

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
В ПЛАЗМЕ (ионосфере)****Б. Н. Гершман, В. Л. Гинзбург и Н. Г. Денисов****СОДЕРЖАНИЕ**

Введение	561
§ 1. Распространение электромагнитных волн в однородной магнитоактивной плазме	562
§ 2. Нормальные волны в магнитоактивной плазме при учете теплового движения электронов	567
§ 3. Нормальные волны в магнитоактивной плазме при учете движения ионов	575
§ 4. Об одной особенности поля электромагнитной волны, распространяющейся в неоднородной изотропной плазме	582
§ 5. Поведение поля при учете влияния плазменных волн	590
§ 6. Поведение поля в магнитоактивной неоднородной плазме	593
§ 7. Взаимодействие обыкновенной и необыкновенной волн в ионосфере (эффект «умножения» отраженных радиосигналов)	600
§ 8. Взаимодействие волн при учете поглощения	606
§ 9. Предельная поляризация волн, выходящих из ионосферы	608
Цитированная литература	611

ВВЕДЕНИЕ

Распространение электромагнитных волн в ионизированном газе (плазме) приобретает все больший интерес в связи с развитием радиоастрономии и изучением плазмы в лабораторных условиях, а также в связи с дальнейшими исследованиями земной ионосферы. В этой области приходится сталкиваться с различными случаями: плазмой, содержащей и не содержащей нейтральные частицы; однородной и неоднородной плазмой и, наконец, как изотропной; так и анизотропной (магнитоактивной) плазмой. Изотропия имеет место при отсутствии внешнего магнитного поля; если же это поле присутствует, плазма становится магнитоактивной, т. е. гиротропной двоякопреломляющей средой. Характер распространения волн в плазме существенно зависит, кроме того, от частоты этих волн. При этом, если не говорить о твердом теле, практический интерес представляет только распространение в плазме волн, относящихся к радиодиапазону, а в некоторых случаях также низкочастотных магнитогидродинамических и квазиакустических волн.

Вопрос о распространении радиоволн в плазме, в особенности в применении к ионосфере, был довольно подробно освещен в ч. II монографии¹ и ранее в². Однако за несколько лет, прошедших со времени их выхода в свет, получен ряд новых результатов и некоторые стороны проблемы приобрели большую ясность. Так, в результате учета теплового движения электронов был более полно выяснен вопрос о характере нормальных волн, распространяющихся в однородной магнитоактивной плазме (это в первую

очередь относится к так называемой плазменной волне). Выяснена также роль теплового движения не только электронов, но и ионов в случае магнитогидродинамических волн. Далее, достигнут прогресс в области исследования «взаимодействия» волн различных типов, распространяющихся в неоднородной плазме. Речь здесь идет при этом о взаимодействии, связанном не с нелинейностью среды, а с тем обстоятельством, что нормальные волны в неоднородной среде близки к нормальным волнам в однородной среде только в приближении геометрической оптики. В тех случаях, когда это приближение нарушается, распространение волн в неоднородной среде существенно отличается от имеющего место в однородной или квазиоднородной среде. Это отличие при соответствующей постановке задачи может быть связано с наличием взаимодействия между волнами, которые являются нормальными в областях, где справедливо приближение геометрической оптики. Подобное взаимодействие волн оказывается весьма существенным и практически интересным как в изотропной, так и в магнитоактивной неоднородной плазме. Оно имеет место в нескольких случаях (вблизи точки отражения от неоднородной среды; при наклонном падении волны на изотропную плазму — вблизи точки $\varepsilon(\omega) = 0$, где ε — диэлектрическая проницаемость плазмы; при распространении волн в магнитоактивной плазме — в области малой концентрации электронов и, в известных условиях, при малых углах между направлением распространения волны и направлением внешнего магнитного поля).

Рассмотрение всех перечисленных вопросов теории распространения волн в плазме и является целью настоящей статьи. Необходимо вместе с тем подчеркнуть, что в области теории распространения волн в плазме и, в частности, в ионосфере имеется также ряд других важных проблем, служащих объектом многочисленных исследований. Сюда относятся нелинейные явления³⁻⁶, распространение длинных и очень длинных радиоволн⁷⁻¹⁰ и в особенности статистические явления, связанные с дифракцией волн на плазменных (ионосферных) неоднородностях¹¹⁻¹⁵. Кроме того, широким фронтом проводится изучение различных свойств и динамики плазмы¹⁶⁻¹⁹, физики ионосферы^{13, 20} и солнечной короны²¹, а также элементарных процессов в ионизированном газе²², т. е. вопросов, которые в той или иной мере связаны с исследованием распространения волн в плазме. В последнее время рассмотрение свойств плазмы, находящейся в магнитном поле, приобретает интерес и с точки зрения изучения полупроводников^{22а}. Представления об электронной плазме в металлах в известных условиях также оказываются вполне допустимыми и полезными^{52, 52а}. Наконец, изучение свойств и поведения плазмы в магнитном поле является основным с точки зрения попыток решения такой крупнейшей проблемы, как промышленное использование термоядерной энергии^{22б}.

На всех этих вопросах мы, однако, совершенно не будем останавливаться и в этом отношении ограничимся лишь сделанными указаниями на соответствующую новую литературу (приведенные ссылки на литературу должны служить лишь для целей ориентировки и ни в коей мере не претендуют на полноту).

§. 1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Вопрос о распространении радиоволн в однородной магнитоактивной плазме, в пренебрежении тепловым движением электронов и без учета влияния ионов, подробно рассмотрен в¹ §§ 62, 75. Поэтому здесь мы остановимся на этом вопросе весьма кратко, имея в виду лишь цели дальнейшего изложения.

Плазма, находящаяся в магнитном поле, является двоякопреломляющей средой и при указанных выше ограничениях может быть охарактеризована

тензором комплексной диэлектрической проницаемости ϵ'_{ik} (см.¹ § 62). Величины ϵ'_{ik} входят в уравнения поля, которые в случае интересующих нас плоских волн $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}r)}$ определяют связь частоты ω с волновым вектором $\mathbf{k}$, а также связь между различными компонентами амплитуды $\mathbf{E}_0$, т. е. поляризацию волн. При этом в данном направлении $\mathbf{k}$ при заданной частоте ω и, разумеется, заданных параметрах плазмы и напряженности внешнего магнитного поля могут распространяться две нормальные волны. Эти волны отличаются друг от друга скоростью распространения, коэффициентом поглощения и поляризацией. (При учете теплового движения электронов и влияния ионов в плазме могут распространяться не две, а четыре нормальные волны, о чем пойдет речь ниже.)

