

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ТЕОРИЯ ЭФФЕКТА ВАВИЛОВА — ЧЕРЕНКОВА

Б. М. Болотовский

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	201
I. Эффект Вавилова — Черенкова в изотропной среде	
I.1. Уравнения Максвелла	202
I.2. Диэлектрическая постоянная	204
I.3. Качественное рассмотрение	205
I.4. Поле движущейся точечной заряженной частицы	207
I.5. Потери энергии заряженной частицы	210
I.6. Излучение Вавилова — Черенкова в среде без дисперсии	212
I.7. Продольное и поперечное поля	214
I.8. Вклад потерь, обусловленных эффектом Вавилова — Черенкова, в полные потери энергии	214
I.9. Поле излучения	217
I.10. Длительность вспышки излучения	217
I.11. Излучение проводника с током	218
I.12. Обращение эффекта Вавилова — Черенкова	219
I.13. Интерференция излучения Вавилова — Черенкова	220
I.14. Квантовая теория эффекта Вавилова — Черенкова	224
II. Эффект Вавилова — Черенкова в кристаллах	
II.1. Материальные уравнения	226
II.2. Уравнения для потенциалов	227
II.3. Качественное рассмотрение	227
II.4. Поляризация волны Вавилова — Черенкова	229
II.5. Поле движущейся точечной заряженной частицы	230
II.6. Эффект Вавилова — Черенкова в одноосном кристалле	230
а) Заряд движется параллельно оптической оси	231
б) Заряд движется перпендикулярно оптической оси	233
II.7. Фазовая и групповая скорости волн Вавилова — Черенкова в кристалле	235
II.8. Эффект Вавилова — Черенкова в изотропной оптически активной среде	236
II.9. Эффект Вавилова — Черенкова в гиротропном кристалле	237
II.10. Эффект Вавилова — Черенкова в электронной плазме, помещенной в магнитном поле	239
Цитированная литература	240

СОДЕРЖАНИЕ

В 1934 г. появились статьи П. А. Черенкова³⁴ и С. И. Вавилова¹⁸⁹, посвященные видимому свечению чистых жидкостей под действием γ -излучения. С. И. Вавилов указал, что это свечение не может быть люминесценцией и предположил, что излучение вызывается торможением электронов, выбиваемых γ -лучами. Через три года И. Е. Тамм и И. М. Франк¹⁸¹ дали теорию этого явления, показав, что источником свечения являются электроны, движущиеся со скоростью, превышающей фазовую скорость света в среде.

Со времени появления работы И. Е. Тамма и И. М. Франка прошло 20 лет. За это время эффект Черенкова, или эффект Вавилова — Черенкова, явился предметом многих теоретических, экспериментальных и прикладных исследований. Из прикладных работ в первую очередь отметим использование излучения Вавилова — Черенкова для регистрации быстрых заряженных частиц (техника счетчиков Вавилова — Черенкова) и для генерации микрорадиоволн. Счетчики Вавилова — Черенкова обладают целым рядом преимуществ по сравнению с другими известными детекторами заряженных частиц (малое разрешающее время, направленность излучения и др.). Насколько распространенными приборами являются теперь счетчики Вавилова — Черенкова, можно видеть из того, что открытие антипротона было связано с их использованием.

Генерация радиоволн с помощью эффекта Вавилова — Черенкова является пока предметом лабораторных исследований. Генерация радиоволн в результате эффекта Вавилова — Черенкова может, в принципе, иметь место также в ионизированной атмосфере, окружающей Солнце и звезды.

Изучаются и многие другие возможные применения эффекта Вавилова — Черенкова (стандартный источник света малой интенсивности⁶, механизмы ускорения заряженных частиц, основанные на обращении эффекта Вавилова — Черенкова¹⁹¹, и т. п.).

Десять лет назад в УФН был опубликован обзор И. М. Франка по эффекту Вавилова — Черенкова⁶². Этот обзор сохранил свое значение до настоящего времени. Однако появившиеся с тех пор многочисленные исследования почти не освещены в обзорной литературе. Обзор Джелли, опубликованный в УФН¹⁰⁶, дает достаточно полное представление об имеющихся экспериментальных приложениях эффекта Вавилова — Черенкова, но в этом обзоре мало места уделено изложению теории, лежащей в основе приложений.

Предлагаемый обзор ставит задачей ознакомить читателя с современным состоянием теории эффекта Вавилова — Черенкова. Обзор разделен на две части — эффект Вавилова — Черенкова в безграничной среде и эффект Вавилова — Черенкова при наличии границ. Автор не пытался охватить все стороны излагаемого явления. Эффект Вавилова — Черенкова в атмосфере^{7,8,11,23,67,68,85,103,104,160,202}, в ферромагнетиках^{94,95,97,100,101,153,168,169}, влияние многократного рассеяния на угловую ширину излучения Вавилова — Черенкова^{51,144} и некоторые другие вопросы вовсе не рассматриваются. Длительность вспышки в эффекте Вавилова — Черенкова^{65,183}, обращение эффекта Вавилова — Черенкова^{183,191} и некоторые другие вопросы обсуждены весьма кратко. Со всеми этими вопросами можно ознакомиться подробнее по литературе, приложенной к обзору *).

В списке литературы содержатся только работы, непосредственно связанные с эффектом Вавилова — Черенкова. Немногие ссылки на вспомогательную литературу даны в тексте.

Чтению второй главы желательно предпослать ознакомление с основами кристаллооптики хотя бы в объеме соответствующей главы книги Зоммерфельда «Оптика»¹⁷⁸.

1. ЭФФЕКТ ВАВИЛОВА — ЧЕРЕНКОВА В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

1.1. Уравнения Максвелла. Пусть через неограниченную изотропную среду с диэлектрической постоянной ϵ и магнитной проницаемостью μ (операторный характер величин ϵ и μ будет подробнее рассмотрен ниже)

*) Автор благодарен Дж. В. Джелли, приславшему новый список работ по эффекту Вавилова — Черенкова, выполненных за рубежом.

движется равномерно и прямолинейно точечная заряженная частица. Скорость частицы в системе координат, где диэлектрик покоится, обозначим через $\mathbf{v}$, заряд частицы — через q . Задача состоит в том, чтобы определить поля — электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное $\mathbf{H}$, возникающие в среде при движении заряженной частицы. Запишем уравнения Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \end{aligned} \right\} \quad (I.1)$$

В этих уравнениях ρ и $\mathbf{j}$ обозначают плотность заряда и плотность тока, обусловленные движущимся точечным зарядом. Если частица в момент времени t находится в точке $\mathbf{x} = \mathbf{v}t$, то $\rho(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ выражаются через дельта-функцию от аргумента $\mathbf{x} - \mathbf{v}t$:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t), \\ \mathbf{j} &= q\mathbf{v} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t). \end{aligned} \right\} \quad (I.2)$$

Удобно перейти, как это всегда и делается, от полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ к потенциалам $\mathbf{A}$ и φ , через которые $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \end{aligned} \right\} \quad (I.3)$$

Тогда от уравнений для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ можно перейти к уравнениям для вектор-потенциала $\mathbf{A}$ и скалярного потенциала φ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j} + \operatorname{grad} \left(\frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} \right), \\ \epsilon \left(\Delta \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} \right) &= -4\pi\rho. \end{aligned} \right\} \quad (I.4)$$

Как известно, уравнения (I.4) не определяют $\mathbf{A}$ и φ однозначно, поэтому можно наложить на $\mathbf{A}$ и φ некоторое дополнительное условие, выбрав его так, чтобы упростить систему (I.4). Если на потенциалы наложить условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (I.5)$$

система уравнений (I.4) примет следующий симметричный вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu} \left(\Delta \mathbf{A} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) &= -\frac{4\pi}{c} q\mathbf{v} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t), \\ \epsilon \left(\Delta \varphi - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) &= -4\pi q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t). \end{aligned} \right\} \quad (I.6)$$

Эти уравнения для потенциалов поля, созданного точечной частицей, чаще всего являются исходными для рассмотрения различных задач, связанных как с излучением Вавилова — Черенкова, так и вообще с прохождением заряженных частиц через вещество.

Однако в некоторых случаях (примеры будут разобраны ниже) оказывается удобнее наложить на потенциалы вместо дополнительного условия (I.5) условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (\text{I.7})$$

При выполнении этого условия система уравнений (I.4) для $\mathbf{A}$ и φ принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \Delta \varphi &= -4\pi q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t), \\ \frac{1}{\mu} \left(\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) &= -\frac{4\pi}{c} q \mathbf{v} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) + \frac{\varepsilon}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.8})$$

Разумеется, обе системы уравнений, (I.6) и (I.8), дают для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ одни и те же выражения, и с этой точки зрения безразлично, какую из них решать. Поэтому, если необходимо определить только $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, удобнее пользоваться системой уравнений (I.6), так как в этом случае

$$\mathbf{A} = \varepsilon \mu \frac{\mathbf{v}}{c} \varphi \quad (\text{I.9})$$

и дело сводится к решению только одного уравнения системы (I.6). Однако часто бывает полезно знать не полное электромагнитное поле, а только поперечную его часть, $\mathbf{E}^{\text{tr}}$, $\mathbf{H}$, удовлетворяющую соотношению $\operatorname{div} \mathbf{E}^{\text{tr}} = 0$. Эта часть поля описывает излучение заряда, проходящего через диэлектрик. При необходимости определить поперечное поле удобнее пользоваться системой уравнений (I.8), так как вектор-потенциал $\mathbf{A}$, удовлетворяющий системе уравнений (I.8), сразу дает поперечное поле

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{tr}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.10})$$

В дальнейшем мы будем пользоваться как одной, так и другой калибровкой потенциалов.

1.2. Диэлектрическая постоянная. Остановимся теперь на смысле величин ε и μ — диэлектрической постоянной и магнитной проницаемости, входящих в уравнения поля. Если среда, в которой движется частица, не обладает дисперсией, т. е. волны всех частот распространяются в ней одинаковым образом, то ε и μ можно считать просто числами. При этом

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.11})$$

где $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — электрическая и магнитная индукции. Если же среда оказывается диспергирующей, то ε и μ имеют разные значения в зависимости от частоты электромагнитной волны, распространяющейся в среде. Поэтому, для того чтобы записать связь, скажем, между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$, нужно обе эти величины разложить в интегралы Фурье по времени:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \int \mathbf{E}_\omega(\mathbf{x}) e^{i\omega t} d\omega; \\ \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \int \mathbf{D}_\omega(\mathbf{x}) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.12})$$

Связь между $\mathbf{D}_\omega(\mathbf{x})$ и $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{x})$ оказывается простой:

$$\mathbf{D}_\omega = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}_\omega,$$

где $\varepsilon(\omega)$ — диэлектрическая постоянная для частоты ω . В диспергирующей среде выражение $\varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ имеет смысл интеграла по всем частотам:

$$\varepsilon \mathbf{E} = \int \varepsilon(\omega) \mathbf{E}_\omega e^{i\omega t} d\omega. \quad (I.13)$$

По формулам операторного исчисления $\varepsilon(\omega)$ можно вынести за знак интеграла, проделав одновременно формальную замену ω на $-i \frac{\partial}{\partial t}$. Тогда из (I.13) получаем

$$\varepsilon = \varepsilon \left(-i \frac{\partial}{\partial t} \right). \quad (I.14)$$

Таким образом, диэлектрическая постоянная ε в фурье-представлении есть функция частоты, а в координатном представлении — оператор, зависящий от дифференцирования по времени. Все сказанное относится и к $\mu(\omega)$.

I.3. Качественное рассмотрение. В этом разделе мы рассмотрим некоторые качественные стороны явления прохождения частицы через среду. Для этого удобно воспользоваться уравнениями для потенциалов поля в форме (I.6).

Если заряд, равномерно движущийся в неограниченной однородной среде, излучает, то поле излучения должно быть стационарно относительно заряда, т. е. должно перемещаться со скоростью заряда. Посмотрим, при каких условиях система уравнений (I.6) для потенциалов поля может иметь решением плоскую электромагнитную волну

$$e^{ik(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)}, \quad (I.15)$$

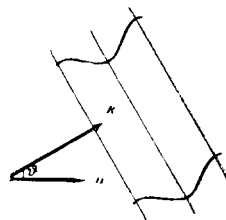


Рис. 1.

у которой поверхностями постоянной фазы являются плоскости, перпендикулярные волновому вектору $\mathbf{k}$. Эти плоскости перемещаются в пространстве со скоростью $\mathbf{v}$, равной скорости движущегося заряда (рис. 1).

Заметим, что во всех точках, кроме точки $\mathbf{x} = \mathbf{v}t$, где находится движущийся заряд, система уравнений (I.6) является однородной:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu} \left(\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ \varepsilon \left(\Delta \varphi - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (I.16)$$

Подставляя в систему (I.16) плоскую волну (I.15), находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu(\mathbf{k}\mathbf{v})} \left[k^2 - \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}) \mu(\mathbf{k}\mathbf{v}) \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{c^2} \right] &= 0, \\ \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}) \left[k^2 - \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}) \mu(\mathbf{k}\mathbf{v}) \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{c^2} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (I.17)$$

В этих уравнениях ε и μ зависят от частоты $\mathbf{k}\mathbf{v}$ плоской волны (I.15).

Из уравнений (I.17) следует, что с заданной скоростью $\mathbf{v}$ в среде могут распространяться два типа волн (I.15) с двумя различными соотношениями между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$:

$$k^2 = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} (\mathbf{k}\mathbf{v})^2. \quad (I.18a)$$

и

$$\varepsilon(\mathbf{kv}) = 0. \quad (\text{I. 186})$$

Электромагнитные волны, удовлетворяющие условию (I. 18a), называются волнами Вавилова — Черенкова. Условию (I. 18a) можно придать простую форму, воспользовавшись тем, что $\mathbf{kv} = kv \cos \vartheta$ (рис. 1):

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \vartheta &= \frac{1}{\varepsilon \mu \beta^2}, \\ \cos \vartheta &= \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu} \beta} = \pm \frac{v_\phi}{v}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 19})$$

где $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{n}$ — фазовая скорость электромагнитной волны в среде.

Из двух знаков в (I. 19) следует выбрать знак плюс, так как волновой вектор распространяющейся волны должен иметь положительную компоненту в направлении скорости.

Таким образом, проекция волнового вектора на скорость частицы, или что то же, величина $\cos \vartheta$, определена. Остается еще определить компоненту волнового вектора, перпендикулярную скорости $\mathbf{v}$. Для квадрата этой компоненты k_r^2 получается следующее значение:

$$k_r^2 = k^2 \sin^2 \vartheta.$$

Учет формул (I. 18a) и (I. 19) дает

$$k_r^2 = \frac{(\mathbf{kv})^2}{v^2} (\varepsilon \mu \beta^2 - 1).$$

Рис. 2.

Отсюда k_r определяется с точностью до знака. Знак следует выбирать так, чтобы поток электромагнитной энергии был направлен от пути частицы (см. раздел II.7).

Условие (I. 19) определяет реальную черенковскую волну лишь в том случае, если

$$\frac{1}{n\beta} = \frac{v_\phi}{v} < 1, \quad (\text{I. 20})$$

т. е. если фазовая скорость электромагнитной волны меньше скорости заряженной частицы.

Условие (I. 19) можно получить из простых физических соображений, как это было сделано И. М. Франком. Предположим, что в каждой точке своего пути электрон испускает сферические волны, распространяющиеся со скоростью $v_\phi = \frac{c}{n}$ (рис. 2). Интерференция этих волн поведет к образованию волны, распространяющейся под углом ϑ к направлению движения заряда, причем

$$\cos \vartheta = \frac{1}{n\beta}.$$

Это как раз и есть условие (I. 19).

Фазовая скорость волн Вавилова — Черенкова

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\mathbf{kv}}{k} = v \cos \vartheta = \frac{c}{n}, \quad (\text{I. 21})$$

т. е. такая же, как и у всех поперечных электромагнитных волн.

Как следует из (I. 20), фазовая скорость волн Вавилова — Черенкова всегда меньше скорости заряженной частицы. Групповая скорость волн

Вавилова — Черенкова

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{k}{k} \frac{2cn}{2n^2 + \omega \frac{dn^2}{d\omega}}. \quad (I.22)$$

В области нормальной дисперсии $\left(\frac{dn^2}{d\omega} > 0\right)$ групповая скорость волн Вавилова — Черенкова всегда меньше фазовой.

Условие (I.186) также описывает волны, которые могут испускаться зарядом, движущимся в среде равномерно и прямолинейно. Эти волны во многих отношениях отличаются от волн Вавилова — Черенкова. Условие излучения Вавилова — Черенкова (I.20) может выполняться в некоторой области непрерывного изменения частоты $\omega = kv$. Это означает, что излучение Вавилова — Черенкова в неограниченной среде обладает непрерывным спектром. Напротив, условие (I.186) выполняется, вообще говоря, для дискретных фиксированных значений $\omega_\alpha = (kv)_\alpha$, где α — номер корня уравнения (I.186).

Фазовая скорость волн, удовлетворяющих условию (I.186), определяется равенством

$$v_\phi = \frac{\omega_\alpha}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega_\alpha)\mu(\omega_\alpha)}} = \infty. \quad (I.23)$$

Групповая скорость этих волн равна нулю. Это означает, что энергия, затраченная движущимся зарядом на возбуждение таких волн в некотором элементе объема среды, не переносится возбужденными волнами. В отличие от волн Вавилова — Черенкова, энергия колебаний как бы «запасается» в среде, и возникающие локальные колебания аналогичны продольным колебаниям электронной плазмы с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}} \quad (I.24)$$

(n — число электронов в единице объема, e и m — заряд и масса электрона).

Волны, удовлетворяющие условию (I.186), называются поляризационными волнами. Вообще говоря, эти волны могут быть и затухающими, так как условие (I.186) налагает ограничения только на компоненту волнового вектора, параллельную скорости.

Таким образом, заряженная частица, движущаяся в веществе равномерно и прямолинейно, может возбуждать волны двух типов: волны Вавилова — Черенкова и поляризационные. Поляризационные волны иногда также называют боровскими. Ниже мы покажем, что волны Вавилова — Черенкова являются поперечными, а боровские — продольными*).

1.4. Поле движущейся точечной заряженной частицы. Перейдем теперь к нахождению поля движущейся заряженной частицы. Ниже мы будем исходить из системы уравнений (I.6) для потенциалов электромагнитного поля. Будет также проведено решение системы уравнений (I.8), сразу дающее разделение полей на продольные и поперечные.

В силу соотношения (I.9) достаточно решить одно из двух уравнений системы (I.6), скажем первое уравнение.

*) См. также В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в ионосфере, Гостехиздат, 1948.

Представим $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$ в виде

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)} d\mathbf{k}. \quad (I.25)$$

Решение первого уравнения системы (I.6) «делением» на оператор Даламбера сразу дает выражение для вектор-потенциала $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \frac{q}{2\pi^2} \frac{\mathbf{v}}{c} \int \frac{\mu(\mathbf{k}\mathbf{v}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)}}{k^2 - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}(\mathbf{k}\mathbf{v})^2} d\mathbf{k}. \quad (I.26)$$

Если $\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})$ и $\mu(\mathbf{k}\mathbf{v})$ — комплексные величины, т. е. если среда поглощает электромагнитные волны, то вычисление этого интеграла есть однозначная операция. Если же среда является прозрачной для электромагнитных волн (что соответствует действительным функциям ε и μ), интегрирование в (I.26) становится неоднозначным, так как подынтегральная функция в этом случае содержит полюсы на пути интегрирования, соответствующие выполнению одного из двух условий (I.18). Для интеграла (I.26) полюсы имеют место при выполнении условий (I.18a), для интеграла

$$\varphi = \frac{q}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)} d\mathbf{k}}{\delta(\mathbf{k}\mathbf{v}) \left[k^2 - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}(\mathbf{k}\mathbf{v})^2 \right]} \quad (I.27)$$

— при выполнении условий (I.18a) и (I.18б).

