при угле $\alpha_1 = +90^\circ$ селеноцентрическая входная скорость уменьшится до скорости Луны, появляется нулевая выходная геоцентрическая скорость (рис. 17). Имеем:

$$V_3^{(m)} = 0; V_3^{(m)} = 2 \cdot V_L \cong 2,05 \text{ км/сек}; V_2 \cong 0,6 \text{ км/сек}; \alpha_2^+ \cong 18^\circ, 4.$$

На рис. 17 сектор практически реализуемых селеноцентрических выходных скоростей (между пунктирными линиями) превышает 180° . Соответствующее значение $\Delta V_{1*} \cong -0,077 \text{ км/сек}$.

Хотя соответствующий вектор входной геоцентрической скорости V_2 , как видно из рис. 10, уже не может считаться постоянным при изменении точки входа, можно показать, что учет его переменности, а также переменности вектора входной селеноцентрической скорости, не имеет принципиального значения при $\Delta V_1 > \Delta V_{1*}$. При $\Delta V_1 < \Delta V_{1*}$, как нетрудно проверить, траектории с $\alpha_1 = \pm 90^\circ$ не могут достигать расстояний d , близких к r_* , и не будет достаточно малых углов $\alpha < 0$. На плане выходных скоростей появляется особый запретный участок. Поэтому нужно особое рассмотрение, которого мы здесь приводить не будем.

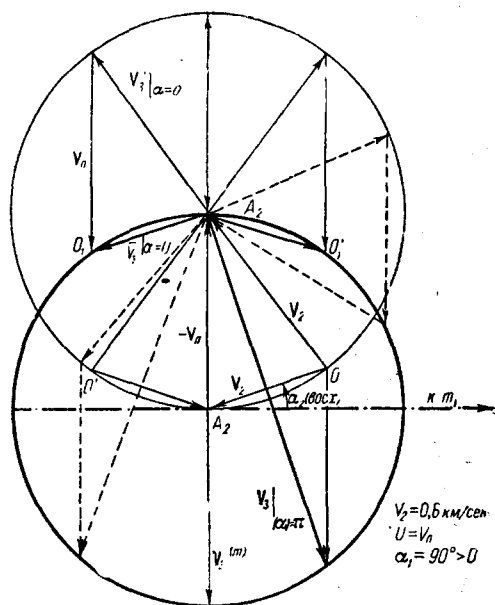


Рис. 17. План выходных скоростей в случае, когда входная селеноцентрическая скорость V'_2 по величине равна скорости Луны V_L . Движение вне сферы действия оказывается возможным лишь по одну сторону от направления выходного геоцентрического радиуса $m_1 A_2$.

Заметим лишь, что указанный запретный участок с уменьшением V_1 расширяется, покрывая весь план, за исключением вектора $V_3|_{\alpha=0}$, отвечающего тривиальному решению ($V_3|_{\alpha=0} = A'_2 O'_1$ для нисходящих ветвей; см. рис. 14 и 17), и что при $U < V_n$ возможны только движения в одну сторону от выходного геоцентрического радиуса r_3 , а не в обе, как ранее (рис. 17).

При начальных скоростях, близких к минимальным, входные геоцентрические скорости V_2 малы, и движение происходит примерно так же, как если бы сфера действия налетала на покоящуюся в пространстве ракету.

Рассмотрение движения после выхода из сферы действия аналогично рассмотрению на участке, который предшествовал сближению, и здесь проводиться не будет.

§ 7. ЗАДАЧА О ПОПАДАНИИ В ЛУНУ

В задаче о попадании в Луну не требуется знать поведения решений после сближения с Луной, и классификация их очень проста. Пусть

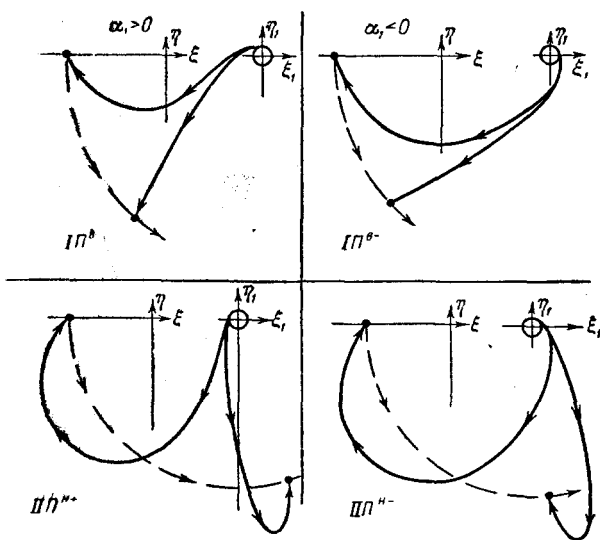


Рис. 18. Классы попадающих траекторий: I — попадание на восходящей ветви траектории, II — на нисходящей ветви.

По знаку направления обхода Земли, т. е. по знаку α_1 , каждый класс можно разделить на два подкласса:

$$П^в \text{ на } П^в+ \text{ и } П^в-; \quad П^н \text{ на } П^н+ \text{ и } П^н-.$$

При этом траектория, разделяющая классы, является чисто радиальной по отношению к Земле. При монотонном изменении угла α_1 в интервале $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < +\frac{\pi}{2}$ траектория монотонно изменяется внутри одного и того же класса между крайними его траекториями.

Проследим эволюцию решений с уменьшением начальной скорости. При гиперболических начальных скоростях, очевидно, существуют только решения класса $П^в$. При переходе скорости через параболическую появ-

заданы начальные геоцентрические радиус r_1 , скорость V_1 и угол α_1 скорости с радиусом, а угол λ радиуса с осью ξ (рис. 6) подбирается из условия попадания в Луну.

Очевидно, при эллиптических начальных скоростях сближение снаряда с Луной возможно как на восходящей (в), так и на нисходящей (н) ветви его траектории. Соответственно имеем два класса попаданий $П^в$ и $П^н$. Крайние траектории каждого из классов, т. е. траектории,

отвечающие $\alpha_1 = +\frac{\pi}{2}$ и

$\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$, схематически

представлены на рис. 18.

ляются нисходящие ветви, и сразу для всех α_1 появляются решения класса II^a . С убыванием скорости решения обоих классов, отвечающие одному и тому же углу α_1 , сближаются. Наконец, при переходе начальной скорости через минимальное значение $V_{1\min}(|\alpha_1|)$ соответствующие решения каждого из классов сливаются и исчезают. Сначала исчезают решения с $|\alpha_1| = \frac{\pi}{2}$, так что при $|\alpha_1| = \frac{\pi}{2}$ попадание в центр Луны становится невозможным, хотя существуют углы $|\alpha_1| < \frac{\pi}{2}$, для которых оно еще возможно.

Значение λ , отвечающее попаданию, как следует из § 3, можно приближенно находить совершенно без учета влияния Луны, по формулам

(3.7). Для этого предварительно по формулам теории конических сечений находится угол Φ между геоцентрическими радиусами начальной точки и точки встречи, а также время полета $T_{1,2}$ между этими точками. Функции $\Phi(V_1)$, $\lambda^+(V_1)$, $\lambda^0(V_1)$ и $\lambda^-(V_1)$ (представленные на рис. 19) и функция $T_{1,2}(V_1)$ (на рис. 11) вычислены для класса II^a при начальной высоте 200 км. Функция $\Phi(V_1)$ отвечает значению угла $\alpha_1 = +\frac{\pi}{2}$, а функции $\lambda^+(V_1)$, $\lambda^0(V_1)$ и $\lambda^-(V_1)$ отвечают соответственно значе-

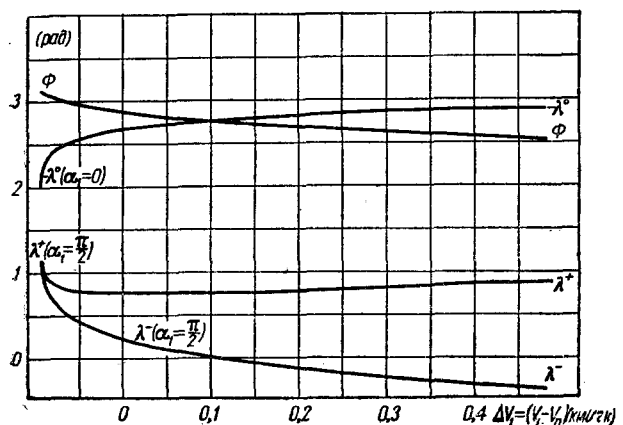


Рис. 19. Угол λ начального радиуса с направлением Луна — Земля, обеспечивающий попадание в Луну, как функция начальной скорости, в случае вертикального ($\alpha_1 = 0$) и горизонтального ($|\alpha_1| = 90^\circ$) направления стрельбы. Φ — угловая дальность.

чениям $\alpha_1 = +\frac{\pi}{2}$, 0, $-\frac{\pi}{2}$. При избытках начальной скорости над параболической 0,5 км/сек уже заметно стремление кривых к асимптотам.