Не в ущерб общности изложения можно выбрать направление волнового вектора $\mathbf{k}$ за ось z , а внешнее постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0$ считать лежащим в плоскости yz (см. рис. 1). Электрическое поле плоских волн в этом случае имеет вид $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$, причем должны быть удовлетворены уравнения

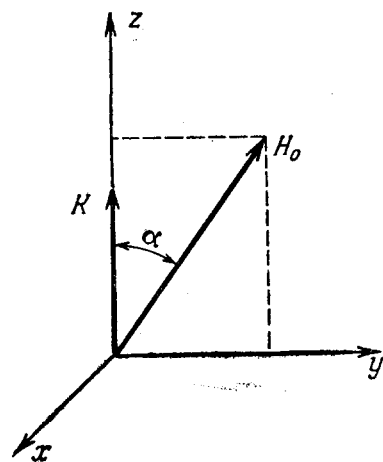


Рис. 1.

$$[A - (n - ix)^2] E_{x0} + iCE_{y0} = 0, \quad (1.1)$$

$$-iCE_{x0} + [B - (n - ix)^2] E_{y0} = 0, \quad (1.2)$$

где

$$A = \frac{(1 - is)u - (1 - is)(1 - is - v)^2 - uv \cos^2 \alpha}{(1 - is)u - (1 - is)^2(1 - is - v) - uv \cos^2 \alpha}, \quad (1.3)$$

$$B = \frac{u(1 - is - v) - (1 - is)(1 - is - v)^2}{(1 - is)u - (1 - is)^2(1 - is - v) - uv \cos^2 \alpha}, \quad (1.4)$$

$$C = \frac{\sqrt{u} v (1 - is - v) \cos \alpha}{(1 - is)u - (1 - is)^2(1 - is - v) - uv \cos^2 \alpha}. \quad (1.5)$$

В уравнениях (1.1) и (1.2) введено обозначение

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = (n - ix)^2, \quad (1.6)$$

где n и x — показатели преломления и поглощения волны (смысл этих величин ясен из самого выражения для поля волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} = \mathbf{E}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} n z\right)} e^{-\frac{\omega}{c} x z}.$$

Далее, в соотношениях (1.3) — (1.5) $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2}$, $\omega_H = \frac{|e| H_0}{mc}$ — гирочастота

для электронов (e и m — заряд и масса электрона), $v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{m}}$ — лэнгмюровская частота колебаний плазмы (N_e — концентрация электронов), $s = \frac{\nu_{эфф}}{\omega}$, $\nu_{эфф}$ — эффективное число соударений электронов с другими частицами.

Что касается продольной компоненты электрического поля, то ее можно найти из соотношения

$$E_z = \frac{i \sqrt{u} \sin \alpha [1 - (n - ix)^2]}{1 - v - is} E_y. \quad (1.7)$$

При $\alpha \neq 0$ из (1.7) следует, что в присутствии внешнего магнитного поля (т. е. когда $u \neq 0$) продольная компонента отсутствует (при наличии поперечной компоненты E_y) только в тривиальном случае, когда в среде нет электронов ($n^2 = 1$, $x = 0$). Если же угол между волновым вектором $\mathbf{k}$ и полем $\mathbf{H}$ равен нулю (т. е. $\alpha = 0$), то при любых значениях u и v , для которых $1 - v - is \neq 0$, волны оказываются чисто поперечными.

Уравнение для величины $(n - ix)^2$ получается из условия существования нетривиальных решений у системы (1.1) — (1.2), т. е. из условия равенства нулю детерминанта этой системы

$$\begin{aligned} & [(1 - is)u - (1 - is)^2(1 - is - v) - uv \cos^2 \alpha](n - ix)^4 - \\ & - [2u(1 - is) - 2(1 - is)(1 - is - v)^2 - uv(1 + \cos^2 \alpha)](n - ix)^2 + \\ & + (1 - is - v)[u - (1 - is - v)^2] = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде

$$(n_{1,2} - ix_{1,2})^2 = 1 - \frac{2v(1 - v - is)}{2[(1 - is)(1 - v - is) - u \sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1 - v - is)^2 \cos^2 \alpha}]}, \quad (1.9)$$

где индекс «1» и знак «—» относятся к необыкновенной волне, а индекс «2» и знак «+» относятся к обыкновенной волне.

Рассмотрим ряд следствий из (1.8) — (1.9), которые представляют интерес для дальнейшего изложения. Прежде всего заметим, что в принципе возможен случай, когда показатели преломления и поглощения одни и те же для обоих типов волн: $((n_1 - ix_1)^2 = (n_2 - ix_2)^2)$ и, следовательно, двойное лучепреломление отсутствует. Это имеет место, как легко видеть из (1.9), если $u \sin^4 \alpha = -4(1 - v - is)^2 \cos^2 \alpha$. При $v = 1$ отсюда находим некоторое значение s , которое обозначим через s_c :

$$s_c = \frac{\nu_{\text{эфф}} c}{\omega} = \frac{\sqrt{u} \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}. \quad (1.10)$$

Величину $\nu_{\text{эфф}} c$ называют «критическим числом соударений». В условиях ионосферы для коротких волн обычно $s \ll \sqrt{u}$ и условие $s = s_c$ может выполняться только при достаточно малых значениях угла α (квазипродольное распространение). Учитывая, что в случае волн, короче примерно 100 м $s \ll 1$, мы далее в этом параграфе для простоты будем пренебрегать влиянием соударений на

характер распространения волн, полагая, что $s = 0$. При $s = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} = 0$ поглощение волн отсутствует, однако и в этом случае может иметь место затухание поля. Так, в изотропном случае при $s = 0$ комплексная диэлектрическая постоянная (проницаемость) $\varepsilon' = \varepsilon \equiv (n - ix)^2 = 1 - \frac{4\pi e^2 N_e}{m} = 1 - v$

и поле изменяется по закону $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} z\right)} \equiv \mathbf{E}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} n z\right) - \frac{\omega}{c} x z}$.

Если $\epsilon > 0$, то $n_z = \sqrt{\epsilon}$, $\kappa = 0$, и мы имеем дело с бегущей волной. Если же $\epsilon < 0$, то $n = 0$, $\kappa = \sqrt{|\epsilon|}$ и волна затухает. Поскольку поглощение при этом отсутствует, затухание волны связано с ее полным внутренним отражением от среды. Таким образом, и при $s = 0$ наиболее последовательно было бы вводить обе величины n и κ . Удобнее, однако, пользоваться в этом случае одной величиной n^2 , могущей принимать также и отрицательные значения; при этом очевидно, что значения $n^2 < 0$ отвечают в прежних обозначениях случаю, когда $\kappa \neq 0$, причем κ^2 равно $|n^2|$. Совершенно аналогичная ситуация имеет место и в магнитоактивной среде, в силу чего при $s = 0$ мы будем пользоваться одной величиной n^2 , могущей иметь любой знак. Заметим также, что помимо волн типа $E = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$ существуют, конечно, волны типа $E = E_0 e^{i(\omega t + kz)}$, соответствующие противоположному направлению распространения. Это обстоятельство можно, тем не менее, в явном виде не учитывать, как это и сделано выше, предполагая, что значения k могут иметь любой знак. То же относится к значениям n и κ , поскольку используются только выражения для величины $(n - i\kappa)^2$.

Рассматривая уравнение (1.8) (при $s = 0$), легко заключить, что если коэффициент при n^4 обращается в нуль, то один из корней $n^2 \rightarrow \infty$. Итак, при конечном v , $n^2 \rightarrow \infty$ при условии

$$1 - u - v + uv \cos^2 \alpha = 0. \quad (1.11)$$

Величина v_∞ , при которой выполняется условие (1.11), равна

$$v_\infty = \frac{u - 1}{u \cos^2 \alpha - 1}.$$

Опираясь на полученное выражение для v_∞ , легко видеть, что при $u < 1$ всегда возможно обращение в бесконечность одного из корней n_1^2 или n_2^2 . Более детальный анализ показывает, что в этом случае $n_1^2 \rightarrow \infty$. Если же $u > 1$, то существенно, каково значение величины $u_L = u \cos^2 \alpha$. При $u_L < 1$ формально оказывается, что $v_\infty < 0$. Однако величина $v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ по своему смыслу должна быть положительной, откуда следует, что при $u > 1$, $u_L < 1$ и конечных v значения n_1^2 и n_2^2 конечны. Если же $u_L > 1$ и в то же время $u > 1$, то можно установить, что при $v = v_\infty$ значение $n_2^2 \rightarrow \infty$, а величина n_1^2 остается конечной. Таким образом, наличие полюса у функции $n^2(v)$ может быть характерно в одном случае для ветви $n_1^2(v)$, а в другом случае для ветви $n_2^2(v)$. Возможен также случай, когда у функции $n^2(v)$ полюс отсутствует (как сказано, последнее имеет место, если $u > 1$ и $u_L < 1$).