Если ограничиваться запаздывающими потенциалами, интегрирование в формулах (I.26) и (I.27) может быть сделано однозначным, для чего необходимо все интегралы брать в смысле главного значения (P.V.) и в окрестности полюсов заменять сингулярные выражения на следующие^{96, 26, 27 *}):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{k^2 - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}(\mathbf{k}\mathbf{v})^2} &= \frac{P.V.}{k^2 - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}(\mathbf{k}\mathbf{v})^2} - i\pi \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{|\mathbf{k}\mathbf{v}|} \delta \left\{ k^2 - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}(\mathbf{k}\mathbf{v})^2 \right\}, \\ \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})} &= \frac{P.V.}{\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})} - i\pi \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{|\mathbf{k}\mathbf{v}|} \delta \{ \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}) \}. \end{aligned} \right\} \quad (I.28)$$

Для дальнейшего удобно ввести цилиндрическую систему координат r, φ, z с осью z , совпадающей с линией движения заряда. Одновременно введем обозначение $\mathbf{k}\mathbf{v} = \omega$. Интегрируя выражение (I.26) для $\mathbf{A}$ по компонентам волнового вектора $\mathbf{k}$, перпендикулярным скорости частицы $\mathbf{v}$, и учитывая первое соотношение (I.28), получаем¹⁸¹

$$A_z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{\omega}{v}(z - vt)} a(\omega, r) d\omega, \quad (I.29)$$

где

$$a(\omega, r) = \begin{cases} \frac{q}{\pi c} \mu(\omega) K_0 \left(-\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \varepsilon\mu\beta^2} r \right) & \text{при } \omega > 0, \\ \text{комплексно сопряж.} & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \quad (I.30)$$

Функция K_0 — цилиндрическая функция мнимого аргумента (функция Макдональда). Эта функция имеет логарифмическую особенность в нуле:

$$K_0(x) \approx \ln \frac{1}{x} \quad (|x| \ll 1) \quad (I.31)$$

*) Подразумевается, что $\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})$ имеет нули не выше первого порядка.

и экспоненциально затухает при больших значениях аргумента:

$$K_0(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad |x| \gg 1. \quad (1.32)$$

Аналогичным образом записывается выражение для скалярного потенциала φ :

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{\omega}{v} (z-vt)} \Phi(\omega, r) d\omega, \quad (1.33)$$

где

$$\Phi(\omega, r) = \begin{cases} \frac{q}{\pi v} \frac{1}{\varepsilon(\omega)} K_0\left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \varepsilon \mu \beta^2} r\right) & \text{при } \omega > 0, \\ \text{комплексно сопряж.} & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

В случае прозрачной среды выражения для $a(\omega, r)$ и $\Phi(\omega, r)$ действительны, если $\varepsilon \mu \beta^2 < 1$, т. е. в том интервале частот, в котором не выполнено условие излучения Вавилова—Черенкова. В этом случае A и φ разлагаются по гармоникам, экспоненциально затухающим при $r \rightarrow \infty$. Иная картина имеет место, если условие излучения Вавилова—Черенкова выполнено. В этом случае компоненты поля, отвечающие частоте ω , не затухают экспоненциально. Полагая

$$\sqrt{1 - \varepsilon \mu \beta^2} = -i \sqrt{\varepsilon \mu \beta^2 - 1} \quad (\varepsilon \mu \beta^2 > 1) \quad (1.35)$$

(знак перед корнем соответствует выбору расходящихся волн) и используя формулу (1.32), находим, что при $\varepsilon \mu \beta^2 > 1$, т. е. при выполнении условия излучения Вавилова—Черенкова, гармоники $a(\omega, r)$ и $\Phi(\omega, r)$ при $r \rightarrow \infty$ описывают коническую волну

$$a(\omega, r), \quad \Phi(\omega, r) \approx \frac{i}{\sqrt{k_r r}} e^{i \frac{\omega}{v} (z-vt) + i k_r \cdot r - i \frac{\pi}{4}}, \quad (1.36)$$

где

$$k_r = \frac{|\omega|}{v} \sqrt{\varepsilon \mu \beta^2 - 1} = \frac{|\omega|}{v} \operatorname{tg} \vartheta, \quad (1.37)$$

ϑ — угол, который составляет направление распространения волны Вавилова—Черенкова со скоростью частицы (см. (1.19)). При $\omega < 0$ правая часть равенства (1.36) переходит в комплексно сопряженное выражение.

Таким образом, если $\varepsilon \mu \beta^2 > 1$, то поле состоит из волн, уходящих в бесконечность под углом ϑ к оси z , по которой движется заряд.

Исходя из выражений (1.29) и (1.33) для потенциалов A и φ , нетрудно получить формулы для полей E и H . Отличными от нуля оказываются только компоненты E_z , E_r и H_φ :

$$\left. \begin{aligned} E_z &= -\frac{i}{c} \int e^{i \frac{\omega}{v} (z-vt)} \frac{1 - \varepsilon \mu \beta^2}{\varepsilon \mu \beta^2} a(\omega, r) \omega d\omega, \\ E_r &= - \int e^{i \frac{\omega}{v} (z-vt)} \frac{1}{\varepsilon \mu \beta} \frac{\partial a(\omega, r)}{\partial r} d\omega, \\ H_\varphi &= - \int e^{i \frac{\omega}{v} (z-vt)} \frac{\partial a(\omega, r)}{\partial r} d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

где $a(\omega, r)$ определяется равенством (1.30); интегралы по ω берутся в пределах от $+\infty$ до $-\infty$.

Формулы (I.38) полностью определяют поле заряда, движущегося с заданной скоростью в безграничной среде.

I.5. Потери энергии заряженной частицы. Найдем выражения для потери энергии заряженной частицы, движущейся в среде. Это можно сделать несколькими способами. Первый из них (Тамм и Франк¹⁸¹) заключается в следующем.

Окружим путь частицы цилиндрической поверхностью радиуса b , ось которой совпадает с путем частицы. Очевидно, поток вектора Пойнтинга через эту поверхность характеризует потери энергии частицы в единицу времени. Разделив эту величину на скорость частицы v , найдем потери энергии на единицу пути.

Чтобы полученное выражение давало полные потери энергии частицы, нужно радиус цилиндрической поверхности b устремить к нулю. Однако это сделать нельзя, так как на малых расстояниях от движущейся частицы классическая электродинамика среды неприменима. В дальнейшем, если не оговорено особо, под b будет подразумеваться минимальное значение, при котором классическая электродинамика среды еще справедлива. Величина b , по оценке Шонберга⁹³, равна $\frac{c}{\omega_0}$, где ω_0 — плазменная частота среды, определяемая (I.24). Потеря энергии частицы на соударения с параметром удара, меньшим b , определяются по квантовым формулам Бете — Блоха.

Для потери энергии частицы, определяемой как поток вектора Пойнтинга через цилиндрическую поверхность радиуса b , получается следующее выражение (Тамм и Франк^{181,184}, Ферми⁵⁹):

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)_b = \frac{2q^2b}{\pi v^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty \mu(\omega) \left(\frac{1}{\varepsilon\mu} - \beta^2\right) k_r^*(\omega) K_1(k_r^*b) K_0(k_rb) i\omega d\omega, \quad (\text{I.39})$$

где

$$k_r^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \varepsilon\mu\beta^2), \quad (\text{I.40})$$

а знак k_r следует выбирать так, чтобы получались запаздывающие потенциалы*). Если ε и μ — комплексные функции частоты, нужно, чтобы было $\operatorname{Re} k_r > 0$. Если ε и μ действительны и $\varepsilon\mu\beta^2 > 1$, то $k_r = -i|k_r|$.

Выражение (I.39) является исходным при анализе потерь энергии частицы в веществе. Чтобы получить численное значение потерь энергии, необходимо задать аналитическую зависимость ε и μ от частоты.

В работе Тамма и Франка¹⁸¹ потери энергии в прозрачной среде на излучение Вавилова — Черенкова были получены следующим образом. Устремим радиус цилиндра b к бесконечности. При этом формула (I.39) даст потери на излучение, уходящее в бесконечность, т. е. на излучение Вавилова — Черенкова. Пользуясь асимптотическими выражениями для K_0 и K_1 (см. (I.32)); эта же формула имеет место и для K_1) и учитывая, что нужно определить только действительную часть интеграла (I.39), получаем

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)_{b \rightarrow \infty} = -\frac{q^2}{c^2} \int_{\substack{\varepsilon\mu\beta^2 > 1 \\ \omega > 0}} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu\beta^2}\right) \mu(\omega) \omega d\omega. \quad (\text{I.41})$$

Интегрирование ведется только по области частот, для которых выполняется условие излучения Вавилова — Черенкова, выписанное под интегралом.

*) Формула (I.39) отличается от формул в цитированных работах учетом величины μ .

Отметим здесь, что в большинстве работ учитывались только диэлектрические свойства среды и полагалось $\mu=1$.

Формула (I. 41) дает лишь часть потерь энергии частицы. Ферми⁵⁹, исходя из (I. 39), получил выражение для полных потерь энергии частицы. При этом Ферми рассматривал сначала поглощающую среду и в конечном результате устремил затухание к нулю. Тот же результат можно получить и не вводя затухания, с помощью замены (I. 28). В этом случае интегрирование формулы (I. 39) дает

$$-\left(\frac{dW}{dz}\right)_b = \frac{q^2}{v^2} \sum_s \frac{\omega_s}{|\varepsilon'(\omega_s)|} k_s b \cdot K_1(k_s b) K_0(k_s b) + \frac{q^2}{c^2} \int_{\varepsilon \mu \beta^2 > 1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu \beta^2}\right) \mu \omega d\omega, \quad (\text{I. 42})$$

где

$$k_s = k_r(\omega_s) = \frac{\omega_s}{v} \quad (\text{I. 43})$$

и ω_s — корни уравнения (I. 186). При этом мы воспользовались формулой

$$\delta\{\varepsilon(\omega)\} = \sum_s \frac{1}{|\varepsilon'(\omega_s)|} \delta(\omega - \omega_s).$$

Формула (I. 42) показывает, что частица, движущаяся через среду, излучает волны Вавилова — Черенкова, а также волны тех частот, для которых диэлектрическая постоянная среды обращается в нуль.

Первое слагаемое в (I. 42) дает так называемые поляризационные потери. Если принять для $\varepsilon(\omega)$ выражение

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_s^2 - \omega^2}, \quad (\text{I. 44})$$

то формула поляризационных потерь примет вид⁵⁹

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\text{поляризация}} = \frac{q^2 \omega_0^2}{v^2} \frac{\Omega b}{v} K_0\left(\frac{\Omega b}{v}\right) K_1\left(\frac{\Omega b}{v}\right), \quad (\text{I. 45})$$

где $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_s^2}$ — та частота, на которой $\varepsilon(\omega)$ (I. 44) обращается в нуль.

Если $\frac{\Omega b}{v} \ll 1$, формула (I. 45) принимает простой вид

$$-\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\text{поляризация}} = \frac{q^2 \omega_0^2}{v^2} \ln \frac{v}{\Omega b}. \quad (\text{I. 46})$$

При $\frac{\Omega b}{v} \gg 1$ (малые скорости или большие значения радиуса цилиндра b) формула (I. 45) дает экспоненциально малую величину. Впрочем, при совсем малых скоростях частицы весь подход становится непригодным (см., например, Ферми, Ядерная физика, Москва, ИЛ, 1951).

Потери на излучение Вавилова — Черенкова определяются вторым слагаемым формулы (I. 42). Если $\mu = 1$, а $\varepsilon(\omega)$ определяется формулой (I. 44),

интеграл во втором слагаемом равен

$$-\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\text{В.-Ч.}} = \begin{cases} \frac{q^2 \omega_0^2}{v^2} [-\beta^2 - \ln(1 - \beta^2)] & \text{при } \beta < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(0)}}, \\ \frac{q^2 \omega_0^2}{v^2} \left[-\frac{1 - \beta^2}{\varepsilon(0) - 1} + \ln \frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon(0) - 1} \right] & \text{при } \beta > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(0)}}. \end{cases} \quad (I.47)$$

На рис. 3 приведен график $\varepsilon(\omega)$ (I.44). На графике проведена прямая, расстояние которой от оси абсцисс равно $\frac{1}{\beta^2}$. Область частот излучения Вавилова — Черенкова, соответствующая $\varepsilon(\omega) > \frac{1}{\beta^2}$, заштрихована. Поляризационные потери происходят только на одной частоте, при которой кривая $\varepsilon(\omega)$ пересекает ось абсцисс.

Формула (I.42) дает ту часть потерь энергии частицы, которая описывается классической электродинамикой среды. Чтобы получить полные потери энергии, нужно к (I.42) добавить потери энергии на соударения с параметром удара меньше b , вычисленные по квантовым формулам.

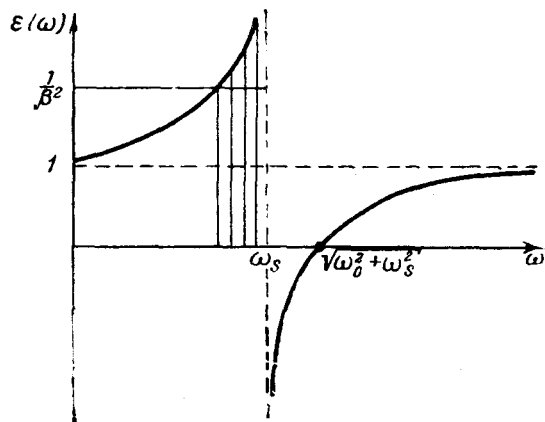


Рис. 3.

Потери энергии частицы можно определить и другим способом^{29, 121}, вычисляя значение электрического поля в точке, где находится частица. Очевидно, поле тормозит частицу и

$$\frac{dW}{dx} = qE_z \Big|_{\substack{z \rightarrow vt \\ r \rightarrow 0}}. \quad (I.48)$$

Эта формула, где E_z берется из (I.38), дает для потерь энергии те же результаты, что и вычисление потока вектора Пойнтинга *).

Отметим еще один способ определения потерь энергии частицы. Он заключается в вычислении роста энергии электромагнитного поля в среде, в которой движется частица. Очевидно, потери энергии частицы в единицу времени определяются выражением

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} \int_V (\varepsilon E^2 + \mu H^2) dV.$$

Этот способ особенно удобен при пользовании гамильтоновым методом^{71, 3, 119}.

1.6. Излучение Вавилова — Черенкова в среде без дисперсии. Все рассмотрение существенно упрощается, если с самого начала пренебречь дисперсией среды¹⁸³. Будем считать, что диэлектрическая постоянная ε не зависит от частоты (для простоты полагаем $\mu = 1$).

*) В формуле (I.48) предельный переход $z \rightarrow vt$, $r \rightarrow 0$ следует проводить, вообще говоря, после интегрирования по всем гармоникам в разложении для E_z .

Тогда интегрирование формулы (I.26) для A дает:

$$A = \frac{qv}{c \sqrt{(z-vt)^2 + r^2 (1-\epsilon\beta^2)}}, \quad \text{при } \epsilon\beta^2 < 1$$

а при выполнении условия излучения Вавилова—Черенкова, т. е. при $\epsilon\beta^2 > 1$,

$$A = \begin{cases} \frac{2qv}{c \sqrt{(z-vt)^2 - r^2 (\epsilon\beta^2 - 1)}} & \text{при } z < vt, \quad vt - z > r \sqrt{\epsilon\beta^2 - 1}, \\ 0 & \text{(в остальном пространстве).} \end{cases}$$

Из последнего выражения следует, что при $\epsilon\beta^2 > 1$ поле является разрывным. Поверхность разрыва описывается уравнением

$$z - vt + r \sqrt{\epsilon\beta^2 - 1} = 0.$$

Разрывные конические волны распространяются вдоль оси z со скоростью заряда. Нормаль к этим волнам составляет с осью z угол

$$\vartheta = \arccos \frac{1}{\sqrt{\epsilon\beta^2}}.$$

Разрывные волны такого типа хорошо известны в баллистике. Если скорость снаряда больше скорости звука в воздухе, снаряд возбуждает узкую коническую акустическую волну, стационарную по отношению к снаряду (волна Маха). Очень быстрое возрастание сопротивления, испытываемого снарядом, когда его скорость становится больше скорости звука, является результатом образования этих волн. Явления здесь оказываются намного сложнее, чем соответствующее оптическое явление (граничные условия на поверхности снаряда, нелинейность уравнений аэродинамики и т. д.).

Аналогичные явления имеют место и в других областях физики (радиотехника¹⁵⁷, мезонная физика^{24, 98}). Общим для них является то, что скорость источника поля превосходит скорость распространения поля.

Еще в 1904 г. А. Зоммерфельд¹⁷⁶ вычислил равнодействующую F электромагнитных сил взаимодействия всех объемных элементов жесткого сферического электрона. В частности, он исследовал случай равномерного движения электрона в вакууме и нашел, что $F=0$ при $v < c$ и

$$F = \frac{9q^2}{4\pi d^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)$$

при $v > c$ (d — диаметр электрона). Очень близкое выражение получается, если интеграл потерь Вавилова—Черенкова в среде без дисперсии обрезать на длинах волн порядка d , т. е. на частотах порядка $\omega = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}d}$, и затем положить $\epsilon=1$. Статья Зоммерфельда была написана прежде, чем была разработана теория относительности. Замена в формулах Зоммерфельда скорости света в пустоте на скорость света в среде приводит к теории излучения Черенкова в среде без дисперсии.

Потери энергии на излучение в среде без дисперсии бесконечны:

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{q^2}{c^2} \int_0^\infty \left(1 - \frac{1}{\epsilon\beta^2}\right) \omega d\omega.$$

В действительности случай $\epsilon = \text{const}$ является абстракцией, и интеграл потерь в реальной среде всегда обрезается на некоторой граничной частоте.

1.7. Продольное и поперечное поля. Приведем еще решение уравнений для потенциалов (I.8) при калибровке (I.7)^{26, 171}. В этом случае потенциал продольного поля записывается в виде

$$\varphi = \frac{q}{\pi v} \int e^{i \frac{\omega}{v} (z-vt)} K_0 \left(\frac{|\omega|}{v} r \right) \frac{d\omega}{\epsilon(\omega)}, \quad (\text{I.49})$$

а вектор-потенциал поперечного поля — в виде

$$\mathbf{A} = \int e^{i \frac{\omega}{v} (z-vt)} \mathbf{a}(\omega, r) d\omega, \quad (\text{I.50})$$

где

$$a_r(\omega, r) = \begin{cases} \frac{iqc}{\epsilon \pi v^2} \left[K_1 \left(\frac{|\omega|}{v} r \right) - \sqrt{1 - \epsilon \mu \beta^2} K_1 \left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \epsilon \mu \beta^2} r \right) \right] & \text{при } \omega > 0, \\ \text{комплексно сопряж.} & \text{при } \omega < 0; \end{cases} \quad (\text{I.51})$$

$$a_z(\omega, r) = \begin{cases} \frac{qc}{\epsilon \pi v^2} \left[K_0 \left(\frac{|\omega|}{v} r \right) - (1 - \epsilon \mu \beta^2) K_0 \left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \epsilon \mu \beta^2} r \right) \right] & \text{при } \omega > 0, \\ \text{комплексно сопряж.} & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \quad (\text{I.52})$$

Эти потенциалы дают, разумеется, те же выражения для полных полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, что и потенциалы (I.29) и (I.33). Однако разделение полей на продольное и поперечное теперь проводится сразу. Оказывается, что поляризационные потери описываются продольным полем:

$$\left(\frac{dW}{dx} \right)_{\text{поляри}} = q E_z^{\text{long}} = -q \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{\substack{z \rightarrow vt \\ r \rightarrow 0}},$$

а потери Вавилова — Черенкова — поперечным полем

$$\left(\frac{dW}{dx} \right)_{\text{В.-Ч.}} = q E_z^{\text{tr}} = -q \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \Big|_{\substack{z \rightarrow vt \\ r \rightarrow 0}}.$$

1.8. Вклад потерь, обусловленных эффектом Вавилова — Черенкова, в полные потери энергии. В современной экспериментальной технике по детектированию частиц высокой энергии используются либо процессы ионизации, вызванные частицами, либо генерация ими излучения Вавилова — Черенкова. Поэтому очень важным является выяснение вопроса о том, какая доля полных потерь энергии частицы приходится на ионизацию, а какая — на излучение Вавилова — Черенкова.