Траектории класса II^a , отвечающие начальной высоте 200 км, углу $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ и рассчитанным выше приближенным значениям $\lambda^+(V_1)$, были найдены с учетом притяжения Луны с помощью численного интегрирования уравнений (3.2) на цифровой машине. Оказалось, что отклонение ρ_m траектории от центра Луны, возникающее вследствие неучета притяжения Луны при определении λ , очень быстро убывает с ростом начальной скорости от минимальной. Если при минимальных начальных скоростях получается промах ρ_m порядка десятков километров, то с приближением скорости к параболической становится $\rho_m < 1$ км.

Для получения представления о самих попадающих траекториях точности в десятки километров было бы достаточно; однако для выяснения влияния разброса начальных данных нужна будет точность попадания в центр Луны порядка километра.

Траектории, попадающие в центр Луны сколь угодно точно, можно получить методом итераций на значение $\rho_m = 0$ по аргументу λ . При этом можно показать, что сходимость будет более высокого порядка, если за функцию брать не ρ_m со знаком направления обхода Луны, а $\sqrt{\rho_m}$ с тем же знаком.

Этот итерационный процесс был запрограммирован для цифровой машины, что позволило провести массовый расчет попадающих траекторий. Результаты расчета траекторий класса Π^a для $\alpha_1 = +\frac{\pi}{2}$ представлены на рис. 20 в системе $O\xi\eta$, вращающейся вместе с направлением на Луну. Зависимости $T_{1,2}$, Φ и λ от начальной скорости, отвечающие этим траекториям, практически совпадают с приведенными на рис. 11 и 19.

Рассмотрим вопрос о потребных точностях начальных данных. Заметим, что если при определении влияния малых ошибок в начальных данных пренебрегать действием Луны, то промах ρ_m будет линейной

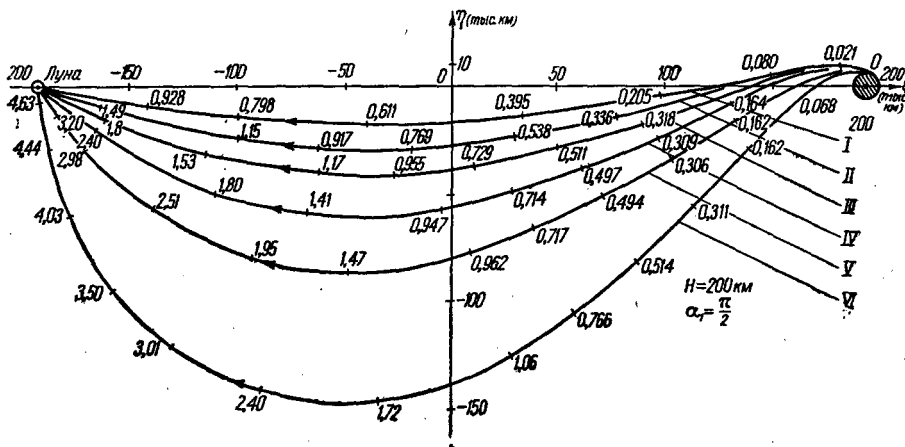


Рис. 20. Восходящие попадающие траектории во вращающихся координатах; $T_{1,2}$ — время полета.

	$\Delta V_1 \left(\frac{\text{км}}{\text{сек}} \right)$	$T_{1,2} \text{ (сутки)}$
I	+0,48251	1,08386
II	+0,106094	1,62688
III	0	2,06981
IV	-0,057828	2,64816
V	-0,082828	3,33284
VI	-0,092828	4,73092

ункцией ошибок. Если же учитывать влияние Луны в ее сфере действия, то линейной функцией ошибок будет d (расстояние от центра Луны линии действия вектора входной селеноцентрической скорости). А так как, согласно § 6, при малых d величина ρ_m пропорциональна d^2 , то при учете влияния Луны промах оказывается квадратичной функцией ошибок. Это значит, что реализовать достаточно точное попадание в Луну гораздо легче, чем обеспечить попадание в непритягивающую точку, движущуюся так же, как Луна.

Определение промахов $\rho_m = \rho_V, \rho_a, \dots$, отвечающих соответственно ошибкам $\delta V_1, \delta a_1, \dots$ с помощью приближенной методики (т. е. с учетом влияния Луны только в ее сфере действия) является довольно громоздким. Более точным и более легким оказывается определение отклонений ρ_m путем непосредственного вычисления на машине траекторий, близких к траектории достаточно точного попадания в центр Луны (номинальной).

Варьируя одно из номинальных начальных данных x_i на малую величину δx_i и вычисляя соответствующую траекторию, находим ее рас-

стояние от центра Луны $\rho_i \cong k_i (\delta x_i)^2$. Кривые $k_\alpha(V_1)$ и $k_V(V_1)$ представлены на рис. 21. Функция $k_\alpha(V_1)$ монотонно возрастает, а $k_V(V_1)$ монотонно убывает, проходя через ноль. Соответственно максимально допустимая ошибка в направлении $|\delta \alpha_1|_{R_d}$ (т. е. ошибка, отвечающая промаху, равному радиусу Луны $\rho_m = R_d$, при точной реализации остальных начальных данных) есть монотонно убывающая функция начальной

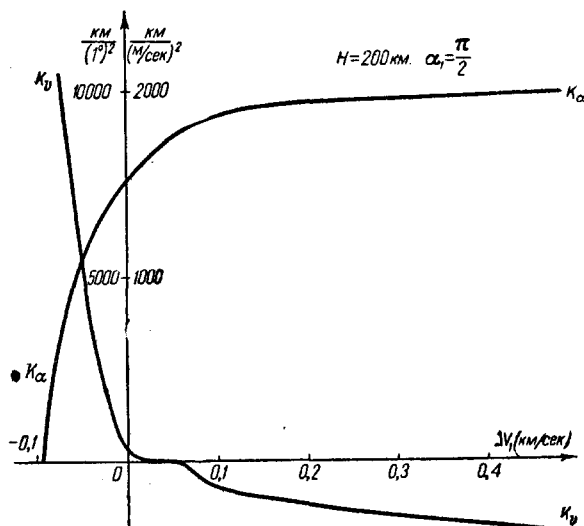


Рис. 21. Коэффициенты, определяющие отклонение траектории от центра Луны.

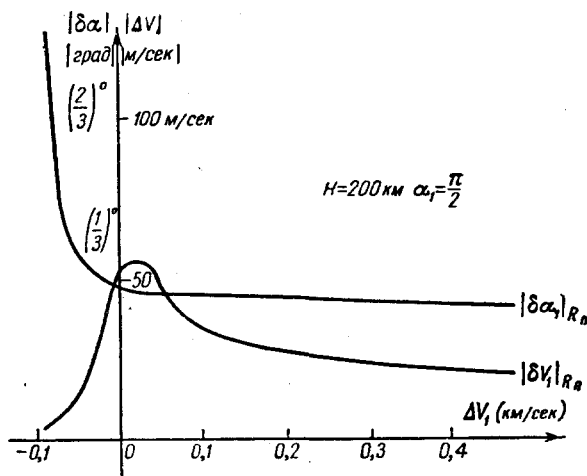


Рис. 22. Величина ошибки, отвечающей отклонению траектории до края Луны. Оптимальная величина начальной скорости зависит от располагаемых точностей.

скорости V_1 , а максимально допустимая ошибка в начальной скорости $|\delta V_1|_{R_d}$ имеет по V_1 максимум (рис. 22). Прохождение функции $k_V(V_1)$ через ноль объясняется тем, что при соответствующей начальной скорости для углов $\alpha_1 = +\frac{\pi}{2}$ смещение точки встречи за счет изменения кривизны траектории компенсируется смещением Луны за счет изменения времени полета снаряда до точки встречи.

Величина максимума функции $|\Delta V_1|_{R_d}$ на рис. 22 приближенно может быть найдена с помощью формулы $|\Delta V|_{R_d} = \sqrt[4]{\frac{R_d}{k_3}}$, вытекающей при $k_V = 0$ из соотношения $\rho_m = k_V (\Delta V_1)^2 + k_4 (\Delta V_1)^4 + \dots$ (на рис. 22 величина этого максимума нанесена приближенно).