Из (1.8) или (1.9) легко установить, что при $\alpha \neq 0$, величина $n_1^2 = 0$, если $v = 1 \pm \sqrt{u}$, а $n_2^2 = 0$, если $v = 1$. Эти известные условия определяют уровни отражения необыкновенной и обыкновенной волн, распространяющихся в неоднородной плазме. Если $u > 1$, то условие $v = 1 - \sqrt{u}$ в силу положительности величины v становится фиктивным.

Остановимся теперь на случае продольного распространения, когда $\alpha = 0$. Этот случай является исключительным, в частности, по следующей причине. Полагая $\alpha = 0$ в (1.9), получим

$$n_{1,2}^2 = 1 - \frac{v}{1 \pm \sqrt{u}}, \quad (1.12)$$

откуда видно, что $n_1^2 = 0$ при $v = 1 - \sqrt{u}$, а $n_2^2 = 0$ при $v = 1 + \sqrt{u}$, тогда как при $\alpha \neq 0$ $n_1^2 = 0$, если $v = 1 \pm \sqrt{u}$, а $n_2^2 = 0$ при $v = 1$. Отсюда следует, что переход к случаю $\alpha = 0$ носит особый характер, который легче всего понять, сопоставив кривые $n^2(v)$ при $\alpha = 0$ и при малых α (рис. 2.). Случай малых α очень интересен для теории распространения волн в неоднородной магнитоактивной плазме: его рассмотрение составит содержание §§ 7 и 8.

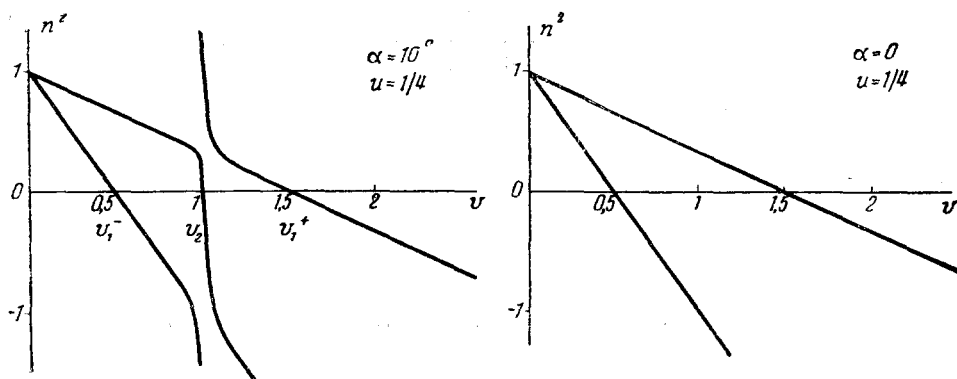


Рис. 2.

Остановимся еще на одном моменте, связанном с поляризацией нормальных волн в однородной плазме. Из соотношения (1.1) можно найти поляризационный фактор $K_{1,2}$.

$$K_{1,2} = \frac{E_{y1,2}}{E_{x1,2}} = - \frac{2i \sqrt{u} (1-v) \cos \alpha}{u \sin^2 \alpha \mp \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-v)^2 \cos^2 \alpha}}, \quad (1.13)$$

где верхний знак отвечает волне 2.

Последнее равенство получается, если использовать соотношения (1.3), (1.5) и (1.9). В общем случае поляризация (в поперечной плоскости xu) имеет эллиптический характер. Интересным фактом является при этом то, что обе волны остаются эллиптически поляризованными и в пределе при $v \rightarrow 0$, т. е. в вакууме:

$$K_{1,2(v=0)} = - \frac{2i \sqrt{u} \cos \alpha}{u \sin^2 \alpha \mp \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u \cos^2 \alpha}}. \quad (1.14)$$

Здесь, конечно, нет противоречия, так как и в пустоте в качестве нормальных волн можно выбрать волны эллиптической поляризации и, в частности, волны с поляризацией, определяемой соотношением (1.14). Однако в случае неоднородной среды возникает необходимость в дополнительном анализе вопроса, так как характер изменения поляризации при малых v , что соответствует распространению в начале ионосферного слоя, не будет подчиняться зависимости, определяемой соотношением (1.13). Этот вопрос будет рассмотрен в § 9.

При отсутствии внешнего магнитного поля параметр $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} = 0$ и, как это хорошо известно и ясно, например, из (1.12),

$$n^2 = \epsilon = 1 - v = 1 - \frac{4\pi e^2 N_e}{m \omega^2}. \quad (1.15)$$

При наличии поглощения

$$(n - ix)^2 = \epsilon' = 1 - \frac{v}{1 - is} = 1 - \frac{4\pi e^2 N_e}{m\omega^2 \left(1 - i \frac{v_{эфф}}{\omega}\right)}. \quad (1.16)$$

Индексы 1, 2 здесь опущены, так как в отношении поляризации в изотропной среде имеет место вырождение (поперечные волны любой поляризации распространяются с одинаковыми скоростями и затуханием).

Помимо двух поперечных волн со значениями n и x , определяемыми выражением (1.16), в изотропной плазме могут существовать плазменные колебания, т. е. колебания электронов относительно ионов (эти колебания аналогичны так называемым оптическим или борновским колебаниям в кристаллической решетке). Частота плазменных колебаний, как это непосредственно следует из уравнений поля (см. § 56), определяется из условия равенства нулю величины ϵ' . При наличии соударений эта частота является комплексной, т. е. колебания затухают. В пренебрежении столкновениями частота плазменных колебаний ω_0 определяется из условия $\epsilon(\omega_0) = 0$ и, как ясно из (1.15), равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{m}} = 5,64 \cdot 10^4 \sqrt{N_e}. \quad (1.17)$$

При пренебрежении тепловым движением плазменные колебания, возникшие в одном месте, не зависят от колебаний в другом месте. Другими словами, если рассматривать продольную плазменную волну $E_z = E_{z0} e^{i(\omega_0 t - kz)}$, то при данном ω_0 значение k произвольно. Отсюда следует, что групповая скорость плазменных волн $d\omega/dk$ в рассматриваемом приближении равна нулю, что и дает основания говорить скорее о плазменных колебаниях, чем о волнах. Поэтому при исследовании плазменных волн необходимо учитывать тепловое движение частиц в плазме, что будет сделано в § 2.

В заключение заметим, что компоненты тензора ϵ'_{ik} , а следовательно и коэффициенты в уравнениях (1.1)–(1.2), считались выше независимыми от напряженности поля. Только при этом условии уравнения поля являются линейными, в силу чего соблюдается принцип суперпозиции волн. Нелинейные явления при распространении радиоволн в плазме также представляют интерес и послужили объектом целого ряда исследований, о чем уже упоминалось во введении. Однако в настоящей статье мы ограничимся только линейным приближением.

§ 2. НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ ПРИ УЧЕТЕ ТЕПЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Пренебрежение тепловым движением в плазме во многих случаях вполне оправдано. Так, при распространении в изотропной плазме поперечных волн учет теплового движения приводит в нерелятивистском случае лишь к ничтожным поправкам порядка отношения тепловой скорости электронов $\sqrt{\frac{\chi T_e}{m}}$

к фазовой скорости волн $\frac{c}{n} \gg c$ (в этом случае $n \ll 1$; см. (1.15)). Однако в случае плазменных волн, как уже отмечалось в конце § 1, без рассмотрения теплового движения нельзя обойтись даже в первом приближении (при нахождении зависимости длины волны от частоты). Вопрос о плазменных волнах в изотропном случае рассмотрен уже довольно давно (см. ^{23–25}, а также ¹ § 63). Поэтому мы не будем здесь останавливаться на изотропной плазме;

соответствующее дисперсионное уравнение, связывающее ω и k , будет попутно приведено несколько ниже.