Формулы (I.45) и (I.47) для поляризационных потерь и потерь Вавилова — Черенкова были получены Ферми⁵⁹ в довольно узких предположениях о диэлектрической постоянной среды. (Выражение (I.44) для $\epsilon(\omega)$.) В дальнейшем вычисления Ферми были уточнены Гальперном и Холлом, Виком и др.*), использовавшими более общие выражения для

*) Всю относящуюся к этому параграфу библиографию читатель может найти в реферативном сборнике¹⁷ и в обзоре Б. Т. Прайса¹⁵⁸.

диэлектрической постоянной, учитывающие наличие многих полос поглощения в диэлектрике. В работах Вика, например, интеграл потерь (I.39) вычислялся в предположении

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \omega_0^2 \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega},$$

где f_k — силы осцилляторов, γ_k — коэффициенты затухания.

Все последующие вычисления подтвердили качественные выводы, полученные Ферми, в частности, тот вывод, что из-за поляризации среды потери энергии частицы, описываемые классической электродинамикой, стремятся к определенному пределу с ростом энергии частицы. (Предположение о том, что экранирование, вызванное поляризацией среды, может уменьшить ионизационные потери, было впервые высказано Сванном.)

За несколько лет до того, как были проведены эксперименты по измерению потерь энергии быстрых заряженных частиц, вопрос об относительной величине потерь Вавилова — Черенкова исследовался в работах О. Бора²⁹ и М. Шонберга¹⁶³. Исходя из приближения прозрачной среды, эти авторы показали, что рост потерь в релятивистской области обусловлен главным образом излучением Вавилова — Черенкова, в то время как поляризационные потери слабо растут с энергией. Из их исследований вытекало, что ионизационные потери быстрой частицы не должны расти в релятивистской области. Этот вывод, однако, был опровергнут целой серией экспериментальных работ, посвященных определению ионизационных потерь быстрых частиц. Эксперименты показали, что имеет место рост ионизационных потерь, гораздо более интенсивный, чем это следовало из теоретического анализа. Отсюда вытекало, что относительная величина потерь энергии на излучение Вавилова — Черенкова была сильно завышена теорией.

Возможные причины расхождения теории с экспериментом, а также изменения теории, позволяющие привести ее в согласие с опытом, были обсуждены в ряде работ.

М. Шонберг⁹³ одним из первых дал возможное объяснение того факта, что формула (I.41) для потерь энергии на излучение Вавилова — Черенкова в прозрачной среде*) дает завышенные результаты. Соображения Шонберга могут быть проиллюстрированы следующим простым рассуждением²⁶. Из формулы (I.41) видно, что потери энергии на излучение Вавилова — Черенкова оказываются больше всего в тех спектральных областях, где $\varepsilon(\omega)$ велико. В прозрачной среде диэлектрическая постоянная велика в области частот, близких к линии поглощения. Это видно из простой формулы (I.44) для диэлектрической постоянной. При частотах ω , близких к ω_s , $\varepsilon(\omega)$ принимает большие значения. Следовательно, наибольший вклад в излучение Вавилова — Черенкова дают частоты, близкие к ω_s . Но поле излучения Вавилова — Черенкова определяется условием (I.18a), $k^2 = \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}$, которое связывает длину волны излучения $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ с его частотой. При ω , близких к ω_s , $\varepsilon(\omega)$ принимает большие значения, что соответствует по условию (I.18a) коротковолновому излучению. Именно такие волны дают наибольший вклад в формулу (I.41). Но такие волны не могут правильно описываться классической электродинамикой. Классическая электродинамика среды предполагает усреднение поля в определенном объеме, и длина волны

*) Здесь и в дальнейшем считается $\mu = 1$.

излучения в среде поэтому не может быть меньше некоторой величины. Для этой минимальной длины волны, меньше которой не может быть длина волны излучения Вавилова — Черенкова, по оценкам Шонберга, получается величина

$$R = \frac{c}{\omega_0} \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m}} \right), \quad (I.53)$$

где c — скорость света, e и m — заряд и масса электрона, n — число электронов в единице объема среды. Величина ω_0 тождественна с частотой ω_0 , входящей в выражение (I.44). По другим оценкам²⁶, предельная длина волны излучения Вавилова — Черенкова в случае, когда $\epsilon(\omega)$ описывается выражением (I.44), равна

$$R = \frac{c}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_s^2}}, \quad (I.54)$$

где величина ω_s — частота, при которой $\epsilon(\omega)$ (I.44) обращается в бесконечность. Для приведения теории в согласие с экспериментом нужно исключить из рассмотрения волны с длиной, меньшей чем R (I.53). Отбрасывание длин волн, меньших чем R , эквивалентно исключению из рассмотрения параметров соударения, меньших R . В работе⁹³ это исключение было произведено следующим образом. Путь частицы в среде окружался цилиндрическим каналом радиуса R . Потери энергии частицы на соударения с параметром удара, меньшим R , определялись по квантовым формулам Бете — Блоха, а потери энергии на боровское излучение и излучение Вавилова — Черенкова — с помощью классической электродинамики, причем в классическом расчете канал считался пустым. При движении частицы по оси пустого канала в диэлектрике спектр черенковского излучения обрывается со стороны коротких волн на длинах волн, по порядку величины равных радиусу канала, а для более длинных волн практически не меняется⁸¹.

Вычисления М. Хьюбрехта и М. Шонберга⁹³ дали уменьшение вклада потерь Вавилова — Черенкова в полные потери и, по мнению авторов, удовлетворительно согласуются с экспериментом.

Следует, однако, отметить, что полученные в⁹³ результаты зависят от способа, каким проводилось исключение малых параметров соударения (оценка радиуса канала, граничные условия и т. д.). Это обстоятельство позволяет, по нашему мнению, говорить только о качественном согласии с экспериментом.

Другой путь, позволяющий привести теорию в согласие с экспериментом, состоит в отказе от концепции прозрачной среды и в учете поглощения. Проиллюстрируем это простым качественным соображением. Учет поглощения для случая (I.44) приводит к следующему выражению для диэлектрической постоянной:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_s^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (I.55)$$

При учете затухания $\epsilon(\omega)$ уже не обращается в бесконечность, и значения ω , близкие к ω_s , не дают большого вклада в излучение Вавилова — Черенкова. Правда, определение излучения Вавилова — Черенкова в среде с поглощением является до некоторой степени условным, так как излучение Вавилова — Черенкова поглощается в среде, как и боровское, и не уходит на бесконечность. Если определять потери Вавилова — Черенкова как реакцию на частицу со стороны создаваемого ею

поперечного поля, выражение для потерь имеет вид

$$\frac{dW}{dz} = \frac{q}{c} \int a_z(\omega, r) i\omega d\omega \Big|_{r \rightarrow 0},$$

где $a_z(\omega, r)$ — Фурье-компонента вектор-потенциала поперечного поля (I.52). При слабом затухании ($\text{Re } \epsilon \gg \text{Im } \epsilon$) отсюда получается³⁰

$$-\frac{dW}{dz} = \frac{q^2}{c^2} \int_{\text{Re } \epsilon \cdot \beta^2 > 1} \left(1 - \frac{\text{Re } \epsilon}{|\epsilon|^2}\right) \omega d\omega, \quad (\text{I.56})$$

где Re обозначает действительную часть. Интеграл берется по частотам, для которых $\text{Re } \epsilon \cdot \beta^2 > 1$.

Расчеты потерь энергии заряженной частицы в поглощающей среде проводились многими авторами*). В связи с последними экспериментами эти работы были уточнены в работах Штернхеймера, Будини и др. Учет поглощения среды приводит качественно к тем же результатам, что и отказ от классического рассмотрения соударений с малыми параметрами, т. е. к обрезанию спектра излучения Вавилова — Черенкова вблизи полос поглощения и к уменьшению потерь на излучение Вавилова — Черенкова. Учет поглощения также приводит теорию в согласие с экспериментом. Два рассмотренных подхода не исключают, а дополняют друг друга. Если затухание в среде очень мало, то обрезание спектра излучения Вавилова — Черенкова объясняется главным образом соображениями М. Шонберга. Для сред с заметным затуханием обрезание спектра дает просто учет затухания.

1.9. Поле излучения. В дальнейшем при рассмотрении интерференции излучения Вавилова — Черенкова будет удобно рассматривать не все поле, а только ту его часть, которая описывает излучение. Чтобы найти поле излучения, следует провести в интегралах (I.26) и (I.27) замену (I.28). Поле излучения будет описываться слагаемыми под интегралом, содержащим дельта-функции. Остальные слагаемые дают поле, симметричное относительно плоскости $z = vt$. Симметричное поле не описывает потерь энергии частицы и не может быть связано с излучением.

Для поля излучения получается следующий результат^{163,126}:

$$E_{z \text{ в.ч.}} = \frac{q}{c^2} \int_{\epsilon \beta^2 > 1, \omega > 0} \left(\frac{1}{\epsilon \beta^2} - 1\right) J_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{\epsilon \beta^2 - 1} r\right) \cos \frac{\omega}{v} (z - vt) \omega d\omega, \quad (\text{I.57a})$$

$$E_r \text{ в.ч.} = -\frac{q}{v^2} \int_{\epsilon \beta^2 > 1, \omega > 0} \frac{\sqrt{\epsilon \beta^2 - 1}}{\epsilon} J_1\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{\epsilon \beta^2 - 1} r\right) \sin \frac{\omega}{v} (z - vt) \omega d\omega, \quad (\text{I.57б})$$

$$H_\varphi \text{ в.ч.} = -\frac{q}{cv} \int_{\epsilon \beta^2 > 1, \omega > 0} \sqrt{\epsilon \beta^2 - 1} J_1\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{\epsilon \beta^2 - 1} r\right) \sin \frac{\omega}{v} (z - vt) \omega d\omega, \quad (\text{I.57в})$$

где $J_0(x)$, $J_1(x)$ — функции Бесселя.

Во всех интегралах ϵ является функцией от ω . Заметим, что $qE_{z \text{ в.ч.}} (z = vt, r = 0)$ дает тормозящую силу, вызванную реакцией излучения Вавилова — Черенкова на частицу.

1.10. Длительность вспышки излучения. Рассмотрим качественно, как меняется поле излучения Вавилова — Черенкова на больших расстояниях от частицы. Как уже говорилось, поле на больших

*) См. примечание к стр. 214.

расстояниях от заряда представляет собой сумму волн вида (I.36). Эти волны будут испытывать интерференционное усиление, если фазы их близки, т. е. если в некотором интервале частот

$$\frac{\omega}{v} (z - vt) + k_r r - \frac{\pi}{4} = \text{const}$$

или

$$z - vt + vr \frac{dk_r}{d\omega} = 0. \quad (\text{I.58})$$

Если это условие не выполняется, то у волн с близкими частотами фазы различны и волны взаимно гасятся. Обозначим

$$v \frac{dk_r}{d\omega} = g. \quad (\text{I.59})$$

Пусть в интервале частот Вавилова — Черенкова величина g заключена в пределах от $g_{\min}$ до $g_{\max}$. Тогда для данного момента времени t поле излучения будет отлично от нуля в пространстве между конусами¹⁸³

$$z + g_{\min} r = vt \quad \text{и} \quad z + g_{\max} r = vt, \quad (\text{I.60})$$

так как в точках пространства вне этих конусов уравнение (I.58) не имеет корней. Таким образом, в заданной точке r, z поле излучения Вавилова — Черенкова будет отлично от нуля только в течение конечного интервала времени:

$$\Delta t = \frac{g_{\max} - g_{\min}}{v} r. \quad (\text{I.61})$$

Длительность импульса в диспергирующей среде увеличивается с ростом расстояния r от оси z из-за распыливания волнового пакета импульса излучения. Вопрос о длительности вспышки черенковского излучения подробно разобран И. М. Франком⁶⁵.

I. 11. Излучение проводника с током. Выше говорилось об излучении Вавилова — Черенкова точечной заряженной частицы. Очевидно, источником излучения Вавилова — Черенкова может стать любая система зарядов или токов, способная создать электрическое или магнитное поле. Необходимо только, чтобы такая система двигалась в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света в некотором интервале частот. Тогда в этом же интервале частот будет испускаться излучение Вавилова — Черенкова *).

Излучение Вавилова — Черенкова систем электрических зарядов рассматривалось неоднократно^{64, 26, 50, 82}, и мы обсудим некоторые результаты в § I.13. Здесь же мы кратко изложим некоторые результаты А. И. Морозова¹⁴⁸, рассмотревшего излучение Вавилова — Черенкова, создаваемое проводником с током, движущимся в среде с заданными ϵ и μ . Скорости проводников с током в различного рода машинах очень малы по сравнению с фазовой скоростью света в окружающих их средах. Поэтому может показаться, что рассматриваемая задача не представляет практического интереса. Однако уже сейчас в ускорителях и в некоторых видах разряда осуществляются токонесущие пучки частиц, которые перемещаются как целое с большими скоростями, приближающимися или превосходящими фазовую скорость света во многих веществах. Исследование излучения таких пучков представляет интерес, в частности, для проблемы генерации радиоволн сгустками заряженных частиц, а так-

*) Для того чтобы испускалось излучение Вавилова — Черенкова, необходимо еще выполнение некоторого условия, накладываемого на поляризацию волны Вавилова — Черенкова. Это условие будет обсуждено в разделе II.

же в связи с выдвинутыми в последнее время различными методами ускорения частиц, основанными на взаимодействии пучков заряженных частиц с электронной плазмой и друг с другом.

Представим себе бесконечно тонкий прямолинейный проводник с током. Для простоты будем считать проводник нейтральным. Ток в проводнике обозначим через $\mathbf{j}$. Пусть этот проводник перемещается как целое со скоростью $\mathbf{v}$, перпендикулярной $\mathbf{j}$. Выберем систему координат, где $\mathbf{j}$ параллельно оси x , а $\mathbf{v}$ — оси y (рис. 4) и где проводник лежит в плоскости xy . В этой системе координат поле описывается только компонентой вектор-потенциала A_x :

$$A_x = \frac{j}{c} \int \frac{e^{i \frac{\omega}{v} (z - vt) - \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \epsilon \mu \beta^2} |z|}}{\sqrt{1 - \epsilon \mu \beta^2}} \frac{\mu(\omega) d\omega}{\omega}. \quad (I.62)$$

Все остальные компоненты $\mathbf{A}$ и скалярный потенциал ϕ можно считать равными нулю.

Как видно из (I.62), поле движущегося прямолинейного проводника с током представляет собой сумму плоских волн вида

$$e^{i \frac{\omega}{v} (z - vt) - \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \epsilon \mu \beta^2} |z|}.$$

Если не выполнено условие излучения Вавилова — Черенкова, эти волны затухают с ростом $|z|$. Если же $\epsilon \mu \beta^2 > 1$, поле разлагается по незатухающим волнам, т. е. имеет место излучение. Потери энергии на излучение Вавилова — Черенкова единицы длины проводника на единицу пути можно найти, определив компоненту по оси y силы, действующей на проводник со стороны созданного им поля, или подсчитав поток вектора Пойнтинга. Сила, действующая на единицу длины проводника, определяется векторным произведением $\mathbf{j}$ на $\mathbf{H}$:

$$\frac{dW}{dy} = F_y = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}]_y = - \frac{2j^2}{c^2 v} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\mu(\omega) d\omega}{\sqrt{\epsilon \mu \beta^2 - 1}}. \quad (I.63)$$

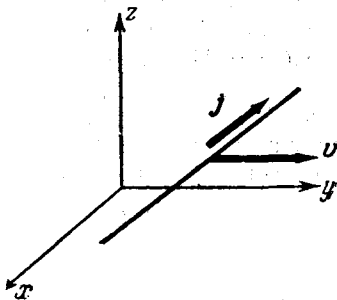


Рис. 4.

Эта формула пригодна для любых $\epsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$, удовлетворяющих условиям

$$\epsilon(\omega) = \epsilon^*(-\omega), \quad \mu(\omega) = \mu^*(-\omega).$$

В случае действительных ϵ и μ область интегрирования сводится к области, где $\epsilon \mu \beta^2 > 1$.

Как видно из формулы (I.63), спектр излучения движущегося проводника с током растет при $v \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$. Если вместо нейтрального проводника с током взять равномерно заряженную нить, движущуюся также со сверхсветовой скоростью, спектр излучения становится пропорциональным $\sqrt{\epsilon \mu \beta^2 - 1}$, т. е. падает при $v \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$.

I. 12. Обращение эффекта Вавилова — Черенкова. Рассмотрим излучение Вавилова — Черенкова с точки зрения наблюдателя, движущегося с электроном. Впервые это было сделано И. Е. Таммом¹⁸³.

В системе, где электрон покоится, среда движется со скоростью $-v$. Поля в системе покоя электрона определяются через поля в системе покоя среды с помощью преобразований Лоренца. Вычисления показывают¹⁸³, что сила, действующая на покоящийся заряд со стороны поля, созданного им в движущейся среде, определяется тем же выражением (1.41), что и сила, действующая на электрон в системе покоя среды. Это означает, что потери энергии на единицу длины (в системе покоя электрона следует говорить о приобретении энергии зарядом) в обеих системах координат равны. Явление увлечения движущейся средой покоящегося заряда можно рассматривать как обращение эффекта Вавилова — Черенкова.

Не только движущаяся среда увлекает заряд, но и движущийся заряд также увлекает среду, передавая ей часть теряемого импульса^{87, 203}. Однако последний эффект не поддается измерению из-за огромной массы среды сравнительно с массой заряженной частицы. Проверить явление увлечения заряда средой трудно по другой причине: мы не можем получить макроскопических объемов вещества, движущихся с необходимыми скоростями. Однако, как указал впервые В. И. Векслер¹⁹¹, в качестве движущейся среды можно использовать достаточно плотные пучки быстрых электронов; покоящийся заряд, помещенный в пучок, будет испытывать ускоряющую силу со стороны пучка быстрых электронов. На этом основан один из вариантов предложенного В. И. Векслером когерентного метода ускорения.

1.13. Интерференция излучения Вавилова — Черенкова. В этом параграфе мы рассмотрим интерференцию излучения Вавилова — Черенкова. Излагаемые здесь результаты получены в основном в работах И. М. Франка^{60, 63, 64} (см. также^{26, 50}).