Из рис. 22 видим, что, например, при скоростях, близких к параболическим, $|\delta \alpha_1|_{R_d} \cong 0^\circ, 3$, а $|\Delta V_1|_{R_d} \cong 50$ м/сек. Оптимальная начальная скорость, очевидно, зависит от соотношения располагаемых точностей. Видно также, что влияние разброса δV_1 особенно велико при

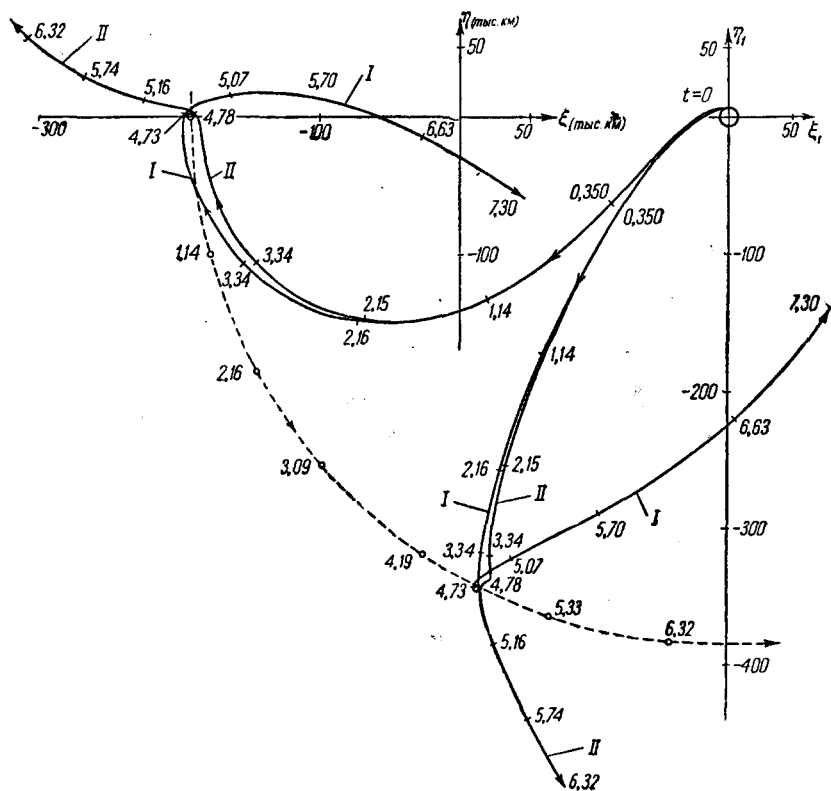


Рис. 23. Изменение характера попадающей траектории при ошибках в начальной скорости, близкой к минимальной. При $H = 200$ км, $\alpha_1 = 75^\circ$, $\Delta V_1 = 0,0919$ км/сек имеет место попадание. При $\Delta V = \Delta V_1 \pm 2$ м/сек нет попадания; знаку «+» отвечает I, знаку «-» отвечает II.

скоростях, близких к минимальным. Насколько сильно может изменить траекторию снаряда ошибка $\Delta V_1 = \pm 2$ м/сек при начальных скоростях, близких к минимальным, показывает рис. 23.

Заметим, что при угле $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ начальной скорости с радиусом вместо компенсации смещений траектории и Луны при ошибках в начальной скорости должно происходить сложение смещений. Вследствие этого максимально допустимые ошибки $|\delta V_1|_{R_d}$ при $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ должны быть значительно меньше, чем для $\alpha_1 = +\frac{\pi}{2}$.

Влияние ошибок δr_1 оказалось практически несущественным. Например, при ошибке $\delta r_1 = 50$ км для начальных скоростей $V_1 - V_n =$

$= -0,092328; 0$; и $+0,106094$ км/сек получились, соответственно, промахи $\rho_r = 56, 43$ и 140 км.

Ошибки $\delta\lambda$ связаны главным образом с ошибками в моменте старта. Максимально допустимые ошибки по углу λ — порядка одного градуса, поэтому время старта должно быть выдержано с точностью порядка минут.

Ошибки $\delta\zeta$ и $\dot{\delta\zeta}$ по нормали ζ к плоскости орбиты Луны, как можно показать, приведут соответственно к расстояниям $|d| \cong \frac{a|\zeta|}{r_1}$ и $|d| < \frac{a\dot{\zeta}}{4V_1}$. При $V_1 \cong V_n$ имеем $U^+ \cong 1,65$ км/сек, и из рис. 15 допустимые значения $|d| < 3000$ км.

Отсюда следует, что, во всяком случае, при $\delta\zeta < 50$ км или $\dot{\delta\zeta} < 50$ м/сек попадание еще будет иметь место.

Итак, допустимые ошибки при возмущении только одного из начальных данных будут по скорости около 50 м/сек, по ее направлению около $0,5^\circ$, по положению начальной точки около 50 км и по времени старта порядка минут. Можно показать, что порядок одновременно допустимых ошибок будет примерно такой же.

Не изменится этот порядок и с учетом возмущений от Солнца и других факторов, не учитываемых уравнениями (3.2). Действительно, возмущения малы и войдут в точные уравнения движения с малыми параметрами (в уравнениях (3.2) считавшимися нулями). Производные решений по начальным данным, которыми определяются потребные точности в рассматриваемом случае, как нетрудно видеть, от малых параметров будут зависеть непрерывно. Значит, эти производные и потребные точности будут того же порядка, что и при нулевых значениях малых параметров.

Заметим, что влияние разброса при попадании в Луну на нисходящих ветвях оказывается в 2—5 раз больше, чем при попадании на восходящих ветвях траектории.

Из полученных результатов следует, что влияние разброса начальных данных на реальные траектории попадания в Луну сравнительно невелико, так что осуществление попадания в Луну, по-видимому, возможно без коррекции траектории на пассивном участке.

§ 8. ЗАДАЧА ОБ ОБЛЕТЕ ЛУНЫ

Еще Гохман¹⁴ указывал на возможность достаточно далекого облета Луны.

В работах^{4,5} показывается возможность облета Луны по симметричным траекториям. Однако представляет интерес исследовать все возможные плоские траектории близкого облета Луны, т. е. все облетные траектории сближения, а также выяснить потребные для их реализации точности начальных данных. Для получения облетных траекторий сближения решим более общую задачу — найти те траектории сближения, которые возвращаются в заданную окрестность Земли, именно в сферу заданного радиуса $r_k \ll a$, где a — расстояние до Луны. Эту задачу можно назвать задачей о возвращении.

Множество плоских решений рассматриваемой задачи является четырехпараметрическим. Множество траекторий возвращения, касающихся геоцентрической окружности заданного радиуса $r_k \ll a$, является трехпараметрическим. Множество симметричных траекторий возвращения является двухпараметрическим. Используя обратимость движения, нетрудно показать, что симметричные траектории должны пересекать пря-

мую Земля — Луна (ось симметрии) под прямым углом. Поэтому они полностью характеризуются удалением точки пересечения от центра Луны и скоростью в этой точке. Это обстоятельство использовалось в работах ^{4,5} для численного отыскания симметричных траекторий.

Перейдем к анализу сформулированной выше задачи о возвращении.

Так же как в задаче о попадании, номинальными были траектории, проходящие через центр Луны, в задаче о возвращении номинальными являются траектории, проходящие через центр Земли.

Очевидно, номинальные траектории характерны тем, что после выхода из сферы действия они имеют нулевую геоцентрическую константу площадей σ_k .

Заметим, что малым углом φ_3 между выходным геоцентрическим радиусом (рис. 9, а) и направлением Земля—Луна можно пренебречь, поскольку оказывается, что учет этого угла не имеет принципиального значения. Тогда очевидно, что траекториям возвращения могут отвечать

на плане скоростей (рис. 14) лишь два вектора выходной геоцентрической скорости V_3 , параллельных прямой $A_2 m_1$ (рис. 24 и 26). Один из них $V_{3в}$ отвечает восходящему движению после сближения, а другой $V_{3н}$ — нисходящему, каково бы ни было движение до сближения. Восходящее движение, в отличие от нисходящего, лишь тогда может быть решением задачи, когда $V_3 < V_n(a)$, где $V_n(a) = 1,44$ км/сек — геоцентрическая параболическая скорость на удалении орбиты Луны.

Принимая последнее условие, рассмотрим сперва сближение на восходящей ветви, отвечающей положительному углу α_1 начальной скорости с радиусом.

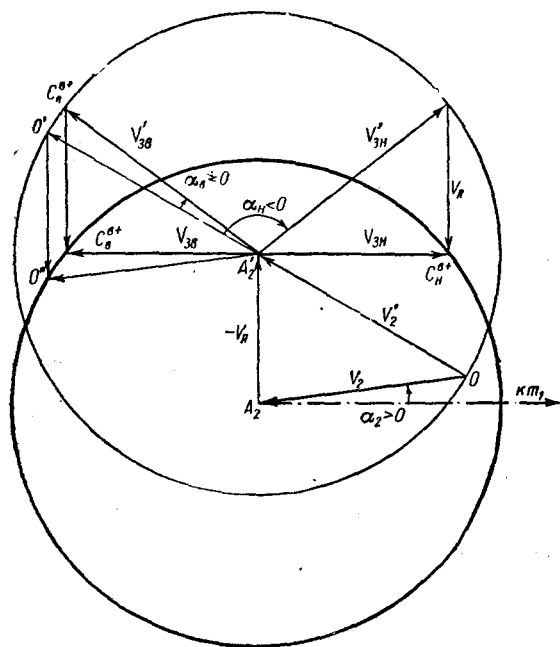


Рис. 24. Векторы плана скоростей для случая возвращения траектории к центру Земли при положительной начальной секториальной скорости.

Видим, что выходные селеноцентрические скорости $V'_{3в}$ и $V'_{3н}$ образуют со входной селеноцентрической скоростью V'_2 углы $\alpha_v < 0$ и $\alpha_n > 0$ (рис. 24). Следовательно, центр Луны обходит соответствующими траекториями по часовой стрелке, так что имеют место облеты. Назовем эти траектории соответственно $C_v^{в+}$ и $C_n^{в+}$. Здесь знак есть $\text{sign } \alpha_1$ (знак начальной секториальной скорости α_1), верхняя буква характеризует тип ветви до сближения, а нижняя — после сближения. Решение $C_n^{в+}$ подходит гораздо ближе к центру Луны, чем $C_v^{в+}$, так как $|\alpha_n| \gg |\alpha_v|$. Времена полета до сближения для обоих решений, очевидно, должны быть примерно такие же, как и для попаданий, отвечающих тем же начальным скоростям. Во время сближения геоцентрическая секториальная скорость

должна изменяться от значения α_1 до нуля. Геоцентрическое движение после сближения является чисто радиальным. Рассматриваемые решения представлены схематически на рис. 25.