При наличии внешнего магнитного поля H_0 разделение нормальных волн на чисто поперечные и чисто продольные оказывается, вообще говоря, невозможным. Однако и в этом случае можно сразу же указать на определенную, правда практически довольно узкую область, в которой можно ожидать существенного влияния теплового движения электронов. Дело в том, что при рассмотрении свойств волн в отсутствии теплового движения (см. § 1) было установлено, что при определенном значении $v = v_\infty$ для одной из волн $n^2 \rightarrow \infty$. В области $v = v_\infty$ величина фазовой скорости может быть сравнительно небольшой, и, следовательно, можно ожидать, что для выяснения характера нормальных волн окажутся существенными тепловые поправки, которые характеризуются отношением скорости теплового движения к фазовой скорости волны. Более того, из дальнейшего будет ясно, что учет теплового движения электронов, как и в изотропном случае, приводит к выводу о наличии вместо двух нормальных волн — трех. Возникающую при этом наряду с обыкновенной и необыкновенной волнами третью волну несколько условно можно назвать плазменной волной. Изучению свойств этой волны, которая становится чисто продольной в отсутствии магнитного поля, посвящено несколько работ, о которых речь пойдет ниже.

Основной интерес к плазменным волнам связан с проблемами физики газового разряда, где впервые были обнаружены плазменные колебания²⁶, а также с радиоастрономией (см., например,²⁷). Можно полагать, как об этом уже сейчас свидетельствует содержание § 5 настоящей статьи, что вопрос о плазменных волнах при наличии внешнего магнитного поля не лишен интереса в применении и к ионосферным проблемам.

Наиболее последовательным образом влияние теплового движения можно учесть, используя метод кинетического уравнения. Однако достаточно общее кинетическое рассмотрение, на результатах которого мы остановимся ниже, является довольно громоздким. Поэтому заслуживают внимания попытки приближенного, но более простого решения вопроса. Методом такого рода является метод, основанный на использовании уравнений для средних скоростей частиц, который можно назвать квазигидродинамическим. Вопрос о нормальных волнах в магнитоактивной плазме рассматривался этим методом в работах²⁸⁻³⁰.

При этом можно исходить из волнового уравнения для электрического поля E (см., например,¹ § 63):

$$\Delta E - \text{grad div } E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j_t}{\partial t}, \quad (2.1)$$

где j_t — полный микроскопический ток, при пренебрежении движением ионов равный

$$j_t = e N_e v_e \quad (2.2)$$

(v_e — скорость упорядоченного движения электронов). Далее воспользуемся уравнением движения для электронов и законом сохранения числа частиц:

$$m \frac{dv_e}{dt} = e \left(E + \frac{1}{c} [v_e H_0] \right) - \frac{\nabla p_e}{N_e} - m \nu_{\text{эфф}} v_e, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \text{div } v_e N_e = 0. \quad (2.4)$$

В уравнении (2.3) p_e — парциальное давление электронов, которое можно связать с температурой электронного газа T_e ; для идеального газа $p_e = N_e k T_e$

(k — постоянная Больцмана). Уравнение (2.4) записано с учетом влияния соударений, однако последние в этом параграфе для простоты учитываться не будут. Если пренебречь силами давления ($\nabla p_e = 0$), то из (2.1)–(2.4) легко прийти к результатам, изложенным в § 1. Введение парциального давления p_e в уравнение (2.3) и является простейшим методом учета теплового движения. Если считать температуру T_e постоянной и рассматривать малые отклонения от равновесных значений электронной концентрации N_{e0} , полагая $N_e = N_{e0} + N_{e1}$, $N_{e1} \ll N_{e0}$ (значение N_{e0} для однородной среды от координат не зависит), то, отыскивая решение в виде плоских волн $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} n z)}$, можно получить следующее дисперсионное уравнение:

$$\beta^2 (1 - u \cos^2 \alpha) n^6 - [1 - u - v + uv \cos^2 \alpha + 2\beta^2 (1 - v - u \cos^2 \alpha)] n^4 + [2(1 - v)^2 - u(2 - v - v \cos^2 \alpha) + \beta^2 (1 - 2v + v^2 - u \cos^2 \alpha)] n^2 + (1 - v)[u - (1 - v)^2] = 0. \quad (2.5)$$

Здесь $\beta = \sqrt{\frac{x T_e}{m c^2}}$ — отношение некоторой средней тепловой скорости электронов к скорости света в вакууме c . В нерелятивистской плазме, которая нас только и будет здесь интересовать, выполняется условие $\beta^2 \ll 1$. В отсутствии теплового движения (т. е. при $\beta \rightarrow 0$) уравнение (2.5) переходит в уравнение (1.8) (если в последнем положить $s = 0$). Уравнение (2.5) является уравнением третьей степени относительно n^2 , что означает наличие трех типов нормальных волн: необыкновенной ($n = n_1$), обыкновенной ($n = n_2$) и плазменной волны ($n = n_3$). Для последней волны характерно, что $n_3^2 \rightarrow \infty$ при $\beta \rightarrow 0$. Разделение волн на указанные три группы лучше всего проводить, рассматривая поведение функций $n^2(v)$, определяемых из уравнения (2.5). Заметим, что исследование характера кривых $n^2(v)$ имеет большое значение для теории распространения волн и в неоднородной среде (см. § 6).

Рассмотрим некоторые особенности кривых $n^2(v)$, используя, ради простоты, формулы для частных случаев. Для продольного распространения ($\alpha = 0$) из (2.5) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c^2 k_{1,2}^2}{\omega^2} \equiv n_{1,2}^2 &= 1 - \frac{v}{1 \pm \sqrt{u}} = 1 - \frac{4\pi e^2 N_e}{m \omega (\omega \pm \omega_H)}; \\ \frac{c^2 k_3^2}{\omega^2} \equiv n_3^2 &= \frac{1 - v}{\beta^2} = \frac{m c^2}{x T_e} \left(1 - \frac{4\pi e^2 N_e}{m \omega^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Выражения для $n_{1,2}^2$ совпадают с (1.12). В этом случае тепловое движение в рамках используемого метода расчета совершенно не влияет на характер распространения волн. Для плазменной волны получается дисперсионное уравнение (т. е. соотношение, связывающее ω с k), соответствующее чисто продольной волне в отсутствии магнитного поля H_0 (это дисперсионное уравнение часто записывают также в форме $\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{x T_e}{m} k^2 = \frac{4\pi e^2 N_e}{m} + \frac{x T_e}{m} k^2$). Таким образом при $\alpha = 0$ каждому из типов нормальных волн соответствует своя дисперсионная кривая $n_{1,2,3}^2(v)$. Однако случай $\alpha = 0$ является исключительным и при $\alpha \neq 0$ уже становится невозможным сопоставить каждому из всех трех типов нормальных волн свою дисперсионную кривую. Это легче всего проиллюстрировать, рассматривая поперечное распространение ($\alpha = \frac{\pi}{2}$). В этом случае для обыкновенной волны $n_2^2 = 1 - v$,

а для необыкновенной и плазменной волн имеем уравнение

$$\beta^2 n^4 + [(v-1)(1+\beta^2) + u] n^2 + [(v-1)^2 - u] = 0. \quad (2.7)$$

На рис. 3 приведены типичные кривые $n_{1,3}^2(v)$ в области, где значения v близки к v_∞ . Эти кривые построены на основе уравнения (2.7). Заметим, что в нижней полуплоскости при $n^2 < 0$ эти кривые не представляют особого