Пусть в среде движутся с равными скоростями v два точечных заряда равной величины q . Заряды движутся по одной линии на расстоянии l друг за другом. Определение потерь энергии такой системы на излучение Вавилова — Черенкова вычислением потока вектора Пойнтинга дает

$$-\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\text{В.-Ч.}} = \frac{2q^2}{c^2} \int_{\epsilon\beta^2 > 1} \left(1 - \frac{1}{\epsilon\beta^2}\right) \left(1 + \cos \frac{\omega l}{v}\right) \omega d\omega. \quad (1.64)$$

Видно, что спектр излучения рассматриваемой системы из двух зарядов существенно отличается от спектра излучения одного заряда. Эти спектры отличаются множителем

$$2 \left(1 + \cos \frac{\omega l}{v}\right), \quad (1.65)$$

который на частотах, удовлетворяющих условию

$$l = \frac{2\pi v}{\omega} n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.66)$$

ведет к увеличению интенсивности излучения в 4 раза, а на частотах, для которых

$$l = \frac{\pi v}{\omega} (2n + 1), \quad (1.67)$$

обращается в нуль.

Компонента по оси z волнового вектора волны Вавилова — Черенкова равна $\frac{\omega}{v}$, что соответствует длине волны $\lambda_z = \frac{2\pi v}{\omega}$. Поэтому из условий (1.66) и (1.67) следует, что если длина волны укладывается между зарядами целое число раз, то интенсивность излучения такой волны максимальна. Если длина волны укладывается между движущимися зарядами полуцелое число раз, интенсивность излучения равна нулю.

Из этого простого примера видно, что спектр излучения Вавилова — Черенкова систем из нескольких зарядов определяется не только средой, но также и взаимным расположением зарядов в системе. Если система зарядов не обладает симметрией относительно линии движения, то, кроме тормозящей силы, появится еще сила, отклоняющая систему от прямолинейного движения. Все эти явления существенны при исследовании возможностей генерации радиоволн пучками заряженных частиц.

Если в рассмотренном примере считать заряды двух частиц разными по знаку (q и $-q$), знак перед $\cos \frac{\omega l}{v}$ под интегралом в (I.64) меняется:

$$-\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\text{В.-Ч.}} = \frac{2q^2}{c^2} \int_{\epsilon\beta^2 > 1} \left(1 - \frac{1}{\epsilon\beta^2}\right) \left(1 - \cos \frac{\omega l}{v}\right) \omega d\omega. \quad (\text{I.68})$$

Эта формула дает потери на излучение Вавилова — Черенкова электрического диполя с моментом $p = lq$, ориентированного по направлению скорости. Если размеры диполя l малы в сравнении с $\frac{v}{\omega} = \frac{l_z}{2\pi}$, множитель $1 - \cos \frac{\omega l}{v}$ под интегралом может быть разложен в ряд по $\frac{\omega l}{v}$. Ограничение первым, отличным от нуля, членом разложения дает выражение для потерь энергии точечного диполя, ориентированного по направлению скорости⁶⁰,

$$-\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\text{В.-Ч.}} = \frac{p^2}{c^2 v^2} \int_{\epsilon\beta^2 > 1} \left(1 - \frac{1}{\epsilon\beta^2}\right) \omega^3 d\omega. \quad (\text{I.69})$$

Выражение для потерь энергии точечного электрического диполя произвольной ориентации имеет вид

$$-\frac{dW_p}{dz} = \frac{1}{q} (\mathbf{p} \nabla)^2 E_z \Big|_{\substack{z \rightarrow vt \\ r \rightarrow 0}}, \quad (\text{I.70})$$

где E_z определяется формулой (I.57a), $\mathbf{p}$ — вектор дипольного момента, ∇ — оператор градиента. Вычисление дает

$$-\left(\frac{dW_p}{dz}\right)_{\text{В.-Ч.}} = \frac{1}{c^2 v^2} \int_{\epsilon\beta^2 > 1} \left[p_z^2 + \frac{1}{2} p_r^2 (\epsilon\beta^2 - 1) \right] \left(1 - \frac{1}{\epsilon\beta^2}\right) \omega^3 d\omega. \quad (\text{I.71})$$

следует подчеркнуть, что дипольный момент $\mathbf{p}$ измеряется в системе покоя среды.

И. М. Франком получена также формула для потерь энергии произвольно ориентированного точечного магнитного диполя^{*)}:

$$-\left(\frac{dW_\mu}{dz}\right)_{\text{В.-Ч.}} = \frac{1}{c^2 v^2} \int_{\epsilon\beta^2 > 1} \left[\mu_z^2 + \frac{1}{2} \mu_r^2 (\epsilon\beta^2 - 1) \right] \left(1 - \frac{1}{\epsilon\beta^2}\right) \epsilon \omega^3 d\omega. \quad (\text{I.72})$$

Эта формула получена из рассмотрения интерференции излучения двух точечных магнитных зарядов.

Здесь также магнитный момент μ измерен в системе покоя среды. Собственные моменты $\mathbf{p}^0$ и μ^0 , измеренные в системе, где частица

*) Отметим, что для получения выражений (I.71) и (I.72) из электродинамики сплошных сред с магнитной и электрической поляризацией нужно исходить из уравнений для движущихся сред⁶⁴, причем всюду берется одинаковое ϵ .

покоится, связаны с $\mathbf{p}$ и $\boldsymbol{\mu}$ соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}^0 - (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \frac{(\mathbf{p}^0 \mathbf{v}) \mathbf{v}}{v^2} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{p}^0], \\ \boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\mu}^0 - (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \frac{(\boldsymbol{\mu}^0 \mathbf{v}) \mathbf{v}}{v^2} - \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{p}^0]. \end{aligned} \right\} \quad (I.73)$$

Интересно отметить, что к тому же результату (I.72) приводит вычисление потерь энергии на излучение Вавилова — Черенкова замкнутого кольца с током, движущегося в среде со сверхсветовой скоростью (см. I.11). При этом под $\boldsymbol{\mu}$ следует понимать магнитный момент, которым обладает такое кольцо с током.

На движущийся диполь действует также сила, отклоняющая его от прямолинейного пути. Происхождение этой силы может быть объяснено

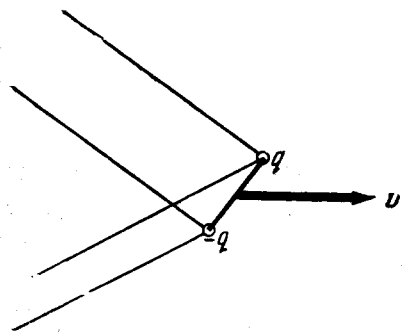


Рис. 5.

следующим примером⁶⁴. Рассмотрим диполь, движущийся со сверхсветовой скоростью и ориентированный, как показано на рис. 5. Вершины конусов излучения, созданных каждым из зарядов, сдвинуты друг относительно друга, и, следовательно, фазы волн, соответствующих обоим зарядам, будут различны. Расстояние l между зарядами считаем малым по сравнению с любыми длинами волн, которые могут излучаться. В этом случае, если фазы волн от обоих зарядов окажутся одинаковыми, то волны будут полностью гасить друг друга, а при возрастании

разности фаз суммарная амплитуда будет возрастать. Поэтому в случае, изображенном на рис. 5, интенсивность излучения, направленного вверх, будет больше, чем излучения, направленного вниз. Следовательно, импульс, уносимый излучением, будет вызывать силу отдачи, стремящуюся отклонить диполь вниз. Величина этой силы для точечного электрического диполя определяется выражением

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{1}{q} (\mathbf{p} \nabla)^2 \left(\mathbf{E}_r + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}]_r \right) \Big|_{\substack{r=0 \\ z=vt}} = \\ &= -\frac{p_r p_z}{c^4} \int_{\epsilon^2 > 1} \left(1 - \frac{1}{\epsilon \beta^2} \right) \epsilon \omega^3 d\omega, \end{aligned} \quad (I.74)$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ определяются равенствами (I.57a), (I.57б) и (I.57в). Отклоняющая сила, действующая на магнитный диполь, получается из (I.74) добавлением под интеграл еще одного множителя, ϵ .

Аналогичным образом можно рассмотреть потери энергии любой жестко заданной конфигурацией зарядов (мультиполей⁶⁴, протяженных зарядов различной формы^{26, 50}).

Для различных приложений (генерация микрорадиоволн пучками заряженных частиц, когерентное ускорение) важно знать, будет ли устойчивым движение заданной системы зарядов — источника излучения. Полное рассмотрение задачи об устойчивости еще не проведено. Качественно об устойчивости движения можно судить по изменению поля внутри сгустка заряженных частиц²⁶. Такое рассмотрение приводит к выводу о неустойчивости движения сгустков, размеры которых малы по сравнению с излучаемой длиной волны.

Излучение равномерно движущегося точечного заряда также может быть представлено как результат интерференции⁶³. Из первого уравнения

системы (I.6) нетрудно найти уравнение для компоненты Фурье A_ω вектор-потенциала:

$$\Delta A_\omega + \frac{\varepsilon(\omega)\omega^2}{c^2} A_\omega = \frac{q}{2\pi} \frac{v}{v} e^{i\frac{\omega}{v}z} \delta(x) \delta(y) = \frac{4\pi}{c} j_\omega \quad (I.75)$$

(для простоты мы положили $\mu = 1$).

Можно рассматривать ток j_ω как ток некоторой поляризации P_ω , распределенной по линии движения заряда. Формально это означает, что мы вводим вспомогательный вектор P_ω , связанный с током j_ω формулой, обычно определяющей ток поляризации:

$$j_\omega = i\omega P_\omega. \quad (I.76)$$

Сравнение с (I.75) дает

$$P_\omega = -\frac{iq}{2\pi\omega} \frac{v}{v} e^{i\frac{\omega}{v}z} \delta(x) \delta(y), \quad (I.77)$$

и уравнение для A_ω принимает вид

$$\Delta A_\omega + \frac{\varepsilon(\omega)\omega^2}{c^2} A_\omega = \frac{4\pi i\omega}{c} P_\omega. \quad (I.78)$$

Из проведенного рассмотрения следует, что компонента частоты ω поля равномерно движущегося заряда может быть в точности имитирована полем непрерывной совокупности неподвижных гармонических осцилляторов, расположенных на траектории электрона и ориентированных по его скорости. Поле заряда получается в результате сложения полей всех таких осцилляторов, расположенных на длине l , равной величине пробега электрона в среде. Производя это суммирование, получим¹⁸³, что амплитуда компоненты поля частоты $\omega = \frac{2\pi c}{n\lambda}$ в точке наблюдения, удаленной от середины отрезка на расстояние R , много большее длины отрезка l (рис. 6), равна

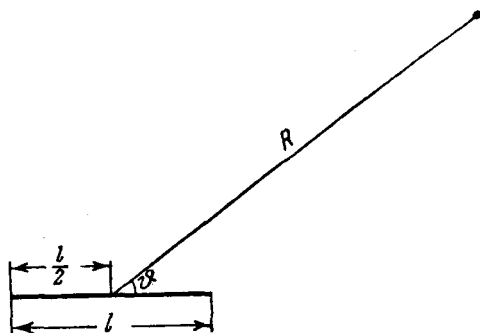


Рис. 6.

$$A_\omega = \frac{q}{\pi} \frac{v}{c} \frac{e^{-\frac{i\omega n R}{c}}}{R} \frac{\sin \left\{ \frac{\pi l}{\beta n \lambda} (1 - \beta n \cos \vartheta) \right\}}{\frac{2\pi c}{n\lambda} (1 - \beta n \cos \vartheta)}. \quad (I.79)$$

При $l \ll \lambda$ поле тождественно с полем точечного диполя, ориентированного по скорости заряда. Таким образом, для пробегов, малых по сравнению с λ , излучение Вавилова—Черенкова имеет такое же угловое распределение, что и обычное дипольное излучение. Для длин пробегов l , сравнимых с λ или больших, появляется характерная направленность излучения. При $l \gg \lambda$ излучение испускается под углом ϑ , определяемым условием (I.19).

1.14. Квантовая теория эффекта Вавилова — Черенкова. Хотя классическая теория эффекта Вавилова — Черенкова хорошо подтверждается опытом, представляет интерес объяснение этого явления с помощью законов сохранения энергии и импульса в квантовой физике. Впервые это было сделано В. Л. Гинзбургом^{73, 74} (см. также^{174, 175, 100, 101, 46, 186} и др.).

Пусть электрон, движущийся через среду со скоростью v , испускает квант света с энергией $h\omega$ в направлении, составляющем угол ϑ с v . После испускания энергия и импульс электрона меняются. Обозначим скорость электрона после испускания кванта через v_1 . Импульс свободного электрона записывается в виде

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (I.80)$$

Наличие среды не меняет выражения для импульса электрона, так как длина волны электрона $\Lambda = \frac{h}{p}$ для быстрой частицы намного меньше межатомных расстояний в среде.

Однако наличие среды существенно сказывается на величине импульса фотона $\pi = \hbar k = \frac{k}{\lambda} \frac{2\pi h}{\lambda}$, так как существенные для эффекта Вавилова — Черенкова длины волн света намного превышают межатомные расстояния в среде. В качестве длины волны света следует брать длину волны не в пустоте ($\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$), а в среде:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega n} \quad (n = \sqrt{\epsilon}). \quad (I.81)$$

Это приводит к следующему выражению для импульса фотона в среде *):

$$\pi = \frac{k}{k} \frac{\hbar \omega n}{c}. \quad (I.82)$$

Законы сохранения энергии и импульса при испускании электроном кванта записываются теперь в виде

$$\left. \begin{aligned} p - p_1 &= \pi, \\ \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p_1^2 + m^2} &= \hbar \omega. \end{aligned} \right\} \quad (I.83)$$

Из этих двух уравнений можно определить $\cos \vartheta$ (рис. 7):

$$\cos \vartheta = \frac{1}{n\beta} \left(1 + \frac{1}{2} \beta \frac{\Lambda}{\lambda} \frac{n^2 - 1}{n} \right), \quad (I.84)$$

где $\Lambda = \frac{h}{mv} \sqrt{1 - \beta^2}$ — комптоновская длина волны электрона до испу-

*) При квантовании электромагнитного поля в диэлектрике на основе тензора энергии-импульса Абрагама для импульса фотона получается выражение

$$\pi = \frac{k}{k} \frac{\hbar \omega}{cn},$$

отличающееся от (I.82) в n^2 раз. Однако в этом случае при излучении^{87, 203} импульс заряженной частицы передается не только кванту, но и среде, причем импульс, переданный диэлектрику, равен

$$\pi_d = \frac{k}{k} (n^2 - 1) \frac{\hbar \omega}{cn}.$$

Суммарный передаваемый импульс $\pi + \pi_d$ в точности равен выражению (I.82). Поэтому все дальнейшие расчеты совпадают.

скания фотона. Второй член в скобках пропорционален h . При $h \rightarrow 0$ получаем классическое условие излучения

Как видно из (I.84), учет отдачи электрона при испускании излучения Вавилова — Черенкова вносит поправки к классическому рассмотрению порядка $\frac{\Lambda}{\lambda}$ — отношения комптоновской длины волны электрона к длине волны фотона.

Квантовые расчеты эффекта Вавилова — Черенкова проводились для частиц спина $\frac{1}{2}$, $\frac{73}{174}$, $\frac{100}{101}$, $\frac{186}{150}$, 1 , $\frac{77}{3}$, $\frac{75}{2}$, $\frac{76}{1}$ и 2 ¹⁶⁵. Общая процедура вычислений такова. Записывается взаимодействие между частицей и электромагнитным полем, квантованным с учетом среды (т. е. с учетом равенства $k = \hbar\omega n/c$). Затем вычисляется матричный элемент этого взаимодействия, отвечающий испусканию электромагнитного кванта. Ниже приводятся результаты этих вычислений для частиц различных спинов.

Частица спина $1/2$ ¹⁷⁵:

$$-\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\text{в.-ч.}} = \frac{q^2}{c^2} \int \left[1 - \frac{1}{n^2 \beta^2} - \frac{\hbar\omega}{pc\beta} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{n^2 \hbar^2 \omega^2}{4p^2 c^2} \left(1 - \frac{1}{n^4} \right) \right] \omega d\omega. \quad (\text{I.85})$$

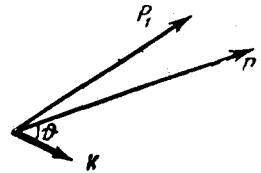


Рис. 7.

Интегрирование проводится по области частот, где выполнено неравенство $\cos \vartheta < 1$ (см. (I.84)). В крайне релятивистском случае ($p \rightarrow \infty$) эта формула переходит в классическую формулу Франка и Тамма.

Частица спина 1. Для такой частицы получены результаты для крайне релятивистского случая⁷⁷:

$$-\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\text{в.-ч.}} = \frac{q^2}{c^2} \int \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \omega d\omega + \frac{q^2 \hbar^2}{4m^2 c^2} \int \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^2 n^2 \omega^3 d\omega. \quad (\text{I.86})$$

Первое слагаемое обусловлено переходами, при которых поляризация частицы (векторного мезона) остается без изменения. Второе слагаемое связано с переходом мезона из начального состояния с продольной поляризацией в конечное состояние с поперечной поляризацией. Оно пропорционально квадрату магнитного момента $\mu \sim \frac{qh}{mc}$ и по форме совпадает с излучением магнитного диполя, перпендикулярного скорости. Различие с (I.72) состоит в замене n^2 на n^4 , которое может быть вызвано допущениями при выводе (I.72).

Частица спина $3/2$. В работе⁷⁵ приводятся результаты для крайне релятивистского случая. Пусть в начальном состоянии проекция спина частицы на направление ее импульса равна $3/2 \hbar$. Тогда

$$-\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\text{в.-ч.}} = \frac{q^2}{c^2} \int \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \omega d\omega + \frac{q^2 \hbar^2}{3m^2 c^2} \int \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^2 n^2 \omega^3 d\omega. \quad (\text{I.87})$$

Первый член получается при переходе без изменения проекции спина (переход $+3/2 \rightarrow +3/2$), второй — при переходе ($+3/2 \rightarrow +1/2$). Других переходов в рассматриваемом предельном случае не происходит. Второе слагаемое также можно рассматривать как излучение магнитного момента.

Частица спина 2. Черенковское излучение частицы со спином 2 было рассмотрено М. Я. Ширококовым¹⁶⁵. Не приводя здесь полученных им довольно громоздких результатов, отметим, что в выражении для излучения Вавилова — Черенкова частицы спина 2 имеются члены, описывающие

как излучение без изменения поляризации, так и квадрупольное и октупольное излучение (частица со спином 2 не обладает дипольным магнитным моментом). Имеются также интерференционные члены.

Таким образом, квантовая теория эффекта Вавилова — Черенкова позволяет не только учесть отдачу, испытываемую зарядом при излучении, но и дает возможность рассмотреть излучение частицы, обладающей спином. Однако среда при этом рассматривается классически. Считается, что излучение происходит в непрерывной среде, оптические свойства которой могут быть описаны показателем преломления или, для немагнитных сред (о которых и идет речь), диэлектрической постоянной. Представляет интерес такое рассмотрение излучения Вавилова — Черенкова, в котором преломляющая среда считается не непрерывной, а состоящей из многих атомов, взаимодействующих с электромагнитным полем и проходящей частице. Такому рассмотрению посвящены работы С. М. Нимтана¹⁵³, Д. А. Тидмана^{187, 188} и У. Фано⁵⁸. В последней работе микротеоория эффекта Вавилова — Черенкова рассмотрена наиболее подробно и последовательно. Автор получает дисперсионное уравнение для электромагнитного поля в среде с помощью метода коллективных переменных, дающего переход от индивидуальных переменных, характеризующих каждую частицу совокупности атомов, к коллективным переменным, характеризующим всю совокупность («среду») в целом*). В качестве коллективных переменных могут быть выбраны, например, плотность частиц, электрический дипольный момент единицы объема и т. д. В результате получается макроскопическое описание среды. Эффект Вавилова — Черенкова и поляризационные потери в такой схеме объясняются взаимодействием проходящей частицы с элементарными возбуждениями.