В случае $\alpha_1 < 0$ (рис. 26) по-прежнему угол $\alpha_n < 0$ и отвечает облету типа C_n^{b-} (рис. 25). Однако угол $\alpha_n > 0$, так что центр Луны обходитсся против часовой стрелки, и облета нет. Назовем такие траектории сближения долетными. Если обозначать их буквой D , то последнее решение обозначится D_n^{b-} (рис. 27).

Рассмотрим, наконец, сближение на нисходящей ветви. Соответствующие планы скоростей согласно § 6 симметричны относительно прямой $A_2 A'_2$ планам, изображенным на рис. 24 и 26, и аналогично предыдущему можно получить четыре решения: для $\alpha_1 > 0$ решения D_n^{n+} и D_n^{n-} (рис. 27); для $\alpha_1 < 0$ решения D_n^{n-} (рис. 27) и C_n^{n-} (рис. 25). Из анализа рис. 24—26 видно, что по последствиям сближения облетные решения (рис. 25) делятся на два класса:

I. Сближение тесное, тип ветви после него изменяется на противоположный (класс C_n^{b+});

II. Сближение слабое, тип ветви после него не меняется. Этот класс, в отличие от I, делится на два подкласса C_n^{b+} и C_n^{n-} , не переходящие один в другой при непрерывном изменении α_1 и фиксированной начальной скорости. Аналогично делятся на два класса и долетные решения: I D_n^{n-} ; II D_n^{n-} и D_n^{n+} (рис. 27). При $\alpha_1 \rightarrow 0$ облетные и долетные номинальные решения вторых классов вырождаются в тривиальные, т. е. не отвечающие входу в сферу действия Луны (сближению).

Заметим, что полученная система номинальных облетных и долетных траекторий сближения является полной.

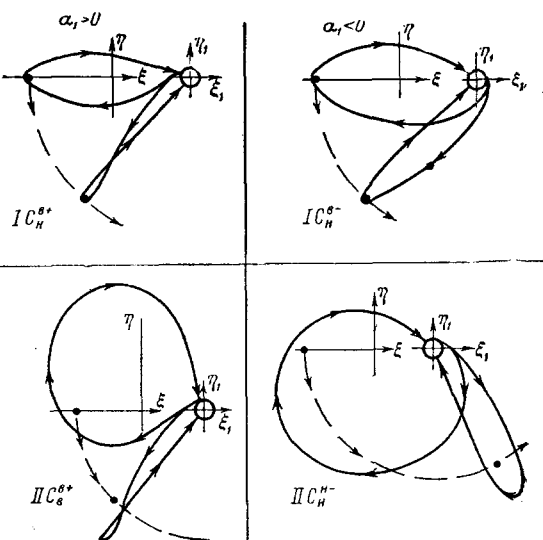


Рис. 25. Классы облетных номинальных траекторий. Видно уменьшение секторальной скорости под действием Луны до нуля.

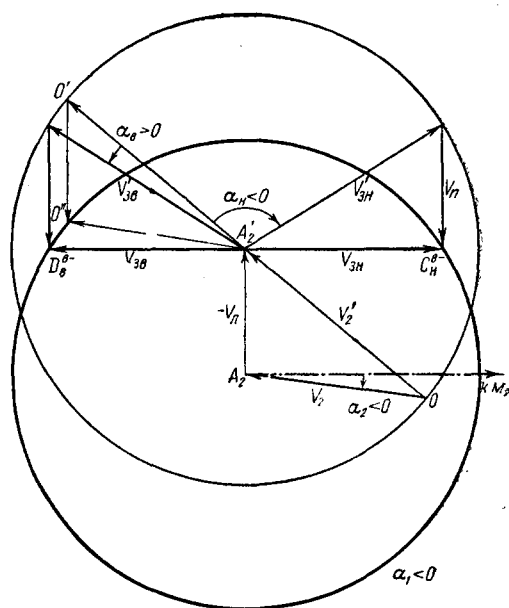


Рис. 26. Векторы плана скоростей, отвечающие траекториям возвращения к центру Земли при отрицательной начальной секторальной скорости.

Номинальные траектории, как и в задаче о попаданиях, находятся методом итераций по какому-либо начальному данному, как аргументу, на значение функции $y=0$. При этом $y = \sqrt{r_m} \operatorname{sign} \sigma_k$, где r_m — расстояние ветви возвращения от центра Земли. Этим методом с помощью численного интегрирования и были вычислены на машине облетные траектории всех подклассов и некоторые долетные, что подтвердило пра-

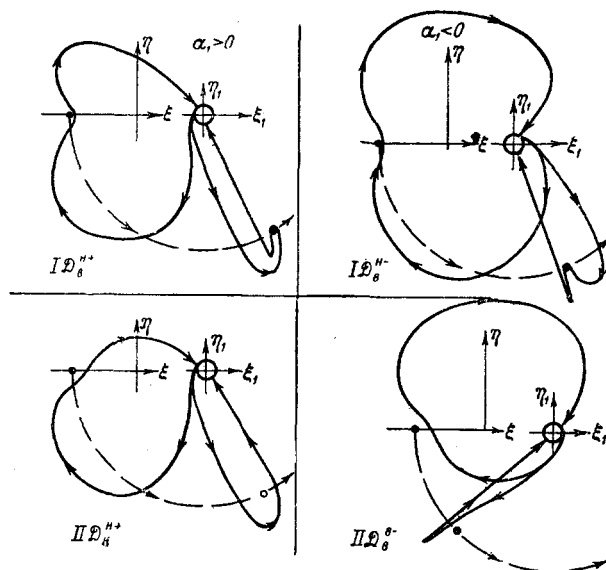


Рис. 27. Классы долетных номинальных траекторий. Видна аналогия с облетными классами.

вильность приближенной методики. Итерации велись по аргументу λ при фиксированных начальных данных $r_1 = 6571$ км, $\Delta V_1 = -0,07228$ км/сек и $\alpha_1 = \pm \frac{\pi}{2}$, где ΔV_1 есть избыток начальной скорости и над параболической. Оказалось, что классу C_n^b отвечают времена полета $T_{1,k} = 5 \div 10$ суток, классу D_n^b — $15 \div 20$ суток, а остальным — промежуточные.

Рассмотрим эволюцию номинальных решений с убыванием начальной скорости V_1 . При достаточно больших скоростях существуют только решения класса C_n^b . При $\Delta V_1 = 0,017$ км/сек появляется решение C_n^{b+} ; при $\Delta V_1 < 0$ — решения D_n^{n+} , D_n^{b+} и C_n^{n-} . Наконец, при $\Delta V_1 = -0,017$ км/сек появляются решения D_n^{n-} и D_n^{b-} . С дальнейшим убыванием начальной скорости происходит попарное сближение, а затем слияние и исчезновение решений: сперва исчезают решения C_n^{b+} и C_n^{b-} , затем — D_n^{n+} и D_n^{n-} , затем — C_n^{n+} и C_n^{n-} . Последними исчезают решения D_n^{b+} и D_n^{b-} . При меньших начальных скоростях уже невозможно получить $\sigma_k = 0$, хотя траектории еще могут достигать сферы действия.

Решения вторых классов при всех начальных скоростях проходят вне диска Луны, а решения первых классов — лишь при начальных скоростях, близких к минимальным.

Рассмотрим вопрос о влиянии разброса начальных данных. Поскольку для номинальных траекторий, в отличие от других, величина расстояния от центра Земли r_m является квадратичной, а не линейной функци-

ей малых ошибок, они выгоднее близких к ним траекторий по потребной точности реализации начальных данных.

Как и в задаче о попадании, в задаче об облете определяющим является влияние разброса по начальной скорости V_1 и ее углу с радиусом α_1 .

Влияние разброса в рассматриваемой задаче зависит не только от характера прохождения траектории относительно Земли, но и от расстояния ρ_m траектории от центра Луны. С убыванием ρ_m влияние ошибок быстро растет. Поэтому для первых классов оно сильнее, чем для вторых, причем ошибки в сторону уменьшения расстояния ρ_m влияют сильнее, чем в сторону его увеличения. Например, для облета типа C_v^+ при

$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ и $\Delta V_1 = -0,07228$ имеем $\rho_m = 12900$ км. При ошибках $\delta V_1 = -1$ м/сек и $\delta \alpha_1 = -0,01$ рад., а также $\delta V_1 = +10$ м/сек и $\delta \alpha_1 = +0,1$ рад. траектории еще возвращаются на Землю. Однако при ошибках $\delta V_1 = -10$ м/сек и $\delta \alpha_1 = -0,1$ рад. траектории либо соударяются с Луной, либо обходят Луну против часовой стрелки, так что облета нет. Осуществление рассмотренного и более близких облетов с возвращением на Землю без коррекции на пассивном участке вряд ли возможно.

С увеличением минимального расстояния траектории от Луны требования по точности быстро снижаются.