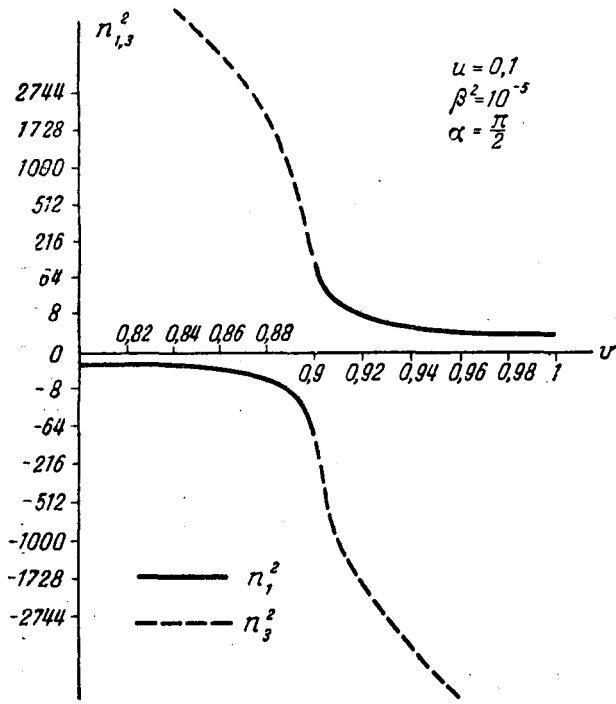


Рис. 3.

интереса, так как здесь распространение становится невозможным, поскольку поле экспоненциально затухает и обычно не может проникнуть в плазму сколько-нибудь глубоко (в неоднородной среде значения $n^2 < 0$ соответствуют областям, лежащим за точкой отражения). Из рис. 3 ясно, что значения $n_3^2(v)$ изображаются не отдельной кривой, а в случае, когда $u < 1$, представляют как бы продолжение кривой $n_1^2(v)$. На этом рисунке та часть кривой $n^2(v)$ (при $n^2 > 0$), где $v < 1-u$, отнесена к плазменной волне, а та её часть, где $v > 1-u$, отнесена к необыкновенной волне. Такое разделение основано на том, что в отсутствие теплового движения (при $\beta \rightarrow 0$) плазменная волна должна ликвидироваться и дисперсионная кривая (при $n^2 > 0$) располагается в верхней полуплоскости справа от вертикали $v = 1-u$ (в рассматриваемом случае, когда $\alpha = \pi/2$, значение $v = 1-u = v_\infty$, т. е. отвечает точке, где при $\beta = 0$ $n_1^2 = \infty$). Следует, однако, подчеркнуть известную условность приведенной классификации волн, что особенно характерно для самой точки $v = 1-u$, где нет никаких оснований относить значения n^2 ни к обыкновенной, ни к плазменной волне*). В обсуждаемом случае, а также при других значениях $\alpha \neq 0$ плазменная волна, как показывает анализ характера поляризации, не является чисто продольной. Приведенные особенности кривых $n^2(v)$ также характерны не только для случая $\alpha = \frac{\pi}{2}$, но и для других значений $\alpha \neq 0$. На рис. 4 в схематической форме^{27, 29} показано место плазменной волны (в случае $u < 1$) при малых углах α (без учета теплового движения соответствующие кривые см. на рис. 2). Подчеркнем, что для рас-

*) Таким образом, представляется весьма существенным, что в магнитоактивной среде плазменные волны не образуют изолированной ветви волн, а тесно примыкают к необыкновенной или обыкновенной волнам. Это обстоятельство ранее не было выяснено, что привело, например, в § 75 книги¹ к недостаточно четкому и правильному освещению вопроса о плазменных волнах в магнитоактивной среде.

смотренного случая, когда $u < 1$, при $\beta^2 \ll 1$ все три корня $n_{1,2,3}^2$ уравнения (2.5) всегда действительны.

Если при $\beta \rightarrow 0$ полюс имеет обыкновенная волна, т. е. $n_2^2(v_\infty) \rightarrow \infty$ (это отвечает области $u > 1$, $u_L > 1$; см. § 1), то плазменная волна является продолжением ветви $n_2^2(v)$.

Существенно, что при квазигидродинамическом подходе и пренебрежении соударениями (т. е. когда $s=0$) плазменная волна не затухает даже, если фазовая скорость волны сравнима со скоростью теплового движения электронов. Между тем кинетическое рассмотрение приводит к выводу о наличии особенно существенного именно в этом случае своеобразного затухания, связанного с переходом энергии упорядоченного движения волны в энергию теплового движения плазмы²⁴. Ниже можно будет указать еще на ряд других расхождений между результатами квазигидродинамического и кинетического решения задачи, в силу чего квазигидродинамическое рассмотрение, очень полезное для ориентировки, никак нельзя считать исчерпывающим.

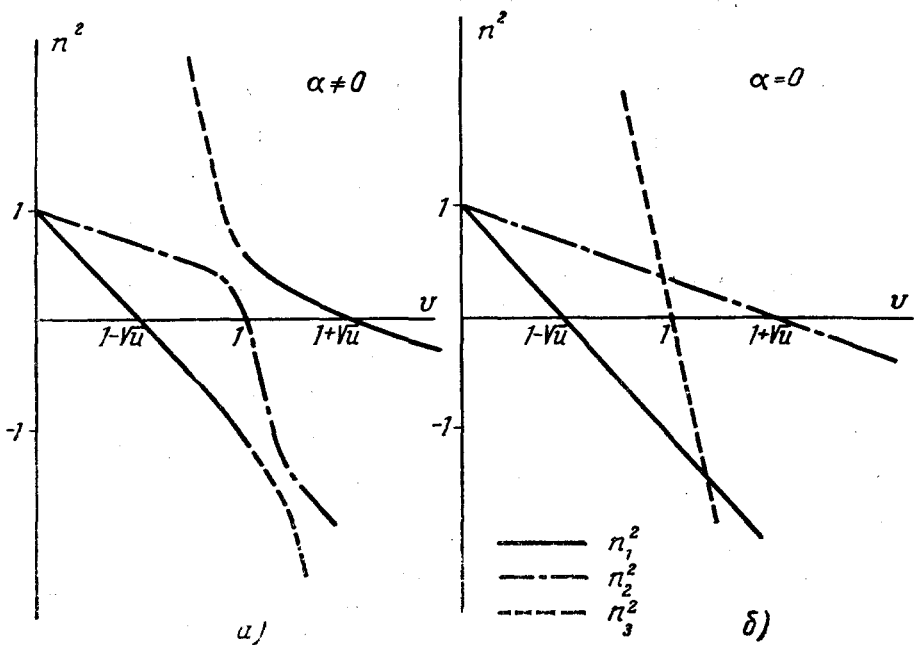


Рис. 4.