II. ЭФФЕКТ ВАВИЛОВА — ЧЕРЕНКОВА В КРИСТАЛЛАХ

II.1. Материальные уравнения. Электродинамика кристаллических сред отличается от электродинамики изотропных тем, что диэлектрическая постоянная ϵ и магнитная проницаемость μ в кристаллах являются не скалярными, а тензорными функциями частоты. Уравнения Максвелла в кристалле можно записать формально так же, как и в изотропной среде. Однако соотношение

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (\text{II.1})$$

в кристалле следует понимать как совокупность трех равенств

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \epsilon_{11} E_x + \epsilon_{12} E_y + \epsilon_{13} E_z, \\ D_y &= \epsilon_{21} E_x + \epsilon_{22} E_y + \epsilon_{23} E_z, \\ D_z &= \epsilon_{31} E_x + \epsilon_{32} E_y + \epsilon_{33} E_z, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2})$$

где ϵ_{11} , ϵ_{12} и т. д. — компоненты тензора диэлектрической постоянной. Следовательно, в кристалле вектор $\mathbf{D}$ не направлен по $\mathbf{E}$ и составляет с $\mathbf{E}$ некоторый угол.

Ниже мы не будем учитывать магнитной анизотропии и будем считать $\mu = 1$. Случай магнитной анизотропии разобран в работе В. Е. Пафова¹⁵³. Кроме того, выберем за оси координат главные оси эллипсоида поляризации в кристалле. В выбранной системе отличными от нуля ока-

*) См., например, D. Bohm and D. Pines, Phys. Rev. **82**, 625 (1951); **85**, 338 (1952); **92**, 509 (1953).

зываются только диагональные компоненты тензора диэлектрической постоянной ε_{11} , ε_{22} и ε_{33} , и поэтому соотношение (I.2) между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ существенно упрощается, принимая вид

$$D_\alpha = \varepsilon_\alpha E_\alpha, \quad (\text{II.3})$$

где индексы $\alpha = 1, 2, 3$ соответствуют осям x, y, z .

При переходе к системе главных осей следует иметь в виду, что положения главных осей не остаются неизменными в пространстве. Именно у кристаллов триклинной и моноклинной систем положение главных осей эллипсоида поляризации зависит от частоты. Это явление называется дисперсией осей. Ниже мы не будем учитывать дисперсии осей, имея в виду, что даже в случае триклинной или моноклинной симметрии дисперсия осей в спектральной области излучения Вавилова — Черенкова выражена сравнительно слабо.

II.2. Уравнения для потенциалов. Уравнения Максвелла в кристалле, как уже говорилось, имеют вид (I.1), где, однако, при сделанных нами упрощениях ε следует считать диагональным тензором. Следуя⁷¹, перейдем от уравнений для полей к уравнениям для потенциалов $\mathbf{A}$ и φ , с помощью которых поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ выражаются известным образом (см. (I.3)). Уравнения для потенциалов имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \text{grad div } \mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi, \\ \varepsilon_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varepsilon_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \varepsilon_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \varepsilon \mathbf{A} &= -4\pi\rho. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.4})$$

Эти уравнения формально очень похожи на уравнения для $\mathbf{A}$ и φ в изотропной среде (I.4). Однако следует иметь в виду, что в кристалле, например, вектор $\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$ имеет компоненты $\frac{\varepsilon_x}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}$, $\frac{\varepsilon_y}{c^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2}$ и $\frac{\varepsilon_z}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}$.

Систему уравнений (II.4) можно упростить, положив на потенциалы удачно выбранное дополнительное условие. В электродинамике анизотропной среды можно воспользоваться обобщением условия (I.7), положив⁷¹

$$\text{div } \varepsilon \mathbf{A} = 0. \quad (\text{II.5})$$

Это условие приводит к упрощению второго уравнения системы (II.4), которое теперь принимает вид

$$(\nabla \varepsilon \nabla) \varphi = -4\pi\rho,$$

где

$$(\nabla \varepsilon \nabla) = \varepsilon_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon_z \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{II.6})$$

II.3. Качественное рассмотрение. Таким образом, если выполняется дополнительное условие (II.5), система уравнений для потенциалов электромагнитного поля в кристалле состоит из уравнения (II.6) для φ и уравнения (II.4) для $\mathbf{A}$. Прежде чем проводить решение этих уравнений, приведем качественный анализ, подобный тому, который был проведен в I.1 для случая изотропной среды. Рассмотрим систему уравнений для φ и $\mathbf{A}$ в кристалле при отсутствии токов и зарядов.

В этом случае уравнения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} (\nabla \varepsilon \nabla) \varphi &= 0, \\ \Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \text{grad div } \mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.7})$$

Такой вид уравнения для потенциалов имеют в системе главных осей. В этой системе диэлектрическая постоянная ϵ представляет собой диагональный оператор

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (\text{II.8})$$

Рассмотрим, при каких условиях уравнения (II.7) могут иметь решением плоскую электромагнитную волну (I.15). Подстановка (I.15) в систему уравнений (II.7) дает после простых преобразований следующие два условия:

$$(\mathbf{k}\epsilon\mathbf{k}) = k^2 [s_x^2 \epsilon_x (\mathbf{k}\mathbf{v}) + s_y^2 \epsilon_y (\mathbf{k}\mathbf{v}) + s_z^2 \epsilon_z (\mathbf{k}\mathbf{v})] = 0, \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{s_x^2}{u^2 - u_x^2} + \frac{s_y^2}{u^2 - u_y^2} + \frac{s_z^2}{u^2 - u_z^2} = 0, \quad (\text{II.10})$$

где $u = \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{k} v \cos \vartheta$, $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{k}$, $u_i = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_i}}$; уравнение (II.9), очевидно, представляет собой обобщение уравнения (I.186) на анизотропную среду. Волны, удовлетворяющие условию (II.9), могут испускаться зарядом, движущимся в среде, и на излучение таких волн заряженная частица теряет энергию. Это — поляризационные волны в кристалле.

Рассмотрим теперь условие (II.10), налагаемое на волны, могущие распространяться в среде с заданной скоростью. Это условие тождественно с уравнением, определяющим показатель преломления n в кристалле в направлении $\mathbf{s}$:

$$\frac{s_x^2}{\frac{c^2}{n^2} - u_x^2} + \frac{s_y^2}{\frac{c^2}{n^2} - u_y^2} + \frac{s_z^2}{\frac{c^2}{n^2} - u_z^2} = 0. \quad (\text{II.11})$$

Сравнивая (II.10) и (II.11), получим условие

$$u^2 = v^2 \cos^2 \vartheta = \frac{c^2}{n^2(\mathbf{s}, \mathbf{k}\mathbf{v})}, \quad (\text{II.12})$$

где показатель преломления n зависит от направления нормали к фронту волны и от частоты волны $\mathbf{k}\mathbf{v}$.

Как известно, в кристалле показатель преломления n в данном направлении имеет, вообще говоря, два значения: $n_1(\mathbf{s}, \mathbf{k}\mathbf{v})$ и $n_2(\mathbf{s}, \mathbf{k}\mathbf{v})$. Соответственно этому уравнение (II.12) разбивается на два:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta_1 &= \frac{1}{n_1(\mathbf{s}, \mathbf{k}\mathbf{v}) \beta}, \\ \cos \vartheta_2 &= \frac{1}{n_2(\mathbf{s}, \mathbf{k}\mathbf{v}) \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.13})$$

Совокупность уравнений (II.13) является обобщением условия (I.18a) излучения Вавилова — Черенкова на случай анизотропной среды. В анизотропной среде излучение Вавилова — Черенкова образует, вообще говоря, две сложные конические поверхности. Образующие этих поверхностей определяются двумя уравнениями (II.13). Реальная волна Вави-

лова — Черенкова может существовать лишь при выполнении условий

$$n_1 \beta > 1 \text{ и (или) } n_2 \beta > 1. \quad (\text{II.14})$$

Поэтому при некоторых значениях скорости v может существовать лишь одна коническая поверхность (если выполняется лишь одно из условий (II.14)) или не существует ни одной.

Фазовая скорость волн Вавилова — Черенкова в кристалле определяется равенствами

$$u_{1,2} = \frac{c}{n_{1,2}}. \quad (\text{II.15})$$

Из (II.14) видно, что для волны Вавилова — Черенкова

$$u_{1,2} < v,$$

т. е. и в случае анизотропной среды движущаяся заряженная частица возбуждает лишь такие волны, фазовая скорость которых меньше скорости частицы.

Проведем геометрическое построение, определяющее возможные углы между скоростью заряда в кристалле v и нормалью s к фронту волны Вавилова — Черенкова. Для этого в системе главных осей отложим в каждом направлении от начала координат отрезки, равные фазовым скоростям света $u_{1,2}$ (скоростям по нормали) в данном направлении. Мы получим так называемую поверхность нормалей. Отложим теперь от начала координат вектор скорости заряда v . На рис. 8 изображено одно из сечений поверхности нормалей плоскостью, содержащей вектор v . В сечении

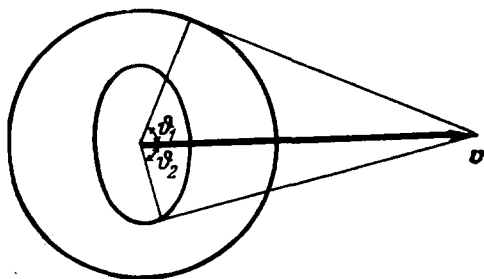


Рис. 8.

получаются две замкнутые кривые, что соответствует двум возможным скоростям в каждом направлении. Данная нормаль u определяет волну Вавилова — Черенкова, если прямая, проведенная через концы векторов u и v , перпендикулярна вектору u . Легко видеть, что в этом случае соблюдается одно из условий (II.14).

II.4. Поляризация волны Вавилова — Черенкова. Однако условие (II.14) не является единственным условием, определяющим излучение Вавилова — Черенкова в кристалле. Важную роль играет поляризация волны. Если заряд излучает электромагнитную волну с электрическим вектором $E e^{ik(x-vt)}$, должно соблюдаться неравенство $q(Ev) < 0$, где q — величина и v — скорость движущегося заряда. Это объясняется тем, что при испускании электромагнитной волны заряд должен совершать работу против поля, причем величина работы, совершаемой на единице пути, пропорциональна $q(Ev)$. Излучение волны, для которой произведение $q(Ev)$ равно нулю или положительно, невозможно, так как оно не сопровождается работой заряда против сил поля. Поэтому, например, в отрицательном одноосном кристалле (где скорость обыкновенных лучей меньше, чем скорость необыкновенных), таком, как исландский шпат, при движении заряда вдоль оптической оси (оптической осью в кристалле называется направление, в котором обе фазовые скорости равны) излучение Вавилова — Черенкова состоит только из конуса необыкновенных волн, хотя фазовая скорость обыкновенных волн в этом случае

заведомо удовлетворяет условию (II.14). Это объясняется тем, что в одноосном кристалле электрический вектор обыкновенной волны всегда перпендикулярен оптической оси (т. е. $\mathbf{E}\mathbf{v} = 0$, так как вектор $\mathbf{v}$ в нашем примере параллелен оптической оси).

Разумеется, отсутствие или наличие потерь энергии на излучение однозначно вытекает из вида решений системы (II.4), которые мы приведем ниже. Тем не менее, изложенные простые соображения, справедливые для каждой гармонике решения, полезно иметь в виду.

Таким образом, в кристалле излучение Вавилова — Черенкова определяется двумя условиями: условием (II.14) и условием $q(\mathbf{E}\mathbf{v}) < 0$, где $\mathbf{E}$ — электрический вектор испускаемой волны. В изотропной среде второе условие всегда может быть выполнено для волн, удовлетворяющих условию (I.20).

II.5. Поле движущейся точечной заряженной частицы. Приведем теперь выражения для потенциалов $\mathbf{A}$ и φ поля заряда, движущегося в кристалле со скоростью $\mathbf{v}$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{2\pi^2} \int e^{ik(x-vt)} \frac{dk}{(k\epsilon k)}, \\ \mathbf{A} &= -\frac{q^2}{2\pi^2 c} \int \Lambda^{-1} \left[\mathbf{s} - \mathbf{k} \frac{(k\epsilon\Lambda^{-1} \mathbf{s})}{(k\epsilon\Lambda^{-1} k)} \right] e^{ik(x-vt)} d\mathbf{k}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.16})$$

где

$$\mathbf{s} = \mathbf{v} - \epsilon \mathbf{k} \frac{k\mathbf{v}}{(k\epsilon k)}, \quad (\text{II.17})$$

$$\Lambda = \epsilon \frac{(k\mathbf{v})^2}{c^2} - k^2. \quad (\text{II.18})$$

Напомним, что в системе главных осей кристалла, которую мы выбрали *), величины Λ и ϵ представляют собой диагональные операторы. Поэтому, например,

$$\left. \begin{aligned} (k\epsilon k) &= \epsilon_x k_x^2 + \epsilon_y k_y^2 + \epsilon_z k_z^2, \\ \epsilon k &= (\epsilon_x k_x, \epsilon_y k_y, \epsilon_z k_z), \\ (k\epsilon\Lambda^{-1}k) &= \frac{\epsilon_x k_x^2}{\Lambda_x} + \frac{\epsilon_y k_y^2}{\Lambda_y} + \frac{\epsilon_z k_z^2}{\Lambda_z}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.19})$$

Формулы (II.16) полностью определяют поле в кристалле, созданное движущимся зарядом. Потенциалы $\mathbf{A}$ и φ можно также определить методом Гамильтона⁷¹.

II.6. Эффект Вавилова — Черенкова в одноосном кристалле. Рассмотрим теперь основные особенности излучения Вавилова — Черенкова в кристалле. Исследованию этого вопроса была посвящена работа В. Л. Гинзбурга⁷¹ и ряд последующих работ — А. А. Коломенского¹¹⁸, М. И. Каганова^{109–113}, В. Е. Пафомова^{152, 154}, И. В. Полубаринова¹⁵⁹, Танака¹⁸⁵ и др.^{170, 172}.

Для простоты мы ограничимся случаем одноосного кристалла и движением точечного заряда параллельно и перпендикулярно его оптической оси. Направим ось z системы главных осей по оптической оси кристалла. Очевидно, в выбранной системе координат $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_r$, $\Lambda_x = \Lambda_y = \Lambda_r$,

*) Ниже, при рассмотрении эффекта Вавилова — Черенкова в гиротропном кристалле, будет дано обобщение формул (II.16), свободное от этого ограничения.

где $\Lambda_\alpha = \varepsilon_\alpha \frac{(kv)^2}{c^2} - k^2$. Ниже мы не будем рассматривать поляризационных потерь, определяемых дисперсионным уравнением (II.9), и будем рассматривать только потери энергии на излучение Вавилова — Черенкова. Волны Вавилова — Черенкова удовлетворяют условию (II.10), или, что то же, условию $(k\varepsilon\Lambda^{-1}k) = 0$. Это уравнение имеет, вообще говоря, два различных корня, что в одноосном кристалле соответствует испусканию обыкновенных и необыкновенных волн. Однако, кроме условия (II.10), волна Вавилова — Черенкова должна еще удовлетворять определенным условиям, налагаемым на поляризацию (см. выше).

Перейдем теперь непосредственно к рассмотрению черенковского излучения заряда в одноосном кристалле в двух основных случаях.

- а) Заряд движется параллельно оптической оси
(по оси z , рис. 9)

В этом случае обыкновенные волны не излучаются, так как вектор электрической напряженности обыкновенной волны в одноосном кристалле перпендикулярен оптической оси, а следовательно, и скорости заряда. Напротив, необыкновенные волны поляризованы так, что всегда имеется отличная от нуля проекция E_z электрического вектора на направление скорости заряда.

Таким образом, при движении заряда по оптической оси одноосного кристалла может излучаться только конус необыкновенных волн. Из соображений симметрии ясно, что этот конус круговой, с равномерным распределением интенсивности по образующим. Получается картина излучения, качественно совпадающая со случаем изотропного тела.

Однако угол, который составляет нормаль к волне Вавилова — Черенкова со скоростью заряда,

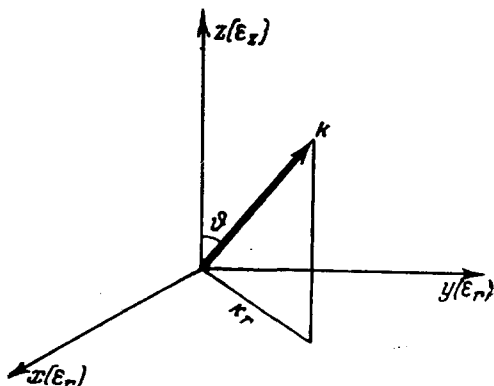


Рис. 9.

а также интенсивность излучения в рассматриваемом случае оказываются иными. Определим, например, из дисперсионного уравнения (II.10) угол, который образует нормаль к фронту волны Вавилова — Черенкова с линией движения заряда. Избавляясь от знаменателей и помня, что в нашем случае $u_x = u_y = u_r$, получаем

$$(u^2 - u_r^2) [(s_x^2 + s_y^2)(u^2 - u_z^2) + s_z^2(u^2 - u_r^2)] = 0. \quad (\text{II.20})$$

Это уравнение имеет два корня. Первый из них, $u^2 = u_r^2$ или $\cos^2 \vartheta = \frac{1}{\varepsilon_r \beta^2}$, отвечает испусканию обыкновенных волн. Но даже в случае $\varepsilon_r \beta^2 > 1$ обыкновенные волны не испускаются зарядом, движущимся по оптической оси, так как они поляризованы перпендикулярно оси. Второй корень дает $\cos^2 \vartheta_e$ для необыкновенной волны:

$$\cos^2 \vartheta_e = \frac{1}{\varepsilon_z \beta^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon_z \beta^2} - \frac{1}{\varepsilon_r \beta^2}}. \quad (\text{II.21})$$

Величины ε_z и ε_r являются функциями частоты ω .

Условие (II.21) можно записать несколько иначе:

$$\cos^2 \vartheta_e = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_z(\omega)}{\varepsilon_r(\omega)} [\varepsilon_r(\omega) \beta^2 - 1]}. \quad (\text{II.21a})$$

Отсюда сразу следует, что излучение необыкновенных волн Вавилова — Черенкова имеет место только в спектральной области, где выполняется неравенство

$$\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_r} (\varepsilon_r \beta^2 - 1) > 0, \quad (\text{II.22})$$

так как только в этом случае $\cos^2 \vartheta_e < 1$.

Более подробное исследование показывает, что радиальная компонента волнового вектора волны Вавилова — Черенкова определяется равенством

$$k_r^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_r} (\varepsilon_r \beta^2 - 1). \quad (\text{II.23})$$

Поэтому при наличии излучения должно выполняться условие (II.22), так как иначе радиальная компонента волнового вектора k_r становится мнимой и поле экспоненциально затухает с ростом расстояния от оси z .