Для тривиальных решений (проходящих от Луны на расстояниях $\rho_m \sim \rho_*$), т. е. достаточно далеких, типа облета Гохмана, влияние разброса сравнительно невелико, и потребные для возвращения на Землю точности оказываются не выше, чем для попадания в Луну при тех же начальных скоростях. Осуществление такого облета без коррекции на пассивном участке, по-видимому, технически реально.

§ 9. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОБЛЕТЕ ЛУНЫ

Под специальной задачей об облете Луны понимается задача отыскания облетов, при которых снаряд возвращается в атмосферу Земли полого. Такие облеты наиболее интересны, так как отвечают наиболее легким условиям входа в атмосферу. Очевидно, для этих облетов минимальный геоцентрический радиус на участке возвращения r_m должен быть равен радиусу верхних слоев атмосферы R .

Можно показать, что при начальных скоростях $V_1 < V_n + 0,5$ км/сек траектории сближения с $r_m = R$ в точке выхода из сферы действия обладают свойством $|V_{3\tau}| \cong \frac{R}{r_3} V_n$, где $V_{3\tau}$ — нормальная к выходному радиусу r_3 компонента выходной геоцентрической скорости V_3 (рис. 9), а V_n — параболическая скорость для начальной высоты. Это свойство позволяет, как и в предыдущей задаче, с помощью плана скоростей найти все классы решений.

Оказывается, каждой паре подклассов решений предыдущей задачи в рассматриваемой задаче отвечают два класса решений, обходящие Луну в том же направлении, что и решения предыдущей задачи, а Землю — в разных. Но здесь классы не обязательно делить на подклассы, так как их решения изменяются непрерывно при переходе через ноль угла начальной скорости с радиусом α_1 . Поэтому их можно обозначать без указания знака вверх: C_{n+}^v и C_{n-}^v — для I облетного класса, и C_{v+}^n и C_{v-}^n — для II облетного класса. Аналогично имеем долетные типы решений D_{v+}^n , D_{v-}^n , D_{n+}^v и D_{n-}^v . Знак внизу указывает направление обхода Земли.

Когда угол α_1 прямой, вторые пары решений могут вырождаться в тривиальные (не отвечающие сближению с Луной). Эти решения суть эллипсы с фокусом в центре Земли, в перигее касающиеся верхних слоев атмосферы. Для среднего значения $\alpha_1 = 0$ облетные классы представлены на рис. 28. Геоцентрическая секториальная скорость в начале равна нулю, и решения начинаются радиально. Затем возмущения Луны увели-

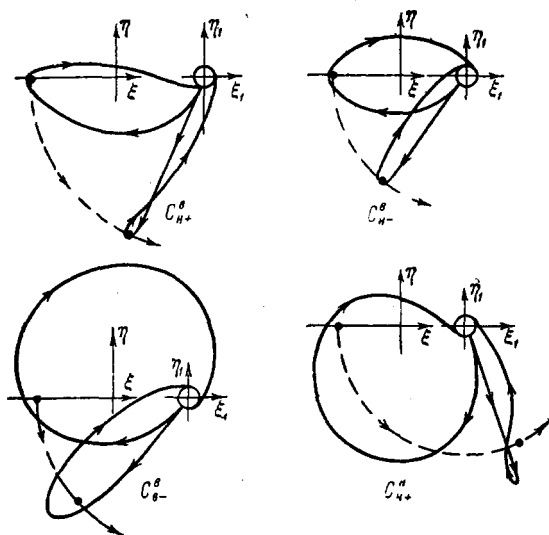


Рис. 28. Классы траекторий, возвращающихся в атмосферу Земли полого.

задачи о специальном возвращении, как можно заключить из рис. 28, могут содержаться лишь в классах C_{n+}^s, D_{n+}^s (отвечая $\alpha_1 = +\frac{\pi}{2}$) и C_{n-}^s, D_{n-}^s (отвечая $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$). Меняя независимо величину начального радиуса и начальной скорости, получим, согласно § 8, множество всех симметричных траекторий сближения (ср. ⁵).

Метод получения решений предыдущей задачи применим и к этой задаче, только итерации ведутся не на значение $y = r_m = 0$, а на значения $y = \pm \sqrt{R}$. Однако относительная малость толщины атмосферы приводит к гораздо более жестким требованиям по точностям начальных данных, чем в предыдущей задаче.

Например, для симметричного облета с избытком начальной скорости над параболической $\Delta V_1 = -0,083773$, начальным углом скорости с радиусом $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ и временем полета 823 600 сек. оказалось расстояние от Луны $r_m = 27\,000$ км. Даже такие малые ошибки в начальных данных, как $\delta V_1 = 0,2$ м/сек и $\delta \alpha_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ рад. вызывают при возвращении изменения высот соответственно 160 и 190 км, т. е. являются недопустимыми (изменения высот не должны превышать десятков километров).

Этот пример отвечает сравнительно большой величине r_m . Уменьшение r_m так же быстро увеличивает влияние ошибок, как и в предыдущей задаче.

Так как потребные точности реализации начальных данных чрезвы-

чивают величину секториальной скорости настолько, что ветвь возвращения касается верхних слоев атмосферы Земли.

Эволюция решений рассматриваемой задачи с изменением начальной скорости прослеживается аналогично эволюции решений соответствующих классов предыдущей задачи.

Заметим, что по формам все траектории сближения, возвращающиеся на Землю, промежуточны между соответствующими решениями рассматриваемой задачи с $\alpha_1 = +\frac{\pi}{2}$ и $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ и с теми же начальными радиусом и скоростью. Заметим также, что симметричные решения

чайно велики, практическое осуществление облета Луны по траектории сближения с пологим входом в атмосферу Земли без коррекции траектории на пассивном участке представляется мало реальным.

§ 10. ЗАДАЧА О ПЕРИОДИЧЕСКОМ ОБЛЕТЕ ЛУНЫ

В настоящем параграфе рассматривается вопрос о том, можно ли так запустить снаряд в плоскости лунной орбиты, чтобы он, периодически облетая Луну, возвращался к Земле и регулярно давал о Луне информацию, например, об обратной ее стороне. При этом интересны не любые периодические решения, а решения, проходящие близко от Луны. Мы, очевидно, решим поставленный вопрос, если найдем все плоские периодические траектории сближения. В литературе такая задача, по-видимому, не возникала.

Условимся считать конечной точкой периода точку, ближайшую к центру Земли. Легко видеть, что искомые траектории должны быть замкнутыми не в геоцентрических координатах $m_1\xi_1\eta_1$, а в координатах $0\xi\eta$, вращающихся вместе с прямой Земля—Луна (см. рис. 2). Тем не менее в конечной точке периода конечные геоцентрические величины скорости V_k , радиуса r_k и угла между ними $\alpha_k = \pm \frac{\pi}{2}$ соответственно должны совпадать с начальными V_1 , r_1 и α_1 .

Пользуясь этим, а также обратимостью движения, можно доказать, что искомые решения имеют ось симметрии в системах координат $0\xi\eta$ и $m_1\xi_1\eta_1$. Поэтому они могут принадлежать только к симметричным решениям предыдущей задачи, т. е. к решениям видов C_{n+}^a , D_{b+}^a с $\alpha_1 = +\frac{\pi}{2}$ и C_{n-}^a , D_{b-}^a с $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$. Можно доказать также, что периодические решения должны принадлежать к однопараметрическому семейству с параметром r_1 , и что они начинаются на оси ξ , т. е. отвечают $\lambda=0$ или $\lambda=\pi$, где λ — угол начального радиуса с направлением Луна — Земля.

Если Φ_1 — угол между геоцентрическими радиусами начальной точки и точки, ближайшей к Луне, то условие совпадения угла λ для начальной точки и конечной в системе $0\xi\eta$, как нетрудно понять, сводится к условию, налагаемому на угловые перемещения снаряда и Луны за период $T_{1,k}$ и имеющему вид

$$2\Phi_1 - \omega T_{1,k} = \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10.1)$$

Так как вследствие малости сферы действия $\Phi_1 \cong \Phi$, где Φ — угол между геоцентрическими радиусами $r=r_1$ и $r=a$ конического сечения, к которому принадлежит начальный участок траектории, то приближенно имеем:

$$2\Phi - \omega T_{1,k} = \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10.2)$$

С помощью условия (10.2) можно найти все периодические траектории сближения. Оказывается, периодический облет типа C_{n+}^a невозможен, а к типу C_{n-}^a относится лишь одно семейство периодических решений, отвечающее $2\Phi - \omega T_{1,k} = -2\pi$. Решения этого семейства обходят Землю и Луну по часовой стрелке, т. е. отвечают $\Phi < 0$ (рис. 29).

Долевные периодические решения возможны обоих типов $D_{в+}^n$ и $D_{в-}^n$, причем к типу $D_{в+}^n$ относятся два счетных множества семейств, отвечающих условию $2\Phi - \omega T_{1,k} = -2k\pi$ и соответственно $\lambda = \pi$, $k \geq 0$ и $\lambda = 0$, $k \geq 1$, а к типу $D_{в-}^n$ относятся аналогичные два множества, отвечающие условию $2\Phi - \omega T_{1,k} = -2l\pi$ и соответственно $\lambda = \pi$, $l \geq 2$ и $\lambda = 0$, $l \geq 3$.