Перейдем поэтому к обсуждению результатов, полученных при исследовании свойств нормальных волн в плазме методом кинетического уравнения. При этом наибольший интерес представляет вопрос о дисперсионном уравнении, аналогичном уравнению (2.5). В изотропном случае этот вопрос был рассмотрен в работах²³⁻²⁵. Что касается плазмы, находящейся в магнитном поле, то здесь также можно указать на ряд исследований^{28, 31-36}, основанных на использовании кинетического уравнения. Однако некоторые из этих работ содержат ряд существенных ограничений. Так, в работах³¹⁻³² при рассмотрении вопроса о колебаниях плазмы пренебрежено вихревыми членами, т. е. сразу же предполагается, что $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. В силу этого рассмотрение необыкновенной и обыкновенной волн вообще исключается; что же касается плазменной волны, то и для нее, вообще говоря, пренебрежение вихревыми

членами не является законным. Проведенное в работе³³ кинетическое рассмотрение так называемых поперечных колебаний в магнитоактивной плазме вообще некорректно. В этой работе на электрическое поле $\mathbf{E}$ наложено условие поперечности $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, что в общем случае совершенно недопустимо, так как нормальные волны имеют продольную компоненту поля $\mathbf{E}$ как при учете, так и в отсутствии теплового движения. В появившейся недавно работе³⁷ для высокочастотных волн новых результатов не получено, а в статье³⁸ в силу пренебрежения тепловым движением вообще приводятся лишь хорошо и давно известные формулы для обыкновенной и необыкновенной волн, распространяющихся перпендикулярно к магнитному полю.

Решение задачи о волнах в плазме на основе кинетического уравнения и общей системы уравнений поля проведено в³⁴⁻³⁵. При этом в³⁴ детально рассматриваются только свойства плазменной волны при поперечном распространении ($\alpha = \frac{\pi}{2}$). В³⁵ (см. также^{28, 36}) обсуждаются свойства нормальных волн всех трех типов.

Исходя из кинетического уравнения и уравнений электродинамики с самосогласованным полем можно прийти к следующему дисперсионному уравнению, по форме аналогичному (2.5):

$$\begin{aligned} \beta^2 v [A \sin^2 \alpha + B \cos \alpha \sin \alpha + (1 - u) C \cos^2 \alpha] n^6 - \\ - [1 - u - v + uv \cos^2 \alpha + O_1(\beta^2)] n^4 + \\ + [2(1 - v)^2 + uv \cos^2 \alpha - u(2 - v) + O_2(\beta^2)] n^2 + \\ + (1 - v)[u - (1 - v)^2] = 0, \quad (2.8) \end{aligned}$$

$$\text{где } A = \frac{(1 + 3u) \cos^2 \alpha}{(1 - u)^2} + \frac{3 \sin^2 \alpha}{1 - 4u}, \quad B = \frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - u}, \quad C = 3 \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - u}.$$

При решении задачи предполагается, что функция распределения электронов F может быть представлена в виде $F = f_0 + f_1$, где $|f_1| \ll f_0$ и $f_0 = N_{e0} \left(\frac{m}{2\pi x T_e} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv_e^2}{2x T_e} \right)$ — максвелловское распределение. Величины $O_1(\beta^2)$ и $O_2(\beta^2)$ в (2.8) порядка β^2 и несут существенны при анализе нормальных волн.

Уравнение (2.8) написано в пренебрежении затуханием из-за теплового движения частиц. Вычисление этого затухания может быть произведено, например, когда волновое число k считается заданным и действительным и отыскиваются решения, изменяющиеся во времени по закону e^{pt} , где величина $p = i\omega - \gamma$ является комплексной, причем ω определяет частоту, а γ — декремент затухания волн. Важной задачей является установление областей слабого и сильного затухания волн. При слабом затухании, т. е. когда $\gamma \ll \omega$, можно в первом приближении ограничиться рассмотрением незатухающих волн. В обратном случае, при сильном затухании, когда $\gamma \gg \omega$, само распространение волн практически становится невозможным, так как даже при отсутствии соударений энергия упорядоченного движения интенсивно переходит в тепловую энергию плазмы.

В работе³⁵ показано, что любая из волн 1, 2 или 3 с данным значением n^2 является слабозатухающей при одновременном выполнении двух условий

$$\beta^2 n^2 \cos^2 \alpha \ll 1, \quad (2.9)$$

$$\frac{\beta^2 n^2}{u} \sin^2 \alpha \ll 1. \quad (2.10)$$

Условие (2.9) выполняется для всех углов α , если фазовая скорость волны $v_\phi = \frac{c}{n}$ будет значительно больше средней тепловой скорости движения электронов $\bar{v}_e$. Действительно, в последнем случае $\beta^2 n^2 = \frac{\kappa T_e n^2}{mc^2} \simeq \frac{\bar{v}_e^2}{v_\phi^2} \ll 1$. То же относится и к неравенству (2.10), но только при наличии значительной анизотропии (например, при $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \gg 1$). Нарушение условия

(2.9) всегда означает наличие сильного затухания ($\gamma \gg \omega$). Если же не выполняется только неравенство (2.10), то и это ведет к значительному затуханию, но лишь при достаточно сильно выраженной анизотропии среды ($u \gg 1$).

В работах ^{31-32, 35} приведен ряд выражений для декремента затухания γ , но все эти выражения, по тем или иным причинам, имеют ограниченный характер. В качестве примера приведем формулу для γ , полученную при выполнении условий (2.9) — (2.10) и, кроме того, в предположении, что $n^2 \gg 1$ (см. ³⁵):

$$\gamma = \frac{\omega}{\cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{(1-u)^2}} \left\{ \frac{\sin^2 \alpha \cdot \omega}{2k \cos^2 \alpha} \sqrt{\frac{\pi m}{8 \kappa T_e}} \left[\exp \left(-\frac{m(\omega - \omega_H)^2}{2k^2 \cos^2 \alpha \kappa T_e} \right) + \exp \left(-\frac{m(\omega + \omega_H)^2}{2k^2 \cos^2 \alpha \kappa T_e} \right) \right] + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^3}{k^3 \cos \alpha} \left(\frac{m}{\kappa T_e} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m\omega^2}{2k^2 \cos^2 \alpha \kappa T_e} \right) \right\}. \quad (2.11)$$

Следует оговориться, что при выводе формулы (2.11), помимо указанных ограничений, исключалось рассмотрение волн с частотами ω , близкими к гирочастоте ω_H . При учете этого замечания легко установить, что выполнение неравенства $\gamma \ll \omega$ является следствием условия (2.9), которое было использовано при выводе соотношения (2.11); условие (2.10) уже было использовано при выводе формулы (2.11).

Из (2.11) при $\alpha = 0$ получаем формулу

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^4}{k^3} \left(\frac{m}{\kappa T_e} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m\omega^2}{2k^2 \kappa T_e} \right), \quad (2.12)$$

переходящую при $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{m}}$ в формулу Ландау ²⁴ для декремента затухания плазменных волн в изотропной среде. Переход при $\alpha = 0$ от (2.11) к (2.12) с $\omega = \omega_0$ обусловлен тем, что для частот ω , не слишком близких к ω_H , условие $n^2 \gg 1$ может выполняться только для плазменной волны. Формула (2.12) с $\omega = \omega_0$ может быть получена как в изотропном случае, так и при распространении плазменных волн в направлении магнитного поля H_0 без ограничения, налагаемого условием $n^2 \gg 1$ (см. ^{24, 31-32}).

При $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ из (2.11) следует, что $\gamma \rightarrow 0$. Этот результат вытекает и из рассмотрения, проведенного в ³¹⁻³².

Затухание рассматриваемого типа в принципе имеет место и для поперечных волн, распространяющихся в изотропной плазме. В этом случае для декремента затухания имеем

$$\gamma = \frac{\omega_0^2}{k} \sqrt{\frac{\pi m}{8 \kappa T_e}} \exp \left(-\frac{m\omega^2}{2k^2 \kappa T_e} \right). \quad (2.13)$$

Однако, так как для поперечных волн $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} > c$, то подобное затухание в нерелятивистском газе крайне незначительно и не имеет практического значения.