Величину потерь энергии заряда на излучение необыкновенных волн Вавилова — Черенкова можно определить, вычислив силу торможения, действующую на заряд со стороны поля этих волн. Очевидно,

$$\left(\frac{dW}{dz} \right)_{\text{В.-Ч.}} = q \frac{(E v)}{c} \bigg|_{\substack{x=vt \\ k_r^2 > 0}} = - \frac{q}{c v} \left(\mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \bigg|_{\substack{x=vt \\ k_r^2 > 0}}. \quad (\text{II.24})$$

Вычисления дают^{71, 118, 152 *}

$$\left(\frac{dW}{dx} \right)_{\text{В.-Ч.}} = - \frac{q^2}{c^2} \int_{\substack{\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_r} (\varepsilon_r \beta^2 - 1) > 0}} \left| 1 - \frac{1}{\varepsilon_r \beta^2} \right| \omega d\omega, \quad (\text{II.25})$$

где неравенство под интегралом дает область интегрирования.

Формула (II.25) имеет одну интересную особенность. Неравенство (II.22) в прозрачной среде может быть выполнено и при $\varepsilon_r \rightarrow 0$, $\varepsilon_z < 0$. Но тогда подынтегральная функция, дающая спектральную интенсивность излучения Вавилова — Черенкова, обращается в бесконечность, и интеграл потерь расходится. Вопросу определения потерь в этом случае была посвящена работа А. Г. Ситенко и М. И. Каганова¹⁷⁰. Их соображения представляют собой обобщение на анизотропную среду рассуждений^{93, 26}, приведенных в разделе 1.8. Дело в том, что в неравенстве (II.22), дающем спектральную область интегрирования, слева стоит величина $\frac{v^2}{\omega^2} k_r^2$, где k_r — радиальная компонента волнового вектора волны Вавилова — Черенкова (см. формулу (II.23)). При $\varepsilon_r \rightarrow 0$ величина k_r обращается в бесконечность. Это соответствует испусканию бесконечно коротких волн Вавилова — Черенкова. Но такой процесс не может правильно описываться классической электродинамикой среды. Поэтому спектральную область излучения Вавилова — Черенкова при движении заряда по оптической оси одноосного кристалла более правильно определять двойным неравенством

$$k_{r \max}^2 > \frac{\omega^2}{v^2} \frac{\varepsilon_z(\omega)}{\varepsilon_r(\omega)} [\varepsilon_r(\omega) \beta^2 - 1] > 0, \quad (\text{II.26})$$

*) В работе⁷¹ эта формула и последующая формула (II.32) содержат опечатки.

где величина $k_{r \max}$ — максимальное значение волнового числа, при котором еще справедлива макроскопическая электродинамика. Очевидно, при выполнении неравенства (II.26) ε_r не может обратиться в нуль, и интеграл потерь становится конечным.

б) Заряд движется перпендикулярно оптической оси (по оси x , рис. 10)

В этом случае могут излучаться как обыкновенные, так и необыкновенные волны, следовательно, могут одновременно существовать два конуса излучения Вавилова — Черенкова. Раствор конуса обыкновенных волн получается приравниванием нулю первого множителя в уравнении (II.20):

$$\cos \vartheta_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \beta}} = \frac{1}{n_0 \beta}, \quad (\text{II.27})$$

где n_0 — показатель преломления для обыкновенных лучей.

Конус обыкновенных волн, таким образом, является круговым. Однако, как мы увидим, интенсивность излучения неодинакова на различных его образующих.

Приравнивание нулю второго множителя (II.20) дает конус нормалей необыкновенных волн. Положим

$$\left. \begin{aligned} s_x &= \cos \vartheta, \\ s_y &= \sin \vartheta \cos \varphi, \\ s_z &= \sin \vartheta \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.28})$$

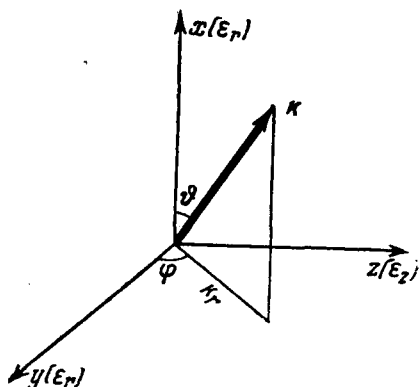


Рис. 10.

(φ — угол между осью y и проекцией волнового вектора на плоскость yz). Тогда для конуса необыкновенных волн получаем

$$\cos^2 \vartheta_e = \frac{\varepsilon_r \cos^2 \varphi + \varepsilon_z \sin^2 \varphi}{(\varepsilon_z - \varepsilon_r) \sin^2 \varphi + \varepsilon_r \varepsilon_z \beta^2}. \quad (\text{II.29})$$

Следовательно, конус необыкновенных волн не является круговым, и раствор конуса зависит не только от частоты, но и от угла φ . Условием излучения является, как обычно, условие, чтобы величина (II.29) не превышала единицу. Это условие можно сформулировать иначе, введя проекцию k_{yz} волнового вектора на плоскость yz и потребовав выполнения неравенства

$$k_{yz}^2 = k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^3} \frac{\varepsilon_r (\varepsilon_z \beta^2 - 1)}{\varepsilon_r \cos^2 \varphi + \varepsilon_z \sin^2 \varphi} > 0. \quad (\text{II.30})$$

Если это неравенство не выполняется, поле экспоненциально затухает по мере удаления от оси x (линии движения заряда), т. е. излучения нет.

Потери энергии на излучение Вавилова — Черенкова определяются с помощью формул (II.16) и (II.24). Получаем^{71, 152, 172}

$$\frac{dW_0}{dx} = -\frac{q^2}{2\pi c^2} \int \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r \beta^2}\right) \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi \, \omega \, d\omega}{\cos^2 \varphi + \frac{1}{\varepsilon_r \beta^2} \sin^2 \varphi}, \quad (\text{II.31})$$

$$\frac{dW_e}{dx} = -\frac{q^2}{2\pi^2 c^2} \int \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_z \beta^2}\right) \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi \, \varepsilon_z(\omega) \, \omega \, d\omega}{(\varepsilon_z \sin^2 \varphi + \varepsilon_r \cos^2 \varphi) (\varepsilon_r \beta^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}, \quad (\text{II.32})$$

где индексами o и e обозначены потери энергии на испускание соответственно обыкновенных и необыкновенных волн. Область интегрирования по ω в интеграле (II.31) определяется неравенством $\epsilon_r \beta^2 > 1$, а в интеграле (II.32) — неравенством (II.30). Интересно отметить, что в плоскости xz ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) не испускаются обыкновенные волны, а в плоскости xy ($\varphi = 0$) не испускаются необыкновенные волны. Это объясняется тем, что векторы электрической напряженности этих волн перпендикулярны скорости заряда.

Спектральное распределение излучения Вавилова — Черенкова при движении заряда перпендикулярно оптической оси можно найти, проведя в (II.31) и (II.32) интегрирование по φ . Предположим, что ϵ_r и ϵ_z — постоянные положительные величины, не зависящие от частоты и удовлетворяющие условиям излучения как обыкновенных, так и необыкновенных волн. Интегрирование по φ для этого случая дает

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW_o}{dx} &= -\frac{q^2}{c^2} \int \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \beta^2}}\right) \omega d\omega, \\ \frac{dW_e}{dx} &= -\frac{q^2}{c^2} \int \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_z \beta^2}}\right) \frac{\omega d\omega}{\sqrt{\epsilon_r \beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.33})$$

Суммарная интенсивность излучения на частоте ω выражается формулой

$$I_e(\omega) + I_o(\omega) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_z \beta^2}}\right) \omega. \quad (\text{II.34})$$

При $\epsilon_r = \epsilon_z$ из (II.34) получаем интенсивность излучения в изотропной среде.

Как видно из этой формулы, суммарная интенсивность излучения зависит от произведения $\epsilon_r \epsilon_z$. Таким образом, при движении заряда перпендикулярно оптической оси появляются дополнительные возможности в смысле увеличения суммарной интенсивности излучения. Из сравнения формулы (II.34) с формулой (II.25), дающей полную интенсивность излучения при движении заряда вдоль оптической оси, видно, что при $\epsilon_z > \epsilon_r$ заряд теряет больше энергии, если движется перпендикулярно оптической оси, если же $\epsilon_z < \epsilon_r$, то заряд теряет больше энергии, если движется вдоль оси. Это обстоятельство может оказаться весьма существенным для изготовления счетчиков Вавилова — Черенкова из кристаллических материалов.

Случай излучения заряда в одноосном кристалле при движении под произвольным углом к оптической оси был исследован в работе К. Танака¹⁸⁵ и ранее В. Е. Пафомовым¹⁵². Благодаря асимметрии конуса излучения Вавилова — Черенкова на движущийся в кристалле заряд действует не только тормозящая сила, но и сила, отклоняющая заряд от прямолинейного движения. Эта сила не зависит от знака заряда. В кристалле имеются направления, при движении по которым заряд не испытывает отклоняющей силы, т. е. направления устойчивого движения. Если скорость заряда составляет с таким направлением некоторый угол, то сила реакции излучения Вавилова — Черенкова стремится вернуть электрон к направлению устойчивого движения.

К эффекту Вавилова — Черенкова в одноосном кристалле примыкает так называемый параметрический эффект Вавилова — Черенкова, рассмотренный Н. А. Хижняком и Я. Б. Файнбергом¹⁵⁹. Рассмотрим среду, состоящую из чередующихся плоских слоев двух изотропных диэлектриков: слой толщины l_1 из диэлектрика ϵ_1 , μ_1 , к нему примыкает слой толщины l_2 из диэлектрика ϵ_2 , μ_2 , затем слой периодически чередуются. Для электромагнитных волн, длина которых достаточно велика по сравнению с $l_1 + l_2$,

рассматриваемая неоднородная изотропная среда ведет себя как одноосный кристалл с оптической осью, перпендикулярной плоским слоям, причем*)

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_r & 0 & 0 \\ 0 & \mu_r & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix},$$

где

$$\varepsilon_r = \frac{l_1 \varepsilon_1 + l_2 \varepsilon_2}{l_1 + l_2}, \quad \mu_r = \frac{l_1 \mu_1 + l_2 \mu_2}{l_1 + l_2},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (l_1 + l_2)}{l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_1}, \quad \mu_z = \frac{\mu_1 \mu_2 (l_1 + l_2)}{l_1 \mu_2 + l_2 \mu_1}.$$

Заряд, движущийся через такую мелкослоистую среду, может излучать волны Вавилова — Черенкова.

Излучение заряда в двуосном кристалле дает более сложную картину, но качественно характер излучения не меняется. Для двуосного кристалла, в отличие от одноосного, существенна дисперсия осей. Если направление движения электрона совпадает с оптической осью для частоты ω , то для других частот уже нельзя считать, что электрон движется по оптической оси.

II.7. Фазовая и групповая скорости волн Вавилова — Черенкова в кристалле. Условия излучения Вавилова — Черенкова в кристалле (II.14) — (II.13) определяют угол, который составляют нормаль $\mathbf{k}$ волны Вавилова — Черенкова и скорость частицы $\mathbf{v}$. Как известно, в кристалле нормаль $\mathbf{k}$ волне не совпадает с направлением потока энергии, которое определяется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

Вектор $\mathbf{S}$ определяет направление распространения луча в кристалле. Для произвольного линейного непоглощающего кристалла направление вектора $\mathbf{S}$ совпадает с направлением групповой скорости волны:

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}},$$

и, таким образом, групповая скорость волны Вавилова — Черенкова направлена иначе, чем фазовая. В то время как фазовая скорость волны Вавилова — Черенкова всегда составляет острый угол со скоростью частицы, ее групповая скорость в некоторых интервалах частот может быть направлена под тупым углом к скорости частицы¹⁵⁴.

Тот факт, что в кристалле групповая скорость волны Вавилова — Черенкова не совпадает с фазовой, приводит к ряду интересных следствий, разобранных В. Е. Пафомовым¹⁵⁴. Одно из этих следствий мы только что указали: луч может составлять тупой угол со скоростью заряда. Вторая особенность касается выбора решений уравнений поля в кристалле.

Следуя¹⁵⁴, рассмотрим движение заряда вдоль оптической оси одноосного кристалла. В этом случае квадрат радиальной компоненты волнового вектора волны Вавилова — Черенкова определяется равенством (II.23). Из этого соотношения k_r определяется с точностью до знака. Запаздывающим потенциалам соответствует положительная проекция волнового вектора на радиус, а опережающим — отрицательная. Обычно в качестве

*) См., например, С. М. Рытов, ЖЭТФ 29, 605 (1955). Имеется в виду поле, усредненное по периоду структуры.

решения берут запаздывающие потенциалы. Однако это можно сделать только тогда, когда поток энергии при этом получается направленным от излучающей частицы, т. е. когда проекции волнового вектора $\mathbf{k}$ и групповой скорости $\mathbf{w}$ на радиус имеют одинаковые знаки. Если же k_r и w_r имеют разные знаки, то энергию от движущегося заряда отводят опережающие потенциалы, которые и должны быть взяты в качестве решения.

II.8. Эффект Вавилова — Черенкова в изотропной оптически активной среде. Выше рассматривался эффект Вавилова — Черенкова в телах, не обладающих оптической активностью (не обнаруживающих вращения плоскости поляризации). Рассмотрим теперь некоторые особенности эффекта Вавилова — Черенкова в средах, обладающих оптической активностью. Такие среды в дальнейшем мы будем также называть гиротропными.

Мы начнем с рассмотрения изотропных гиротропных сред, т. е. таких сред, для которых оптическая активность по всем направлениям одинакова. В качестве классического примера таких сред можно привести водный раствор сахара.

В изотропной гиротропной среде уравнения Максвелла записываются в виде (I.4), как и в обычной изотропной среде. Различие заключено лишь в материальных уравнениях. Предположим, что все векторы поля в изотропной гиротропной среде пропорциональны множителю $e^{ik(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)}$. Тогда материальные уравнения можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} + \frac{i\gamma}{k} [\mathbf{k}, \mathbf{E}], \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} - i \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})}{kc} \gamma \mathbf{E}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.35})$$

где γ — параметр, определяющий вращение плоскости поляризации. (См. например, М. Борн, Оптика, Харьков — Киев, 1937.)

В формуле (II.35) материальные уравнения определены для плоских электромагнитных волн и тем самым для любых полей, так как любые поля могут быть разложены по плоским волнам.

Подстановка волны $e^{ik(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)}$ в систему уравнений Максвелла для изотропной оптически активной среды дает следующее соотношение между k и $k\mathbf{v}$:

$$\left(\frac{k^2 c^2}{(k\mathbf{v})^2} - \epsilon + 2\gamma \right) \left(\frac{k^2 c^2}{(k\mathbf{v})^2} - \epsilon - 2\gamma \right) = 0. \quad (\text{II.36})$$

Это уравнение дает два значения $\frac{k\mathbf{v}}{kc} = \beta \cos \vartheta$, т. е. два значения для угла ϑ между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$:

$$\cos^2 \vartheta_{1,2} = \frac{1}{\beta^2 (\epsilon \pm 2\gamma)}. \quad (\text{II.37})$$

Этим значениям $\cos \vartheta$ отвечают две плоские электромагнитные волны, поляризованные по кругу в противоположных направлениях. Условием излучения Вавилова — Черенкова, следовательно, является выполнение неравенств

$$\beta^2 (\epsilon + 2\gamma) > 1 \quad \text{и (или)} \quad \beta^2 (\epsilon - 2\gamma) > 1. \quad (\text{II.38})$$

В зависимости от скорости заряда в изотропной оптически активной среде может испускаться либо одна волна частоты ω , поляризованная по кругу, либо две, поляризованные по кругу с противоположными направлениями вращения, либо ни одной.

Уравнение (II.36) формально совпадает с уравнением для показателя преломления в изотропной оптически активной среде, если в нем произ-

вести очевидную замену $\frac{kc}{(kv)} = n$. Следовательно, в рассматриваемом случае показатель преломления имеет два значения:

$$n_{1,2}^2 = \epsilon \pm 2\gamma. \quad (\text{II.39})$$

Потери энергии заряда на излучение Вавилова — Черенкова в изотропной оптически активной среде выражаются формулой

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{c^2} \left\{ \int_{n_1^2 \beta^2 > 1} \left(1 - \frac{1}{n_1^2 \beta^2}\right) \omega d\omega + \int_{n_2^2 \beta^2 > 1} \left(1 - \frac{1}{n_2^2 \beta^2}\right) \omega d\omega \right\}, \quad (\text{II.40})$$

где неравенства определяют спектральные области интегрирования*). Если параметр гирации γ стремится к нулю, формула (II.40) переходит в (I.41), где следует положить $\mu = 1$, т. е. дает потери энергии на излучение Вавилова — Черенкова в изотропной среде. Параметр гирации γ имеет по сравнению с ϵ порядок величины $\frac{a}{\lambda}$, где a — размеры молекул среды, λ — длина волны излучения. Поэтому потери энергии на излучение Вавилова — Черенкова в изотропной оптически активной среде мало отличаются от потерь в изотропной среде без оптической активности.

II.9. Эффект Вавилова — Черенкова в гиротропном кристалле. Рассмотрим теперь эффект Вавилова — Черенкова в гиротропных кристаллах. В гиротропных кристаллах тензор диэлектрической постоянной ϵ'_{ik} можно записать в виде

$$\epsilon'_{ik} = \epsilon_{ik} + i\gamma_{ik}, \quad (\text{II.41})$$

где ϵ_{ik} — симметричный тензор диэлектрической постоянной, а γ_{ik} — антисимметричный тензор гирации. Компоненты тензоров ϵ и γ — действительные функции частоты, причем ϵ_{ik} — четные функции ω , а γ_{ik} — нечетные.

Уравнения Максвелла в гиротропном кристалле имеют вид (I.1) с тем отличием, что вместо ϵ следует подставить ϵ' (II.41) и положить $\mu = 1$.

Поле заряда, движущегося равномерно и прямолинейно в гиротропном кристалле, описывается потенциалами (II.16), если в (II.16) заменить ϵ на ϵ' . При этом остаются в силе также формулы (II.17) и (II.18), а соотношения (II.19) заменяются следующими:

$$\left. \begin{aligned} (k\epsilon'_k) &= (k\epsilon k) = \sum_{\alpha, \beta} k_{\alpha} k_{\beta} \epsilon_{\alpha\beta}, \\ \epsilon'_k &= \left(\sum_{\alpha} \epsilon'_{1\alpha} k_{\alpha}, \sum_{\alpha} \epsilon'_{2\alpha} k_{\alpha}, \sum_{\alpha} \epsilon'_{3\alpha} k_{\alpha} \right), \\ (k\epsilon' \Lambda^{-1} s) &= \sum_{\alpha, \beta} k_{\alpha} s_{\beta} (\epsilon' \Lambda^{-1})_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.42})$$

Нетрудно показать, что волны Вавилова — Черенкова в гиротропной среде должны удовлетворять условию

$$(k \cdot \epsilon' \Lambda^{-1} k) = 0. \quad (\text{II.43})$$

Так как по (II.18)

$$\Lambda = \epsilon' \frac{(kv)^2}{c^2} - k^2 = k^2 \left(\frac{\epsilon'}{n^2} - 1 \right) \quad (\text{II.44})$$

*) Поляризационные потери в этом случае, как и в неактивной среде, определяются нулями ϵ .

(мы учли, что $\frac{kc}{kv} = n$), то уравнение (II.43) совпадает с уравнением для определения показателя преломления в гиротропном кристалле. В гиротропном кристалле показатель преломления имеет два значения. Поэтому так же, как и в случае кристалла без оптической активности, угол, который нормаль к волне Вавилова — Черенкова составляет со скоростью частицы, определяется равенствами*)

$$\cos^2 \vartheta_{1,2} = \frac{1}{n_{1,2}^2 \beta^2}. \quad (\text{II.45})$$

Отличие от случая неактивного кристалла заключается в том, что n_1 и n_2 теперь зависят от компонент тензора гирации.