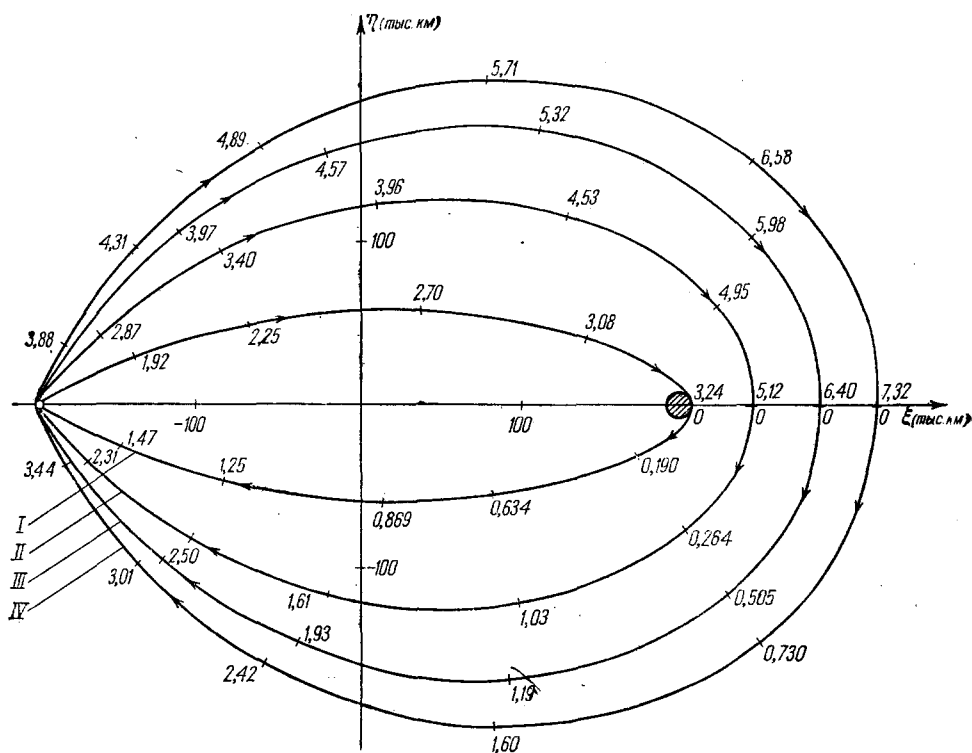


Рис. 29. Траектории периодического облета Земли и Луны. Траектории, проходящие над поверхностью Луны, удалены от Земли на расстояние 100 000 км и более.

N	r_m (км)	$V_0 \left(\frac{\text{км}}{\text{сек}} \right)$	r_m (км)
I	6 571	11,1242	150
II	42 203	4,4008	825
III	82 824	3,1833	1500
IV	116 371	2,7410	2000

Решения типа $D_{в+}^n$ обходят Землю и Луну против часовой стрелки, отвечая $\Phi > 0$. При этом Луна за полпериода проходит несколько более $0,5; 1,5; \dots, k + 0,5; \dots$ оборотов для первого счетного множества семейств ($\lambda = \pi$) и несколько более $1, 2, \dots, k, \dots$ оборотов для второго счетного множества ($\lambda = 0$).

Решения рассматриваемого типа с $\lambda = \pi$ для $k = 0,1$ схематически представлены на рис. 30 и 31, а решение с $\lambda = 0$ для $k = 1$ — на рис. 32.

Решения типа $D_{в-}^n$ обходят Землю по часовой стрелке, а Луну — против и отвечают $\Phi < 0$. При этом Луна за полпериода проходит несколько

ко менее $0,5; 1,5; \dots; l-2 + \frac{1}{2}; \dots$ оборотов для счетного множества семейств с $\lambda = \pi$ и несколько менее $1; 2; \dots, l-2, \dots$ оборотов для счетного множества с $\lambda = 0$. Рассматриваемые решения с $\lambda = \pi$ для $l = 2, 3$ схематически представлены на рис. 33 и 34, а с $\lambda = 0$ для $l = 3$ — на рис. 35.

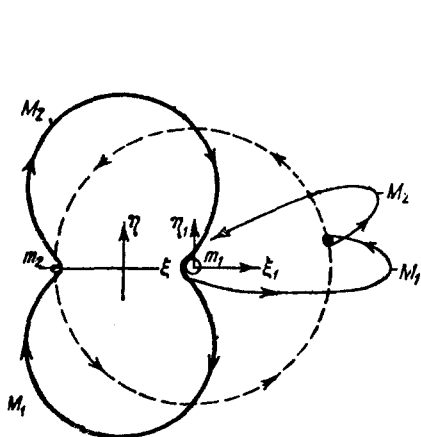


Рис. 30. Простейшая периодическая долетная траектория подкласса D_+ (обход Земли положителен, $k=0, \lambda=\pi$), период несколько более полумесяца.

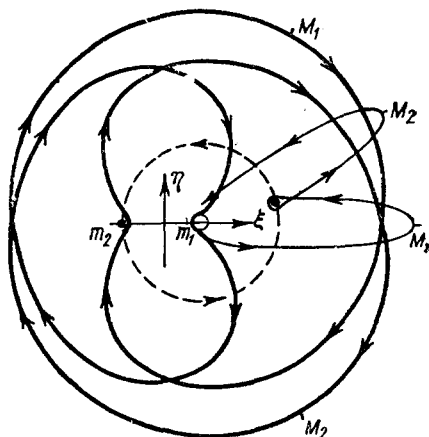


Рис. 31. Долетная периодическая траектория подкласса D'_{+1} ($k=1, \lambda=\pi$). Период несколько превышает 1,5 месяца.

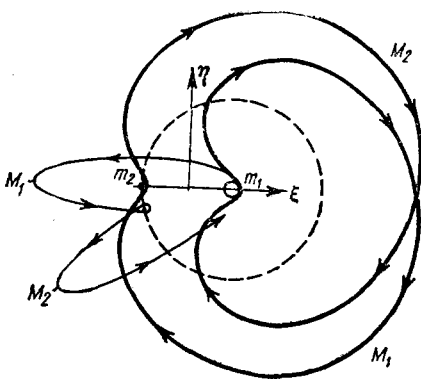


Рис. 32. Долетная периодическая траектория подкласса D'_{+1} ($k=1, \lambda=\pi$). Период несколько более месяца.

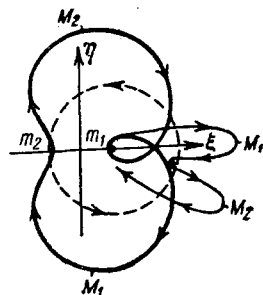


Рис. 33. Простейшая периодическая долетная траектория подкласса D_- (обход Земли отрицателен, $l=2, \lambda=\pi$). Период несколько менее полумесяца.

Между решениями типов $D_{в+}^n$ и $D_{в-}^n$ с одинаковыми λ можно установить взаимно однозначное соответствие, положив $l = k + 2$. Тогда не трудно видеть, что при уменьшении параметра r_1 до нуля соответствующие решения приходят к одному и тому же решению, т. е. к совпадению. Эти предельные решения для $\lambda = \pi$ и $k = 0, 1$ (т. е. $l = 2, 3$) представлены на рис. 36 и 37, а для $\lambda = 0$ и $k = 1$ ($l = 3$) — на рис. 38. Предельные решения отвечают угловым перемещениям Луны за полпериода, в точности равным $0,5; 1,5; \dots; k + \frac{1}{2}; \dots$ и $1, 2, 3, \dots, k, \dots$ оборотов соответственно.

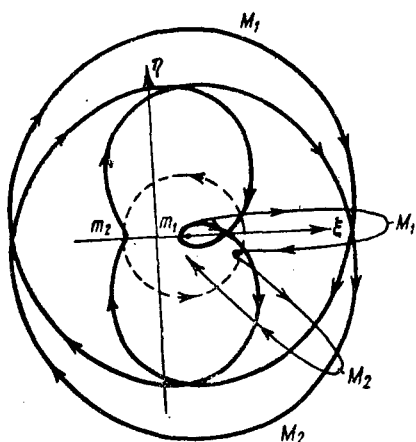


Рис. 34. Долетная периодическая траектория подкласса D_{1-} ($l=3$, $\lambda=\pi$). Период несколько менее 1,5 месяца.

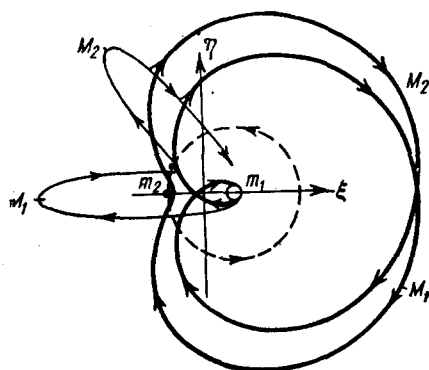


Рис. 35. Долетная периодическая траектория подкласса D'_{1-} ($l=3$, $\lambda=0$). Период несколько менее месяца.