Наличие затухания, связанного с влиянием теплового движения, является самым существенным моментом, качественно отличающим результаты кинетического и квазигидродинамического рассмотрения. Но и при пренебрежении затуханием (т. е. когда $\gamma = 0$) также имеется ряд расхождений, которые можно установить, сопоставляя дисперсионное уравнение (2.8)* с квазигидродинамическим уравнением (2.5). Простейшим примером может служить распространение плазменных волн в изотропной среде (при $u = 0$). Из (2.8) (см. также ²³⁻²⁵) в этом случае можно получить уравнение

$$\frac{c^2 k_3^2}{\omega^2} \equiv n_3^2 = \frac{1-v}{3\beta^2 v},$$

которое не совпадает с соотношением (2.6) для $n_3^2(v)$, причем отличие состоит в появлении множителя $1/3v$. Ниже будет приведено еще несколько подобных примеров.

Из анализа уравнения (2.8) можно прийти к установлению того же типа связи между нормальными волнами, которая уже была выяснена, опираясь

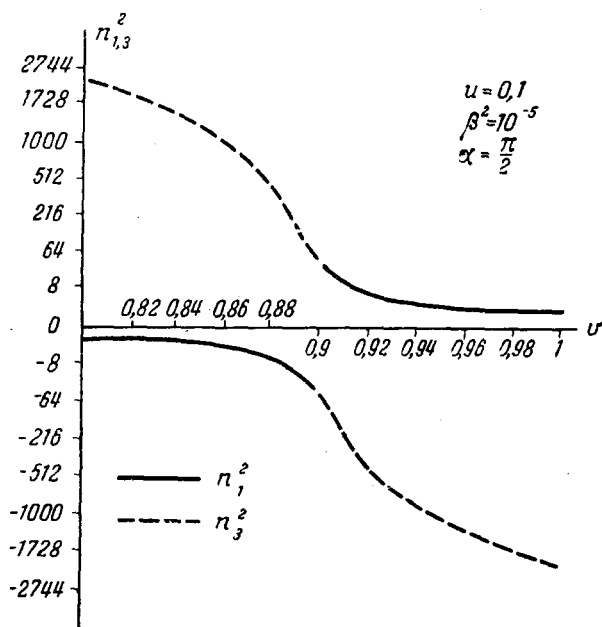


Рис. 5.

$u < 1$ и $\beta^2 \ll 1$ были при всех значениях величины v действительными, то при кинетическом рассмотрении два корня уравнения (2.8) при тех же ограничениях могут в окрестности точки $v = v_\infty$ принимать комплексные значения. Здесь мы имеем как бы более общий случай по сравнению с обыч-

на квазигидродинамическое уравнение (2.5) и проиллюстрирована на рис. 3 и 4. Здесь нужно только оговориться, что сохраняется лишь качественный характер этой связи; детальная форма дисперсионных кривых в тех областях, где существен учет теплового движения, меняется. Некоторое сопоставление в этом отношении можно провести, сравнив кривые $n_{1,3}^2(v)$, построенные на основе уравнения (2.8) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (рис. 5), с аналогичными кривыми на рис. 3.

Нужно указать еще на одно новое обстоятельство, связанное с кинетическим рассмотрением. Если при квазигидродинамическом рассмотрении все три корня $n_{1,2,3}^2(v)$ уравнения (2.5) при

*) Так как уравнение (2.8) получено без учета затухания, то законно использовать не каждое из значений его корней. При рассмотрении различных конкретных случаев нужно, отыскав тот или иной из корней $n_{1,2,3}^2$, проверить, соблюдаются ли неравенства (2.9) — (2.10). Если это имеет место, то полученное значение n^2 найдено корректно.

ными возможностями $n^2 > 0$ и $n^2 < 0$ (см. § 1). Напомним, что при $n^2 > 0$ в отсутствии соударений поле представляет собой незатухающую бегущую волну, а при $n^2 < 0$ поле убывает по экспоненциальному закону. Если же n^2 принимает комплексные значения и, следовательно, n также является комплексным, то имеет место распространение волны, но с одновременным экспоненциальным убыванием поля.

Типичные дисперсионные кривые $n_{1,3}^2(v)$, для случая $\alpha = \pi/2$, при наличии области комплексных значений n^2 , выделенной штриховкой, приведены на рис. 6. Хотя по внешнему виду кривые на рис. 6 существенно отличаются от аналогичных кривых на рис. 3 и 5, следует подчеркнуть, что и при наличии комплексных значений n^2 (рис. 6) имеет место связь прежнего типа между необыкновенной и плазменной волнами. Именно, на рис. 6, как и на рис. 3, также имеются две ветви для значений корней $n_{1,3}^2(v)$ и при этом в каждой из этих ветвей имеются части, соответствующие необыкновенной и плазменной волнам. Эти части переходят одна в другую при непрерывном изменении величины v . Однако, так как в окрестности точки $v = v_\infty$ величина n^2 является комплексной, то графическое изображение связи между волнами 1 и 3 становится качественно иным, чем в случае, представленном на рис. 3 и 5.

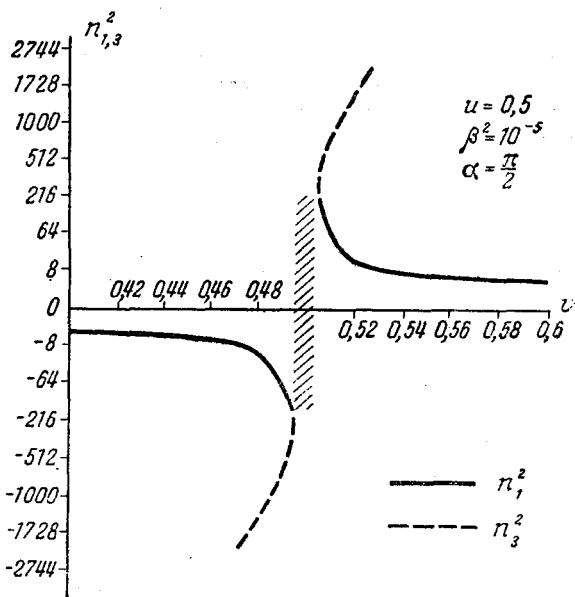


Рис. 6.

Эти части переходят одна в другую при непрерывном изменении величины v . Однако, так как в окрестности точки $v = v_\infty$ величина n^2 является комплексной, то графическое изображение связи между волнами 1 и 3 становится качественно иным, чем в случае, представленном на рис. 3 и 5.

§ 3. НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ ПРИ УЧЕТЕ ДВИЖЕНИЯ ИОНОВ

В изотропной плазме, т. е. в отсутствие внешнего магнитного поля, учет движения ионов может оказаться существенным с точки зрения распространения электромагнитных волн лишь в исключительных случаях. Действительно, диэлектрическая проницаемость изотропной плазмы с учетом движения ионов, в пренебрежении соударениями, имеет вид:

$$\epsilon = n^2 = 1 - \frac{4\pi e^2 N_e}{m\omega^2} - \frac{4\pi e^2 N_i}{M\omega^2}, \quad (3.1)$$

где N_i — концентрация и M — масса ионов, которая для простоты считается одинаковой для всех ионов. Из (3.1) очевидно, что при $N_e = N_i$ учет движения ионов может внести лишь поправку порядка $\frac{m}{M} \ll 10^{-3} - 10^{-5}$ (для ионов $O^\pm$ $\frac{m}{M} = 3,4 \cdot 10^{-5}$). Поэтому вклад ионов в случае (3.1) нужно учитывать лишь при $N_i \gg N_e$, что может иметь место только при наличии большого числа отрицательных ионов.