Кроме потерь Вавилова — Черенкова, заряд, движущийся в гиротропном кристалле, может испытывать еще и поляризационные потери — на тех частотах, на которых все компоненты тензоров ϵ и γ одновременно обращаются в нуль. Если ω_a — такое значение частоты, то в окрестности ω_a справедливо разложение

$$\epsilon'_{ik} = (\epsilon_{ik}^\alpha + i\gamma_{ik}^\alpha)(\omega - \omega_a) + \text{члены высшего порядка по } (\omega - \omega_a).$$

Излучение Вавилова — Черенкова в гиротропном кристалле было рассмотрено А. А. Коломенским в 1951 г. с помощью метода Гамильтона, развитого им для случая гиротропной среды¹¹⁹. Квантовая теория эффекта Вавилова — Черенкова в гиротропной среде была дана И. В. Полубариновым¹⁵⁹ в 1953 г. В работе А. Г. Ситенко и А. А. Коломенского¹⁷², появившейся в 1956 г., подробно рассмотрено излучение Вавилова — Черенкова для заряда, движущегося в одноосном гиротропном кристалле. Тензор ϵ' в этом случае имеет вид

$$\epsilon' = \begin{pmatrix} \epsilon_r - i\gamma & 0 & 0 \\ i\gamma & \epsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (\text{II.46})$$

В работе¹⁷² получены выражения для потерь энергии заряда, движущегося в одноосном гиротропном кристалле параллельно и перпендикулярно оптической оси.

Для случая движения заряда параллельно оптической оси потери на излучение Вавилова — Черенкова выражаются формулой

$$\begin{aligned} -\frac{dW}{dz} = \frac{q^2}{v^2} \int_{n_1^2 \beta^2 > 1} \frac{(1 - \epsilon_r \beta^2)(n_1^2 - \epsilon_r) - \beta^2 \gamma}{\epsilon_r (n_2^2 - n_1^2)} \omega d\omega + \\ + \frac{q^2}{v^2} \int_{n_2^2 \beta^2 > 1} \frac{(1 - \epsilon_r \beta^2)(n_2^2 - \epsilon_r) - \beta^2 \gamma}{\epsilon_r (n_1^2 - n_2^2)} \omega d\omega, \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

где $n_{1,2}$ — значения показателя преломления

$$n_{1,2}(\vartheta) = \frac{(\epsilon_r - \epsilon_z) \sin^2 \vartheta + \epsilon_r \epsilon_z (1 + \cos^2 \vartheta) \pm \sqrt{(\epsilon_r^2 - \gamma^2 - \epsilon_r \epsilon_z) \sin^4 \vartheta + 4\gamma^2 \epsilon_z \cos^2 \vartheta}}{2(\epsilon_r \sin^2 \vartheta + \epsilon_z \cos^2 \vartheta)} \quad (\text{II.48})$$

под углами ϑ , определяемыми условием излучения (II.45). Выражения для потерь при движении перпендикулярно оптической оси оказываются

*) Для реального существования волны Вавилова — Черенкова необходимо также выполнение соответствующих условий, налагаемых на поляризацию волны (см. выше).

довольно громоздкими, но, как и в случае изотропной оптически активной среды, параметр γ имеет порядок $\frac{a}{\lambda}$ по сравнению с ϵ , и отличие от случая негиротропного кристалла, по-видимому, невелико.

II. 10. Эффект Вавилова — Черенкова в электронной плазме, помещенной в магнитном поле. Оптическая активность может быть вызвана искусственным путем — наложением на среду магнитного поля. Для теории эффекта Вавилова — Черенкова наиболее интересным случаем такой среды, в которой наложение магнитного поля вызывает оптическую активность, является электронная плазма. Если на электронную плазму не накладывать магнитного поля, в ней вообще невозможен эффект Вавилова — Черенкова, так как диэлектрическая постоянная электронной плазмы

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \quad \left(\omega_0^2 = \frac{4\pi n e^2}{m} \right) \quad (\text{II. 49})$$

меньше единицы. В. И. Векслер указал, что эффект Вавилова — Черенкова в электронной плазме может стать возможным, если плазму поместить в магнитное поле. Рассмотрение этого явления было проведено А. А. Коломенским^{116, 117, 120}.

Электронная плазма, помещенная в однородное магнитное поле, ведет себя как одноосный гиротропный кристалл с оптической осью, параллельной наложенному полю. Тензор диэлектрической постоянной плазмы в магнитном поле имеет вид (II. 46), где

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_H^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, & \epsilon_z &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, & \gamma &= \frac{\omega_0^2 \omega_H^2}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}, \\ & & & & & \left(\omega_H = \frac{eH}{mc} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 50})$$

Определение показателя преломления n из уравнения (II. 43) показывает, что излучение Вавилова — Черенкова оказывается возможным в двух областях частот:

$$\text{а) } \omega < \omega_0 \quad \text{и} \quad \text{б) } \omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}. \quad (\text{II. 51})$$

В релятивистском случае ($\beta = 1$) излучаются только волны, занимающие спектральную область (б). Интересно отметить, что в плазме, помещенной в магнитное поле, излучение Вавилова — Черенкова имеет место и при малых скоростях заряда ($\beta \ll 1$).

В работе¹²⁰ определены потери энергии на излучение Вавилова — Черенкова зарядом, движущимся в плазме с магнитным полем вдоль оптической оси (параллельно наложенному полю).

Мы приведем результат, который получается для крайне релятивистского случая ($\beta = 1$). Потери на излучение выражаются формулой

$$-\frac{dW}{dx} = \frac{q^2 \omega_0^2}{2c^2} \int \frac{\omega d\omega}{(\omega_H - \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}) \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}, \quad (\text{II. 52})$$

где интегрирование проводится по области (II. 51б). Логарифмическая расходимость интеграла (II. 52) на верхней границе (при $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}$) объясняется тем, что граничной частоте соответствует нулевая длина волны. Поэтому на верхней границе результатами макроскопической теории пользоваться нельзя (см. раздел I.8 и (II. 6а)). Интеграл (II. 52) следует обрезать на некоторой граничной частоте

$$\omega_{\max} < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2},$$

соответствующей минимально допустимой в макроскопической теории длине волны.

Поляризационных потерь в плазме с магнитным полем нет, так как не существует частоты, на которой ϵ_1 , ϵ_2 и γ (II.50) одновременно обращаются в нуль.

Электронная плазма с магнитным полем встречается в разнообразных природных условиях, например в случае земной ионосферы, находящейся в магнитном поле Земли, или в случае ионизированной атмосферы Солнца и звезд. Через эти области пространства проходят потоки заряженных космических частиц различной скорости. Поэтому генерация излучения Вавилова — Черенкова может оказаться довольно распространенным явлением.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА*)

(как правило, приводится не заглавие статьи, а краткая аннотация)

1. M. Abele, Эффект Черенкова в волноводе, частично заполненном диэлектриком, *Nuovo Cim., Suppl.*, т. IX, сер. IX, 207 (1952).
2. А. И. Ахизер, О взаимодействии электромагнитных волн с заряженными частицами и о колебаниях электронной плазмы, № 4, 591 (1956).
3. А. И. Ахизер, Г. Л. Любарский, Я. Б. Файнберг, Об эффекте Черенкова и сложном эффекте Допплера, *ДАН* **73**, 55 (1950).
4. А. И. Ахизер, А. Г. Ситенко, Потери энергии заряда в электронной плазме, *ЖЭТФ* **23**, 161 (1952).
5. А. И. Ахизер, Я. Б. Файнберг, Медленные электромагнитные волны, *УФН* **44**, 321 (1951).
6. W. Anderson, E. H. Belcher, Стандартный источник света очень малой интенсивности, основанный на эффекте Черенкова, *British J. App. Phys.* **5**, 53 (1954).
7. A. Ascoli Balzanelli, R. Asoli, Эффект Черенкова в воздухоподобных средах, *Nuovo Cim.* **10**, 1345 (1953).
8. A. Ascoli Balzanelli, R. Asoli, Эксперименты по эффекту Черенкова в воздухе, *Nuovo Cim.* **11**, 562 (1954).
9. C. Baccalin, P. Bassi, C. Manducini, Регистрация протонов в космических лучах, *Nuovo Cim.* **1**, 657 (1955).
10. N. L. Balazs, Об излучении Черенкова, *Amer. Journ. Phys.* **24** (4), 185 (1956).
11. F. Barclay, J. V. Jelleu, Черенковское и изотропное излучения единичных μ -мезонов в воздухе, *Nuovo Cim.*, сер. X, **2**, 27 (1955).
12. P. R. Barker, D. M. Binnie, B. D. Huams, R. J. Ront, J. Shepherd, Использование черенковских счетчиков для регистрации быстрых тяжелых частиц, *Phil. Mag.* **46**, 300 (1955).
13. P. R. Barker, D. M. Binnie, B. D. Huams, P. J. Ront, J. Shepherd, то же, что и в 12, *Phil. Mag.* **46**, 307 (1955).
- 14*. P. Bassi, О черенковских счетчиках, *Nuovo Cim.* **8**, 807 (1951).
- 15*. P. Bassi, A. M. Bianchi, C. Manduchi, Попытка измерить интенсивность черенковского излучения в зависимости от энергии отдельных частиц, *Nuovo Cim.* **9**, 861 (1952).
16. P. Bassi, A. M. Bianchi, Вопросы техники счетчиков черенковского излучения, *Nuovo Cim.* **9**, 1087 (1952).
17. A. Battig, Диссертация по теории эффекта Черенкова. Instituto de Fisika. Universidad Nacional del Tucuman, Argentina, Публикация № 591, **30** (1951).
- 18*. Z. Bay, M. R. Cleland, F. McLernon, Разрешающая способность схемы совпадений на черенковских счетчиках, *Phys. Rev.* **87**, 901 (1952).
- 19*. G. Beck, Эффект Черенкова и переходное излучение, *Phys. Rev.* **74**, 795 (1948).
- 20*. E. H. Belcher, Люминесценция водных растворов радиоактивных изотопов и эффект Черенкова, *Nature* **170**, 571 (1952).
21. E. H. Belcher, Люминесценция облученных прозрачных сред и эффект Черенкова, *Proc. Roy. Soc.* **A216**, 90 (1953).

*) Звездочкой отмечены работы, опубликованные на русском языке в сборнике «Проблемы современной физики» № 7, ИЛ, 1953.

22. R. W. Birge, *Phys. Rev.* **85**, 766 (1952). Описание черенковского счетчика.
23. P. M. S. Blacket, Возможный вклад черенковского излучения, испускаемого космическими лучами, в свечение ночного неба, *Gassiot. Comm. of the Roy. Soc.*, стр. 34 (1948); см. также *Phys. Abstr.* **52**, № 4347 (1949).
24. Д. И. Блохинцев и В. Л. Инденбом, Эффект Черенкова для мезонного поля, *ЖЭТФ* **20**, 1123 (1950).
25. Л. С. Богданкевич и Б. М. Болотовский, Прохождение заряда параллельно оси цилиндрического канала в диэлектрике, *ЖЭТФ* (в печати).
26. Б. М. Болотовский, Прохождение точечных и протяженных зарядов через вещество. Диссертация. Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР, Москва, 1954.
27. Б. Болотовский и А. Коломенский, О потерях энергии движущегося заряда, *ДАН* **85**, 59 (1952).
28. Н. Бор, Прохождение атомных частиц через вещество, Москва, ИЛ, 1950.
29. О. Бор, Влияние взаимодействия атомов на прохождение атомных частиц через вещество. Приложение к книге Н. Бора²⁸.
- 30*. P. Budini, О потерях энергии релятивистской ионизирующей частицей в веществе и об излучении Черенкова, *Nuovo Cim.* **10**, 236 (1953); *Phys. Rev.* **89**, 1147 (1953).
31. P. Budini, L. Taffara, Ионизация и излучение Черенкова, *Nuovo Cim.* **10**, 1489 (1953).
32. O. Chamberlain, E. Segré, G. Wiegand, T. Ypsilantis, Применение черенковских счетчиков для регистрации антипротонов, *Phys. Rev.* **100** 947 (1955).
33. В. Н. Цытович, Излучение быстрых электронов, вращающихся по окружности в среде, *Вестник МГУ* **11**, 27 (1951).
34. П. А. Черенков, Видимое свечение чистых жидкостей под действием γ -радиации, *ДАН* **2**, 451 (1934).
35. П. А. Черенков, Влияние магнитного поля на видимое свечение жидкостей, вызываемое гамма-лучами, *ДАН* **3** (12), 413 (1936).
36. П. А. Черенков, Видимое излучение, испускаемое электронами, движущимися в среде со скоростями, превышающими скорость света, *Phys. Rev.* **52**, 378 (1937).
37. П. А. Черенков, Свечение чистых жидкостей под действием быстрых электронов, *Изв. АН, ОМЭН, сер. физ.*, № 4—5, 455—492 (1937).
38. П. А. Черенков, Видимое свечение чистых жидкостей под действием жестких γ -лучей, *ДАН* **14**, 99 (1937).
39. П. А. Черенков, Угловое распределение интенсивности свечения, вызываемого в чистых жидкостях γ -лучами, *ДАН* **14**, 103 (1937).
40. П. А. Черенков, Абсолютный выход свечения, вызываемого быстрыми электронами, *Изв. АН, ОМЭН*, стр. 760 (1938).
41. П. А. Черенков, Спектр свечения, вызываемого быстрыми электронами, *ДАН* **20**, 653 (1938).
42. П. А. Черенков, Абсолютный выход свечения, вызываемого электронами, движущимися в среде со сверхсветовой скоростью, *ДАН* **21**, 117 (1938).
43. П. А. Черенков, Пространственное распределение видимого излучения вызываемого быстрыми электронами, *ДАН* **21**, 323 (1938).
44. П. А. Черенков, Излучение электронов при движении их в веществе со сверхсветовой скоростью. Труды Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР **2**, № 4 (1944).
- 45*. G. Collins, V. Reiling, Экспериментальная проверка теории Франка и Тамма, *Phys. Rev.* **54**, 499 (1938).
- 46*. R. T. Cox, Импульс и энергия фотона и электрона в черенковском излучении, *Phys. Rev.* **66**, 106 (1944).
47. F. S. Dainton, Связь черенковского излучения с биологическими эффектами ионизации, *Ann. Rep. Chem. soc.* **45**, 5 (1949).
48. M. Danos, S. Geschwind, H. Lashinsky, A. Trieg, Эффект Черенкова в микроволновой области, *Phys. Rev.* **92**, 828 (1953).
49. M. Danos, H. Lashinsky, Генерация миллиметровых радиоволн, *IRE Trans. MTT-2* (3), 21 (1952).
50. M. Danos, Излучение Черенкова от протяженных электронных пучков, *Appl. Phys. (USA)* **26**, 2 (1955); см. также *Bull. Am. Phys. Soc.* **29** (1), 21 (1954).
- 51*. K. G. Dedrick, Влияние многократного рассеяния на угловую ширину черенковского излучения, *Phys. Rev.* **87**, 891 (1952).
52. P. I. Dee, W. T. Richards, *Nature* **168**, 736 (1951).
- 53*. R. H. Dicke, Попытка регистрации космических лучей по черенковскому излучению, *Phys. Rev.* **71**, 737 (1947).

- 54*. T. Duerden, B. D. Huams, Селективное устройство, позволяющее отделять слабый поток протонов космических лучей на уровне моря от большого фона μ -мезонов и электронов, *Phil. Mag.* **43**, 717 (1952).
55. F. X. Eder, Обзорная статья *Funk und Ton* **3**, 67 (1949).
56. В. Я. Эйдман, О черенковском излучении частицы, обладающей дипольным магнитным моментом. Труды Горьковского исследовательского физико-технического института и радиофизического факультета ГГУ. Ученые записки XXX, сер. физ. (1956).
57. Эффект Черенкова и поляризационные потери. Сборник переводов иностранной периодической литературы из серии «Проблемы современной физики», № 7, ИЛ, 1953.
58. U. Fano, Микротекория эффекта Черенкова, *Phys. Rev.* **103**, 1202 (1956).
- 59*. E. Fermi, Ионизационные потери энергии в газах и конденсированных средах, *Phys. Rev.* **57**, 485 (1940).
60. И. М. Франк, Эффект Допплера в преломляющей среде, *Изв. АН СССР*, сер. физ. **6**, 3 (1942).
61. И. М. Франк, тот же вопрос, *J. Phys. USSR* **7**, 49 (1943).
62. И. М. Франк, Излучение электронов, движущихся в веществе со сверхсветовой скоростью, *УФН* **30**, 149 (1946).
63. И. М. Франк, Явление интерференции для радиации Черенкова, *ДАН* **42**, 354 (1944).
64. И. М. Франк, Излучение Черенкова для мультиполей. Сборник «Памяти С. И. Вавилова». Изд. АН СССР, Москва, 1952, стр. 172.
65. И. М. Франк, Длительность вспышки в эффекте Вавилова — Черенкова, *УФН* **53**, 111 (1955).
66. F. A. Fuertes, Об излучении, испускаемом электронами при равномерном движении. Instituto de Fisica. Universidad Nacional del Tucuman, Argentina, Публикация № 465.
67. W. Galbraith, J. V. Jelleu, Сообщение о световых вспышках ночного неба, связанных с ливнями в космических лучах, *Nature* **171**, 349 (1953).
68. W. Galbraith, J. V. Jelleu, Световые вспышки ночного неба и черенковское излучение; см. также (104). *Atm. Terr. Phys.* **6**, 250 (1955).
- 69*. I. A. Getting, Использование конуса из прозрачного вещества для фокусирования черенковского излучения в параллельный пучок. *Phys. Rev.* **71**, 123 (1947).
70. В. Л. Гинзбург, К квантовой электродинамике, III, *ДАН* **24**, 131 (1939).
71. В. Л. Гинзбург, Излучение электрона, движущегося с постоянной скоростью в кристалле, *ЖЭТФ* **10**, 608 (1939).
72. В. Л. Гинзбург, та же тема, *J. Phys. USSR* **3**, 101 (1940).
73. В. Л. Гинзбург, Квантовая теория излучения электрона, равномерно движущегося в среде, *ЖЭТФ* **10**, 589 (1940).
74. В. Л. Гинзбург, та же тема, *J. Phys. USSR* **2**, 441 (1940).
75. В. Л. Гинзбург, Эффект Черенкова для частицы со спином $3/2$, *ЖЭТФ* **12**, 425 (1942).
76. В. Л. Гинзбург, та же тема, *J. Phys. USSR* **7**, 115 (1943).
77. В. Л. Гинзбург, Эффект Черенкова для векторного мезона, *J. Phys. USSR* **5**, 47 (1941).
78. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую, *ЖЭТФ* **16**, 15 (1946).
79. В. Л. Гинзбург, Об излучении электрона, движущегося вблизи диэлектрика, *ДАН* **53**, 145 (1947).
80. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, Об эффекте Допплера при сверхсветовой скорости, *ДАН* **56**, 583 (1947).
81. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, Излучение электрона и атома, движущихся по оси канала в плотной среде, *ДАН* **56**, 699 (1947).
82. В. Л. Гинзбург, Об использовании эффекта Черенкова для генерации радиоволн, *ДАН* **56**, 145 (1947).
83. В. Л. Гинзбург, Об излучении микрорадиоволн и их поглощении в воздухе (о применении эффекта Черенкова для генерации радиоволн), Изд. АН СССР, сер. физ. **11**, 165 (1947).
84. В. Л. Гинзбург, О черенковском излучении магнитного диполя. Сборник «Памяти С. И. Вавилова». Изд. АН СССР, Москва, 1952, стр. 193.
85. В. И. Гольданский и Г. Б. Жданов, О черенковском излучении космических частиц в атмосфере, *ЖЭТФ* **26**, 405 (1954).
86. M. A. Grienfield, A. Norman, A. H. Dowdy, P. M. Krazt, Измерения спектрального распределения черенковского излучения, *J. Opt. Soc. Amer.* **43**, (1), 42 (1953).