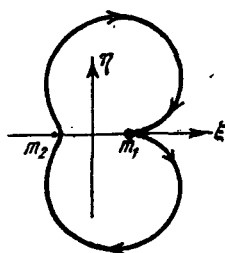


Рис. 36. Простейшая периодическая долетная траектория выбрасывания класса D , разделяющая подклассы D_+ и D_- (рис. 30 и 33). Период 0,5 месяца.

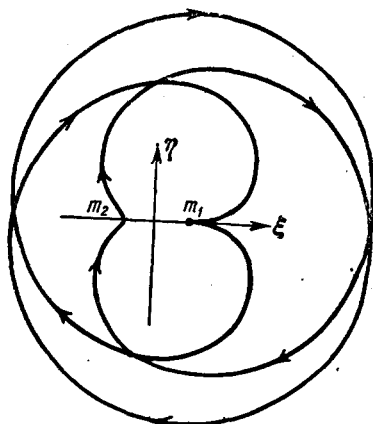


Рис. 37. Периодическая долетная траектория выбрасывания класса D_1 , разделяющая подклассы D_{1+} и D_{1-} (рис. 31 и 34). Период 1,5 месяца.

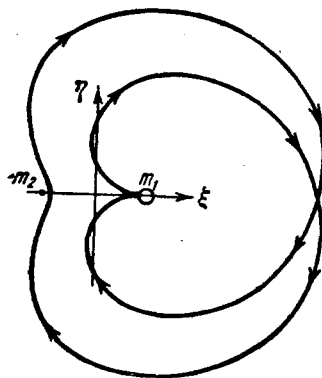


Рис. 38. Периодическая долетная траектория выбрасывания класса D'_1 , разделяющая подклассы D'_{1+} и D'_{1-} (рис. 32 и 35). Период 1 месяц.

Таким образом, на самом деле имеется не четыре, а два счетных множества долетных периодических семейств соответственно с $\lambda = 0$ и $\lambda = \pi$. Обозначим семейство, отвечающее $k = 0$ и $\lambda = \pi$, буквой D , а семейства, отвечающие $k > 0$ и $\lambda = \pi$, 0 , — буквами D_k и D'_k соответственно. Эти обозначения и приведены в подписях к рис. 30 — 38.

Сравнивая полученные результаты с известными результатами работ Стрёмгрена и Копенгагенской школы¹⁵, полученными для случая равенства масс притягивающих тел $m_1 = m_2$, можно заметить что облетному семейству (обозначим его буквой D) отвечает класс « m » Стрёмгрена, а семействам D , D_k — его класс «с». Семействам D'_k нет аналогов у Стрёмгрена, и, наоборот, у него приведены периодические орбиты (класс « k », найденный Лоусом¹⁶), не имеющие аналогов в нашем случае, хотя и являющиеся при $m_1 = m_2$ траекториями сближения. Так как система C , D , D_k , D'_k периодических траекторий сближения, согласно способу ее получения, является полной для соотношения масс Земли и Луны $\frac{m_1}{m_2} = 81,45$, то выходит, что при $m_1 = m_2$ могут существовать периодические решения, исчезающие при увеличении $\frac{m_1}{m_2}$ до 81,45.

Заметим, что траектории D_k , D'_k не являются простейшими, т. е. делающими за период в системе $O\xi\eta$ не более одного обращения. В случае Земли и Луны семейства простейших периодических траекторий сближения являются только C и D .

Рассмотрим семейство C , как единственное облетное. Оказывается, его решение, касающееся атмосферы, проходит внутри Луны (рис. 29), а решения, проходящие над поверхностью Луны, удалены от центра Земли более чем на 94 800 км. Все решения на рис. 29 найдены методом, аналогичным методу Стрёмгрена, в системе $O\xi\eta$, и V_0 — скорость в этой системе. Решения эти оказались неустойчивыми. Например, решение с расстояниями от центра Земли $r_m = 82\,800$ км и от центра Луны $\rho_m = 1500$ км при ошибке $\delta V_0 = 0,001$ м/сек уходит в бесконечность уже с четвертого оборота (рис. 39). Так что практически периодический облет Луны на близком расстоянии невозможен.

Заметим, что если бы для периодического решения в интеграле Якоби (2.1) было $h < h_2$, решение, согласно § 2, не могло бы уйти в бесконечность. Однако для того, чтобы оно могло проходить от Земли к Луне, должно быть $h > h_1$. Для траекторий сближения, в том числе периодических, согласно § 3, $h > h_2$. Следовательно, периодические решения, удовлетворяющие условию $h_1 < h < h_2$, если они существуют, должны проходить достаточно далеко от Земли. Поскольку разность $h_2 - h_1$ ничтожна, такие решения, даже если они существуют, не могут

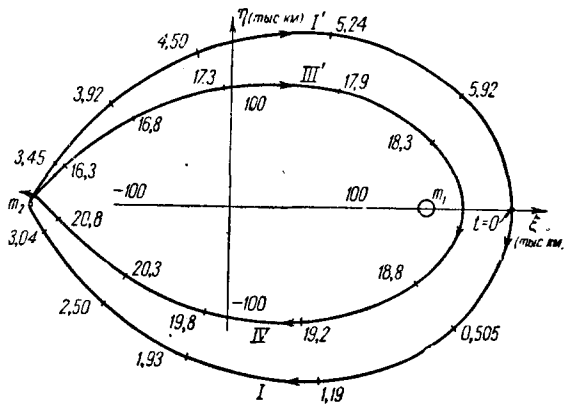


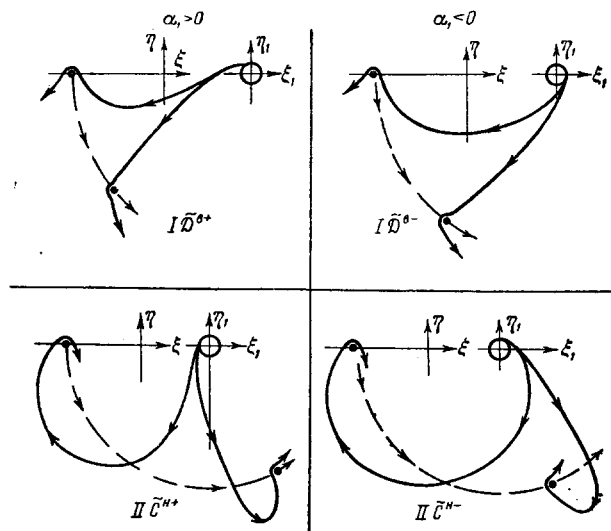
Рис. 39. Уход в бесконечность с почти периодической орбиты. Орбиты I и III располагаются между изображениями. $H = 76\,253$ км, $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\Delta V_0 = 0,085058$ км/сек, $\delta V_0 < 0,001$ м/сек, $I - I'$ — первый оборот, III' — окончание III оборота, IV — четвертый оборот.

иметь практического значения — не только из-за разброса начальных данных, затрудняющего попадание в диапазон $h_1 < h < h_2$, но и потому, что неучитывавшиеся возмущения Солнца и другие могут легко вывести h из диапазона $h_1 < h < h_2$.

§ 11. ЗАДАЧА О РАЗГОНЕ ИЛИ ТОРМОЖЕНИИ ПОЛЕТА С ПОМОЩЬЮ ЛУНЫ. КЛАССИФИКАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ

Рассмотрим задачу о максимальном разгоне космической ракеты с помощью Луны без использования силы тяги двигателя. Из плана скоростей (см. рис. 14) видно, что максимальная выходная геоцентрическая скорость после сближения $U_3^M = U + V_L$, где U — величина выходной селеноцентрической скорости, а V_L — скорость Луны; однако можно показать, что соответствующая траектория сближения при любых начальных данных должна проходить внутри Луны.

Оказывается, практически осуществимая траектория, отвечающая наибольшему разгону $\Delta V_{2,3} = V_3 - V_2$ (где V_2 — входная геоцентрическая скорость), должна проходить у поверхности Луны, обходя ее по часовой стрелке при сближении на нисходящей ветви (класс $\tilde{C}^H$) и против часовой стрелки — при сближении на восходящей ветви (класс $\tilde{D}^B$). Классу $\tilde{D}^B$ отвечают большие из пунктирных векторов V_3 на рис. 14 и 17. При отыскании разгонных решений итерации велись для функции $y = \sqrt{\rho_m}$ со знаком направления обхода Луны на значение $+\sqrt{R_L}$ для решения $\tilde{D}^B$ и на $-\sqrt{R_L}$ для решений $\tilde{C}^H$. Здесь ρ_m — расстояние траектории от центра Луны, $R_L = 1736,7$ км — радиус Луны. Были найдены крайние



Вис. 40. Классы траекторий максимального разгона с помощью Луны. Видна аналогия с классами попадающих траекторий (рис. 18).

решения каждого из классов, т. е. решения с $\alpha_1 = +\frac{\pi}{2}$ и решения с $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$. Они схематически представлены на рис. 40 в геоцентрических (ξ_1, η_1) и вращающихся (ξ, η) координатах. По знаку угла α_1 , т. е.

по направлению обхода Земли, каждый класс можно разделить на два подкласса

$$\tilde{D}^{\text{в}} \text{ на } \tilde{D}^{\text{в}+} \text{ и } \tilde{D}^{\text{в}-}; \tilde{C}^{\text{н}} \text{ на } \tilde{C}^{\text{н}+} \text{ и } \tilde{C}^{\text{н}-}.$$

Разгонные решения обгибают Луну таким образом, чтобы выходить из сферы действия по направлению, возможно более близкому к направлению скорости Луны.