87. Gyorgyi Geza, Тензор энергии-импульса Абрагами и условие черенковского излучения, *Magyar Fizikai Folyoirat* **3**, 369 (1955).
- 88*. J. M. Harding, K. E. Henderson, Эксперименты по черенковскому излучению вблизи порога. *Phys. Rev.* **74**, 1560 (1948).
89. S. Hayakawa, K. Kitao, Потери энергии заряженной частицей, движущейся в сверхпроводнике, *Progr. Theor. Phys.* **16**, 131 (1956).
90. E. Heiberg, J. Marshall, Устройство для преобразования спектрального состава черенковского излучения, *Rev. Scient. Instr.* **27**, 618 (1956).
91. N. Horwitz, Измерение потока α -частиц в космических лучах с помощью черенковского счетчика, *Phys. Rev.* **98**, 165 (1955).
92. P. Hubert, Популярная статья, *Atomes*, № 112, p. 224 (1955).
- 93*. M. Huysbrechts, M. Schönlberg, Ионизация при релятивистских энергиях и поляризационный эффект, *Nuovo Cim.* **9**, 764 (1952).
94. Д. Д. Иваненко, В. С. Гургенидзе, Эффект Черенкова в ферромагнетике, *ДАН* **67**, 997 (1949).
95. Д. Д. Иваненко, В. С. Гургенидзе, тот же вопрос, *Вестник МГУ*, № 2, 69 (1950).
96. Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов, Классическая теория поля. Изд. 2, М.—Л., 1951, § 27. Изложение классической теории эффекта Черенкова.
97. Д. Д. Иваненко, Е. Н. Цытович, тот же вопрос, что и в^{94, 95}, *ЖЭТФ* **28** 291 (1955).
98. В. Л. Инденбом, Нетормозное рождение мезонов, *ЖЭТФ* **21**, 737 (1951).
99. P. Janssens, M. Huysbrechts, Потери энергии на соударения в среде, *Centre de physique nucleaire Université libre de Bruxelles*, № 29, April (1951).
100. J. M. Jauch, K. M. Watson, Квантовая теория эффекта Черенкова, *Phys. Rev.* **74**, 1485 (1948).
101. J. M. Jauch, K. M. Watson, тот же вопрос, *Phys. Rev.* **75**, 1249 (1949).
102. J. V. Jelley, Регистрация заряженных частиц космического излучения по эффекту Черенкова в дистиллированной воде, *Proc. Phys. Soc.* **A64**, 82 (1951).
103. J. V. Jelley, W. Galbraith, Световые вспышки ночного неба, *Phil. Mag.* **44**, 619 (1953).
104. J. V. Jelley, W. Galbraith, Вторая часть работы⁶⁸ *J. Atm. Terr. Phys.* **6**, 304 (1955).
105. J. V. Jelley, Обзорная статья, *Atomics* **4**, 81 (1953).
106. J. V. Jelley, Обзорная статья, *Progr. Nucl. Phys.* (Frisch) **3**, 84 (1953). Перевод на русский язык, см. *УФН* **58**, 231 (1956).
107. J. V. Jelley, Расчет черенковского счетчика для протонного синхротрона Бирмингемского университета, *AERE Report*, № NP/R 1770.
108. M. H. L. Jester, Спектрометр γ -квантов, *University of California, Radiation Laboratory Report*, N UCRL 2990.
109. М. И. Каганов, Движение заряженной частицы в анизотропном диэлектрике с осевой симметрией, *ЖТФ* **23**, 507 (1953).
110. М. И. Каганов, Излучение заряда, движущегося равномерно по окружности в анизотропном диэлектрике. Труды физического отделения физ.-матем. факультета Харьковского гос. ин-та им. А. М. Горького **4**, стр. 67 (1953).
111. М. И. Каганов, Пучок в цилиндрическом волноводе, нагруженном анизотропным диэлектриком, *ЖТФ* **23**, 517 (1953).
112. М. И. Каганов, Пучок в цилиндрическом волноводе, нагруженном анизотропным диэлектриком (кинетическая теория), *ЖТФ* **23**, 523 (1953).
113. М. И. Каганов, Взаимодействие заряженных частиц с медленными волнами в анизотропном диэлектрике. Диссертация. Харьковский гос. ун-т им. В. И. Ленина, Харьков, 1954.
114. A. Kautz, R. Hofstadter, Черенковские счетчики для частиц большой энергии, *Nucl.* **12** (3), 36 (1954).
115. Н. Клепиков, К вопросу о переходном излучении, *Вестник МГУ*, № 8 (1952).
116. А. А. Коломенский, Излучение электрона, равномерно движущегося в электронной плазме, помещенной в постоянное магнитное поле. Отчет ФИАН, 1951.
117. А. А. Коломенский, Прохождение заряженной частицы через диэлектрик или электронную плазму, помещенные в магнитное поле. Отчет ФИАН, 1952.
118. А. А. Коломенский, Излучение Черенкова и поляризационные потери в одноосном кристалле, *ДАН* **86**, 1097 (1952).
119. А. А. Коломенский, Эффект Черенкова в гиротропной среде, *ЖЭТФ* **24**, 167 (1953).
120. А. А. Коломенский, Излучение электрона, равномерно движущегося в электронной плазме, помещенной в магнитное поле, *ДАН* **106**, 982 (1956).

121. Л. Д. Ландау, Приложение редактора перевода к книге Н. Бора (см. ²³).
122. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Макроскопическая электродинамика, Гостехиздат, М.—Л., 1957.
123. H. Lashinsky, Излучение Черенкова от протяженных электронных пучков, движущихся вблизи среды с комплексным показателем преломления, Columbia University Radiation Laboratory, N.-Y., 1953.
124. M. A. Lampert, Взаимодействие электромагнитной волны со сверхсветовым пучком электронов, Phys. Rev. **102**, 299 (1956).
125. J. D. Lawson, Связь между черенковским и тормозным излучением, Phil. Mag. **45**, 748 (1954).
126. М. Л. Левин, Взаимодействие двух параллельно летящих черенковских электронов, ЖЭТФ **20**, 381 (1950).
127. В. М. Ленченко, Потери энергии быстрых заряженных частиц, проходящих через вещество с постоянной скоростью. Диссертация. Среднеазиатский Гос. ун-т им. В. И. Ленина, Ташкент, 1955.
128. Yin-yuan Li, Угловая ширина конуса черенковского излучения, Phys. Rev. **80**, 104 (1950).
129. Yin-yuan Li, Поправки к предыдущей работе, Phys. Rev. **82**, 281 (1951).
130. S. J. Lindenbaum, A. Persner, Описание черенковского счетчика, Rev. Sc. Instr. **25**, 285 (1954).
131. J. G. Linhart, Излучение Черенкова при движении заряда параллельно границе диэлектрика, J. Appl. Phys. (USA) **26**, 527 (1955).
132. J. G. Linhart, Обзорная статья, Research **8** (10), 402 (1955).
133. J. Linsley, Регистрация многократно заряженных первичных космических частиц с помощью черенковских счетчиков, Phys. Rev. **93**, 899 (1954).
134. J. Linsley, тот же вопрос, Phys. Rev. **97**, 1292 (1955).
135. J. Linsley, N. Horgwitz, Описание черенковских счетчиков с тонкими люсительными радиаторами, Rev. Sc. Instr. **26**, 557 (1955).
- 136—138. L. Mallet, Спектральные исследования люминесценции воды и других сред под действием γ -излучения. Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **183**, 274 (1926); **187**, 222 (1929); **188**, 445 (1929).
139. M. Mando, Черенковские счетчики без фокусировки, Nuovo Cim. **12**, 5 (1954).
140. J. Marshall, Черенковские счетчики для быстрых электронов, Phys. Rev. **81**, 275 (1951).
141. J. Marshall, Регистрация частиц по черенковскому излучению, Phys. Rev. **86**, 685 (1952).
142. J. Marshall, Обзор по черенковским счетчикам, App. Rev. Nucl. Sci. **4**, 141 (1954).
143. L. Marshall, Черенковское излучение и спектр радиоизлучения солнца. Preprint. The Enrico Fermi Institute for Nuclear Studies, The University of Chicago, 1956. (Astron. Journ. **124**, 601—604, 1956; см. так же ²¹³.)
144. R. L. Mather, Определение энергии протонов с помощью черенковского детектора, Phys. Rev. **84**, 181 (1951).
145. J. W. Mather, E. A. Martinelli, Рождение нейтральных мезонов на водороде протонами с энергией 340 Мэв; применение черенковских счетчиков, Phys. Rev. **92**, 780 (1953).
146. J. W. Mather, E. A. Martinelli, Описание черенковского счетчика, University of California Radiation Laboratory Report, № 1646.
147. E. Mauger, H. Kolz, Обзорная статья, Zs. Angew. Phys. **2**, 223 (1950).
148. А. И. Морозов, Эффект Черенкова для проводника с током, Вестник МГУ, Серия физ.-матем. № 1, 72, 1957 г.
149. С. Muzikar, Эффект Черенкова в волноводе, заполненном диэлектриком, Czech. Journ. Phys. **5** (1), 9 (1955).
150. S. M. Neamtan, Квантовая теория эффекта Черенкова, Phys. Rev. **92**, 1362 (1953).
151. K. W. Ogilvie, Применение черенковского счетчика в измерениях протонной компоненты космических лучей, Canad. Journ. Phys. **33** (9), 555 (1955).
152. В. Е. Пафомов, Эффект Черенкова в анизотропной среде. Дипломная работа. МГУ, физический факультет, 1952.
153. В. Е. Пафомов, Излучение Черенкова в анизотропных ферритах, ЖЭТФ **30**, 761 (1956).
154. В. Е. Пафомов, О распространении черенковских лучей в кристаллах, ЖЭТФ **32**, 360 (1957).
155. В. Е. Пафомов, Излучение заряда, движущегося параллельно плоской поверхности раздела двух диэлектриков, ЖЭТФ **32**, 10 (1957).
156. В. Е. Пафомов, Излучение заряда при прохождении через плоскую пластинку, ЖЭТФ (в печати).
157. J. R. Pierce, Взаимодействие движущихся зарядов с волновыми контурами, J. App. Phys. (USA) **26** (5), 627 (1955).

158. B. T. Price, Ионизация, производимая релятивистскими частицами. В этом обзоре имеется полная библиография по вопросу о вкладе черенковских потерь в полные потери энергии частицы. *Rep. Progr. Phys.* **18**, 52 (1955).
159. И. В. Полубаринов, Квантовая теория эффекта Черенкова в анизотропных средах. Дипломная работа. МГУ, физический факультет, 1953.
160. А. П. Поликаров, О сверхсветовом излучении космических частиц в земной атмосфере. Доклады Болгарской Академии наук **7**, № 2, 29 (1954).
161. J. A. Rich, R. E. Slovacek, F. J. Studer, Черенковское излучение от Co^{60} в воде, *J. Opt. Soc. Amer.* **43** (9), 750 (1953).
162. S. Robin, Краткий обзор, *J. Phys. et Radium (Paris)* **11**, January (1950).
163. M. Schönberg, Потери энергии на столкновения движущейся в среде частицей, *Bull. centre phys. nuc. université libre de Bruxelles* **20**, 1 (1950); *Nuovo Cim.* **8** (3), 159 (1951).
164. L. I. Schiff, Квантовая теория эффекта Черенкова. *Quantum Mechanics*. McGraw Hill, N.-Y., 1949.
165. М. Я. Ширококов, Эффект Черенкова для частицы со спином 2, *ЖЭТФ* **19**, 481 (1949).
166. Gyorgy Schmidt, Эффект Черенкова в волноводах с диафрагмами и других ограниченных объемах, *Magyar Fizikai Folyoirat* **IV**, 453 (1956).
167. А. Г. Ситенко, Применение метода нормальных колебаний в классической теории излучения. Диссертация. Рассмотрены задачи, связанные с прохождением заряда через среду, в частности, излучение заряда, равномерно вращающегося по окружности в изотропной среде, черенковское излучение в волноводе, заполненном диэлектриком, и т. д., Харьковский гос. ун-т им. А. М. Горького, 1952.
168. А. Г. Ситенко, О прохождении заряженной частицы через магнетик, *ДАН* **98**, 377 (1954).
169. А. Г. Ситенко, Эффект Черенкова в ферродиелектрике, *ЖТФ* **23**, 2000 (1953).
170. А. Г. Ситенко, М. И. Каганов, О потерях энергии на черенковское излучение в кристалле, *ДАН* **100**, 681 (1955).
171. А. Г. Ситенко, О прохождении заряженной частицы через диэлектрик, обладающий потерями. Ученые записки Харьковского ун-та **64**. Труды физического отделения физико-матем. факультета **6**, Харьков (1955).
172. А. Г. Ситенко, А. А. Коломенский, Эффект Черенкова в одноосном гиротропном кристалле, *ЖЭТФ* **30**, 511 (1956).
173. K. Skarvag, A. Lundby, Черенковское излучение в норвежском реакторе с тяжелой водой, *JEN ER Report*, № 22.
174. А. Соколов, Квантовая теория эффекта Черенкова, *ДАН* **28**, 415 (1940).
175. А. Соколов, Д. Иваненко, Квантовая теория поля, Гостехиздат, М.—Л., 1952. Параграф, посвященный квантовой теории черенковского излучения.
176. A. Sommerfeld, После сверхсветового электрона в пустоте, *Proc. Amst. Acad.* **26** (1904).
177. A. Sommerfeld, тот же вопрос, *Gött. Nachr.*, 1905, стр. 201.
178. A. Sommerfeld, *Оптика*, Москва, ИЛ, 1953.
179. R. B. Sutton, T. H. Fields, J. G. Fox, J. A. Kane, W. E. Mott, R. A. Smallwood, Применение черенковских счетчиков в экспериментах по рассеянию протонов на протонах, *Phys. Rev.* **97**, 783 (1955).
180. М. С. Свирицкий, К вопросу о поглощении и испускании фотонов. *Физика металлов и металловедение*, т. II, вып. 3, 397, 1956.
181. И. Е. Тамм, И. М. Франк, Когерентное излучение быстрого электрона в среде, *ДАН* **14**, 107 (1937).
182. И. Е. Тамм, И. М. Франк, П. А. Черенков, Свечение чистых жидкостей под действием быстрых электронов, *Изв. АН СССР, ОМОН*, стр. 30 (1938).
183. И. Е. Тамм, Излучение равномерно движущихся электронов, *J. Phys. USSR* **1**, 439 (1939).
184. И. Е. Тамм, И. М. Франк, Излучение электрона при равномерном движении в преломляющей среде. Труды Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР **2**, № 4 (1947).
185. К. Тапак, Эффект Черенкова в одноосном кристалле, *Phys. Rev.* **93**, 459 (1954).
186. T. Taniuti, Классическая и квантовая теория эффекта Черенкова, *Prog. Theor. Phys.* **6**, 207 (1951).
187. D. A. Tidman, Микротория эффекта Черенкова, *Nuovo Cim.* **3**, 503 (1956).
188. D. A. Tidman, та же тема, *Nucl. Phys.* **2**, 289 (1956).
189. С. И. Вавилов, О возможных причинах синего γ -свечения жидкостей, *ДАН* **2**, 457 (1934).

190. С. И. Вавилов, Микроструктура света, Изд. АН СССР, Москва, 1952.
191. В. И. Векслер, Коherentный метод ускорения заряженных частиц. Женеvская конференция. CERN, Symposium I, 80 (1956). Июнь 1956 г. также Атомная энергия II, № 5, 427 (1957).
192. P. B. Weisz, B. L. Anderson, Попытка обнаружить черенковское излучение космических частиц в воде, Phys. Rev. **72**, 431 (1947).
193. J. Winckler, Черенковский счетчик для измерения «альbedo» космических лучей, Phys. Rev. **85**, 1054 (1952).
194. J. R. Winckler, K. Anderson, Улучшенный черенковский счетчик для тех же измерений, Rev. Sci. Instr. **23**, 765 (1952).
195. J. R. Winckler, K. Anderson, Измерения с помощью черенковских счетчиков геомагнитных и других эффектов в космических лучах, Phys. Rev. **93**, 596 (1954).
196. J. R. Winckler, E. N. Mitchell, K. A. Anderson, L. Peterson, Измерения черенковского излучения от положительных и отрицательных π -мезонов, Phys. Rev. **93**, 1411 (1955).
- 197*. H. Wysocki, J. E. Henderson, Экспериментальная проверка формулы $\cos \vartheta = \frac{1}{n\beta}$, Phys. Rev. **64**, 1 (1943).
- 198*. J. R. Winckler, Черенковское излучение частиц космических лучей, Phys. Rev. **87**, 241 (1952).
199. Н. А. Хижняк, Я. Б. Файнберг, Параметрический эффект Черенкова, ЖЭТФ (в печати).
200. R. J. Hanson, D. C. Moore, Газовый черенковский счетчик с переменным порогом, Nuovo Cim. **4**, 1558 (1956).
201. W. R. Weber, Измерение потока α -частиц и ядер Li, Be, B в первичных космических лучах с помощью черенковского детектора, Nuovo Cim. **4**, 1285 (1956).
202. Н. М. Нестерова и А. Е. Чудаков, О наблюдении черенковского излучения, сопровождающего широкие атмосферные ливни космических лучей, ЖЭТФ **28**, 384 (1955).
203. G. Marx, G. Györgyi, Тензор энергии—импульса электромагнитного поля в среде (см. также ⁸⁷), Annalen der Physik **16**, 241 (1955).
204. J. Marshall, Черенковские счетчики, CERN Symposium, 1956, т. I, стр. 63.
205. J. M. Cassels, Измерения с черенковскими счетчиками, там же, стр. 74.
206. R. Hofstadter, Черенковские счетчики, там же, стр. 75.
207. J. V. Jolley, О фокусирующих черенковских счетчиках, там же, стр. 76.
208. O. Chamberlain, C. Wiegand, Черенковский селектор по скоростям, там же, стр. 82.
209. I. Filosofo, T. Yamagata, Большой черенковский счетчик для регистрации фотонов и электронов высокой энергии, там же, стр. 85.
210. А. И. Ахизер, Я. Б. Файнберг, Г. Я. Любарский, Черенковское излучение и стабильность пучков в волноводах с медленными волнами (ливневных ускорителях), там же, стр. 220.
211. Об измерении скорости частиц методом интерференции излучения Вавилова—Черенкова, ПТЭ, 1956, № 3, стр. 44.
212. N. L. Balazs, Черенковское излучение нейтральной частицы с магнитным моментом, Phys. Rev. **101**, 1220 (1956).
213. U. E. Kruse, L. Marshall, J. R. Platt, Синхротронное излучение в радиоспектре Солнца. В добавлении к работе содержится поправка к статье ¹⁴³.
214. W. B. Jones, H. R. Kratz, J. Rouvina, Черенковский счетчик на полное поглощение, Rev. Sci. Instr. **28**, 167 (1957).
215. Г. М. Гарибян, К теории переходного излучения, ЖЭТФ (в печати).
216. В. А. Шахбазян, К вопросу о черенковском излучении в поглощающей среде, Изв. АН Арм. ССР **9**, № 5, стр. 90 (1956).