Получающаяся после разгона величина выходной геоцентрической скорости V_3 всегда является гиперболической, независимо от начальной скорости V_1 , так что снаряд после сближения с Луной уходит в бесконечность. Однако величина разгона $\Delta V_{2,3}$ зависит от V_1 ; она максимальная (порядка 1,5 км/сек) при скоростях V_1 , близких к минимальным, и с ростом V_1 монотонно убывает (до нуля при $V_1 \rightarrow \infty$). Максимальную скорость благодаря месячному вращению Луны можно получить любого направления в плоскости орбиты Луны. Так как эта плоскость составляет небольшие углы с плоскостями орбит планет, разгон без затраты топлива можно использовать для межпланетного полета.

Переходя к рассмотрению влияния разброса начальных данных на разгонные решения, заметим, что оно выше, чем для падающих решений, так как промах $\delta \rho_m$ является не квадратичной, а линейной функцией ошибок. Например, для разгона $\tilde{D}^{\text{в}+}$ с начальной скоростью, меньшей параболической на 0,0723 км/сек и $\alpha_1 = 90^\circ$ ошибки $\delta V_1 = 1$ км/сек и $\delta \alpha_1 = 1^\circ$ вызывают соответственно изменения $(\delta \rho_m)_v = 120$ км и $(\delta \rho_m)_\alpha = 100$ км.

Из-за опасности соударения с Луной вследствие наличия ошибок в начальных данных расчетная траектория должна быть поднята над поверхностью Луны. Так как поднятие траектории над Луной уменьшает выигрыш в скорости, разгоны, достаточно близкие к максимальным, вряд ли удастся осуществить без коррекции траектории перед ее сближением с Луной.

Заметим, что решения с $\alpha_1 = +\frac{\pi}{2}$ выгоднее других разгонных решений в том отношении, что позволяют использовать при взлете компоненту суточного вращения Земли, лежащую в плоскости орбиты Луны (как, впрочем, и решения рассмотренных ранее задач, отвечающие углу $\alpha_1 = +\frac{\pi}{2}$).

Легко видеть, что решение задачи о любом разгоне вследствие обратимости движения после замены t на $-t$ всегда дает решение задачи о таком же торможении с помощью Луны, при движении по траектории, зеркально симметричной разгонной относительно оси ξ . При этом наиболее выгодной в смысле торможения оказывается траектория, получающаяся из наиболее выгодной разгонной, так как при входе в атмосферу она использует ее суточное вращение вместе с Землей, уменьшая скорость снаряда относительно поверхности Земли. Траектории максимального торможения могут быть использованы, например, при возвращении ракеты из межпланетного полета.

Как можно заключить из плана скоростей (рис. 14), кроме падающих и возвращающихся к Земле траекторий сближения с Луной, а также траекторий, отвечающих тому или иному разгону ракеты в результате сближения, могут существовать еще траектории, отвечающие большему или меньшему ее замедлению (относительно Земли), и других траекторий сближения не существует. Таким образом, план

скоростей позволяет дать полную классификацию плоских траекторий сближения.

Траекториям замедления на рис. 14 соответствуют выходные геоцентрические скорости, образующие со скоростью $-V_n$ угол, меньший чем входные скорости, отвечающие траекториям типа C_{n+}^B и D_{B+}^B , причем максимальному замедлению отвечает траектория, выходящая из сферы действия в направлении, обратном скорости Луны, независимо от условий входа.

Заметим, что, как видно из рис. 14, траектории максимального замедления отвечает максимальная геоцентрическая константа площадей σ_k и потому эта траектория проходит на наибольшем удалении от центра Земли по сравнению с близкими траекториями.

С помощью плана скоростей можно проследить эволюцию решений с изменением угла λ или другого начального данного в диапазоне, отвечающем сближению, однако мы на этом останавливаться не будем.

Резюмируя рассмотренные выше задачи, можно сделать следующие выводы. Высокие требования по точности начальных данных приводят к тому, что для реализации близкого облета Луны и особенно близкого облета с пологим входом в атмосферу Земли, коррекция пассивного участка представляется необходимой. Для траекторий попадания в Луну и траекторий далекого облета Луны требования по точности являются достаточно умеренными, вследствие чего полет по этим траекториям, по видимому, может быть осуществлен без коррекции на пассивном участке, как только ракетами будут достигнуты скорости порядка параболической.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Полученные результаты позволяют выбирать для каждой конкретной цели полета к Луне плоские траектории наиболее подходящих форм и свойств. Когда такой выбор сделан, с помощью изложенной методики могут быть найдены начальные данные и потребные точности их реализации. Эти начальные данные могут быть взяты в качестве первого приближения для точного определения расчетных начальных данных с учетом возмущения Солнца и других второстепенных факторов.

2. Соответствующие точные уравнения целесообразно интегрировать численно, на быстродействующих вычислительных машинах. При этом для численного определения расчетной траектории итерации можно вести с теми же функциями и аргументами и теми же методами, которые применялись для отыскания номинальных траекторий в изложенных задачах.

3. Полученные в настоящей работе решения конкретных задач должны представлять практический интерес даже в том случае, если их осуществление невозможно без коррекции траектории на пассивном участке (с помощью вспомогательного двигателя), так как очевидно, что они требуют минимальной коррекции по сравнению с другими решениями.

4. Можно показать, что примененная приближенная методика годится не только для отношения масс Луны и Земли ($m_2 : m_1 = 1 : 81,45$), но и для сколь угодно малых $m_2 : m_1$. Более того, при уменьшении $m_2 : m_1$ до нуля точность их неограниченно возрастает. Следовательно, она применима к движению снаряда в поле тяготения Солнца m_1 и одной внешней планеты m_2 . Траекториями сближения будут те, которые проходят через сферу действия m_2 по отношению к m_1 .

Поскольку орбиты планет наклонены к орбите Земли под малыми углами, изложенная методика применима для исследования траекторий межпланетного полета. Основная часть такой траектории будет проходить вне сферы действия Земли по отношению к Солнцу. Начальные

данные следует относить к границе сферы действия Земли. Тогда роль начального радиуса r_1 будет играть начальный гелиоцентрический радиус или, приближенно, радиус орбиты Земли, а роль радиуса орбиты Луны a — радиус орбиты планеты.

Влияние планет, отличных от m_2 , можно не учитывать, так как попадание в их сферы действия траектории сближения с m_2 мало вероятно.

Очевидно, для траекторий сближения имеют смысл плоские задачи о попадании в планету m_2 , о ее облете с возвращением к орбите Земли, о специальном облете (с касательным к орбите Земли возвращением), о разгоне с помощью m_2 , например, с целью полета к орбите более далекой планеты.

Если отношение $r_1 : a$ мало, как, например, для Нептуна, пригодна не только методика, но и многие результаты. В частности, теоретически возможные классы и формы траекторий полета к Нептуну с орбиты Земли, очевидно, будут те же, что и для траекторий полета с поверхности Земли или с ее спутника к Луне. Если же отношение $r_1 : a$ не мало (как, например, для Марса), необходимо рассмотрение, обобщающее проведенное в настоящей работе.

5. Изложенная в работе приближенная методика без особого труда обобщается на пространственное движение. При этом характерные участки, из которых состоит траектория, остаются прежними, хотя и располагаются в разных плоскостях. Полученные на каждом из участков закономерности сохраняются. Меняются только формулы пересчета в точках пересечения границы сферы действия траекторией.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Br. Thüring, Weltraumfahrt 3, № 4, 202 (1952).
2. Br. Thüring, Weltraumfahrt 5, № 3, 4, 69 и 103 (1954).
3. D. F. Lawden, Journ. of the British Interplanetary Society 13, № 6, 329 (1954) и 14, № 4, 204 (1955).
4. Г. А. Чеботарев, Бюллетень ИТА 6, № 7, 487 (1957).
5. М. С. Лисовская, Бюллетень ИТА 6, № 8, 550 (1957).
6. М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937.
7. G. W. Hill, Lunar Theory, The Amer. Journ. of Math., т. I, часть 23, 1877.
8. J. E. Rosental, The Amer. Journ. of Math. 53, 258 (1931).
9. M. Martin, The Amer. Journ. of Math. 53, 167 (1931).
10. А. А. Марков, Успехи астрономич. наук, вып. 3, стр. 75 (1933).
11. E. Hopf, Mathematische Annalen 103 (1930).
12. В. Г. Фесенков, Астрономич. журнал 23, вып. 1 (1946).
13. Ф. Р. Мультон, Введение в небесную механику, ОНТИ, 1937.
14. V. Hochmann, Die Erreichbarkeit des Himmelskörpers, München — Berlin, 1925, стр. 63.
15. E. Strömgren, Publicationern fra Kobenhavns obs. № 100 (1936).
16. C. Lous, Publicationern fra Kobenhavns obs. № 32 (1919).
17. В. А. Егоров, Труды конф. Пути развития отечественного математического машиностроения и приборостроения, т. II, Москва, 1957.
18. В. А. Егоров, ДАН СССР 113 № 1 (1957).