В присутствии внешнего магнитного поля положение изменяется и роль ионов может быть велика уже в рассмотренном случае, когда $N_e = N_i = N$ (для равновесных состояний это условие будет ниже считаться выполненным). Дело в том, что в магнитоактивной плазме влияние ионов на распространение электромагнитных волн мало лишь при условии

$$\omega \gg \Omega_H = \frac{|e| H_0}{Mc}. \quad (3.2)$$

Гирочастота для ионов Ω_H обычно довольно низка и, например, в земной ионосфере для ионов $O^\pm$ в поле $H_0 \cong 0,5$ эрст $\Omega_H \cong 300$. Поэтому в радиодиапазоне учет движения ионов несуществен, и справедливы формулы, приведенные в §§ 1 и 2. Но при понижении частоты и, особенно, если

$$\Omega_H \gg \omega, \quad (3.3)$$

положение совершенно изменяется: подобные низкочастотные, электромагнитные волны в плазме обладают характерными особенностями и при известных условиях совпадают с так называемыми магнитогидродинамическими волнами в проводящей среде (см. ^{17, 39, 40, 41} и § 63).

Магнитогидродинамические волны не образуют какой-то новой ветви нормальных волн в плазме, а представляют собой обыкновенную и необыкновенную волны низкой частоты. Скорость магнитогидродинамических волн в ряде случаев невелика, в силу чего при их рассмотрении нужно, вообще говоря, учитывать тепловое движение частиц в плазме. Последнее необходимо также при исследовании волн акустического типа. В этих волнах, в отличие от плазменных волн, электроны и ионы движутся совместно, так что в среде в хорошем приближении не возникает никаких электромагнитных полей (имеется в виду изотропный случай или распространение звуковых волн вдоль направления постоянного магнитного поля). Акустические или, точнее, квазиакустические волны образуют четвертую ветвь нормальных волн в плазме *).

Магнитогидродинамические и акустические волны в плазме представляют несомненный интерес как для астрофизики, так и для физики земной ионосферы.

Рассмотрение низкочастотных волн, также как и высокочастотных, проще всего провести на основе квазигидродинамических уравнений, что впервые и было сделано в работах ^{41, 42}. Если ограничиться случаем сильно ионизированного газа, когда можно пренебречь соударениями заряженных частиц с нейтральными, исходными при квазигидродинамическом подходе являются уравнения движения для электронов и ионов ($e < 0$):

$$m \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -\frac{\nabla p_e}{N_e} + e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}_0] \right) + m\nu_{\text{эфф}} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \quad (3.4)$$

$$M \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\frac{\nabla p_i}{N_i} - e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}_0] \right) + m\nu_{\text{эфф}} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i). \quad (3.5)$$

Уравнение (3.4) почти полностью совпадает с уравнением (2.3). В системе (3.4)—(3.5) $\nu_{\text{эфф}}$ — эффективное число соударений электронов с ионами; члены ∇p_e и ∇p_i учитывают возникающие в электронном и ионном газах силы давления. Наличие в уравнении (3.4) точно такого же члена $m\nu_{\text{эфф}} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$, что и в (3.5), но с обратным знаком, вытекает из закона сохранения импульса. Рассматриваемую систему некорректно использовать для случая слабо иони-

*) Выше указывалось, что плазменные волны аналогичны борновским колебаниям в кристаллах. Акустические же волны в плазме подобны акустическим волнам в твердом теле.

зированного газа типа ионосферы, так как в этом случае уравнения (3.4)—(3.5) нужно дополнить членами, учитывающими соударения с молекулами, а всю систему уравнений в целом — уравнением для движения молекул⁴¹. Однако в этом случае пришлось бы встретиться с весьма громоздкими соотношениями, в то время как общую картину можно выяснить и на примере сильно ионизированного газа.

К уравнениям (3.4)—(3.5) следует добавить уравнение для электрического поля (2.1) и уравнения сохранения числа электронов и ионов (в случае электронов речь идет об уравнении (2.4)).

Считая плазму квазинейтральной, будем предполагать, что отклонения от равновесных значений концентраций $N_{e0} = N_{i0} = N$ малы. Тогда, отыскивая решение получающейся системы уравнений в виде плоских волн, можно найти дисперсионное уравнение, представляющее собой обобщение дисперсионного уравнения (2.5) на случай учета движения ионов²⁸. Не останавливаясь на этом уравнении в общем случае, приведем лишь вытекающие из него результаты при распространении волн в направлении постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0$, а также в перпендикулярном направлении.

При распространении волн вдоль поля $\mathbf{H}_0$ (т. е. при $\alpha = 0$), как и в § 2, когда движение ионов учтено не было, нормальные волны можно разделить на чисто продольные и чисто поперечные. Для поперечных волн имеем (^{41-42, 28} и § 63):

$$\frac{c^2 k_{1,2}^2}{\omega^2} = (n - ix)_{1,2}^2 = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega \left(\omega - i\nu_{эфф} \pm \omega_H - \frac{\Omega_H \omega_H}{\omega} \right)}. \quad (3.6)$$

В высокочастотном случае (3.2) отсюда получается выражение (2.6), справедливое при пренебрежении движением ионов (в (2.6) предположено, что $\nu_{эфф} = 0$). Если же соблюдается «условие низкочастотности» (3.3), то

$$(n - ix)_{1,2}^2 = 1 + \frac{v}{is + \sqrt{iu_i}} = 1 + \frac{4\pi e^2 N}{m\omega \left(i\nu_{эфф} + \frac{\Omega_H \omega_H}{\omega} \right)}, \quad (3.7)$$

где, очевидно, $u_i = \frac{\Omega_H^2}{\omega^2}$, а остальные обозначения те же, что и в §§ 1 и 2. Характерно, что согласно (3.7) обе волны 1 и 2 имеют одинаковые значения n и x ; обе волны являются чисто поперечными и отличаются своей поляризацией. Волны 1 и 2 в (3.6) поляризованы по кругу, но с противоположными направлениями вращения; в случае (3.7) в силу независимости n и x от состояния поляризации в качестве нормальных волн можно выбрать произвольно поляризованные поперечные волны, подобно тому, как это имеет место в изотропном случае.

При условии, что $\omega_H \Omega_H \gg \nu_{эфф} \omega$, влияние соударений невелико и, пренебрегая единицей по сравнению с обычно большой величиной

$$\frac{v}{\sqrt{iu_i}} = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega_H \Omega_H},$$

для фазовой скорости распространения волн получаем

$$v_\phi = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m\omega_H \Omega_H}}} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi NM}} \simeq \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (3.8)$$

где $\rho \simeq NM$ — плотность рассматриваемой плазмы, не содержащей нейтральных частиц.

Формула (3.8) представляет собой хорошо известное³⁹ выражение для скорости магнитогидродинамических волн и может быть получена, исходя из системы уравнений гидродинамики проводящей жидкости и уравнений электродинамики (см.^{17, 39-41} и ¹ § 63).

Для продольных волн при $\alpha = 0$ имеем уравнение, совпадающее с уравнением для подобных волн в изотропном случае

$$\beta_i^2 \beta^2 (n - ix)^4 - [\beta^2 + 2\beta_i^2 (1 - v - is)] (n - ix)^2 + 1 - v - is = 0, \quad (3.9)$$

где

$$\beta_i = \sqrt{\frac{xT}{Mc^2}}.$$

При выводе соотношения (3.9) было пренебрежено малыми членами порядка $\frac{m}{M}$; кроме того, плазма предполагалась изотермической ($T_e = T_i = T$) и в равновесном состоянии квазинейтральной. Так как уравнение (3.9) является квадратным относительно величины $(n - ix)^2$, то имеются две ветви нормальных волн. К одной из этих ветвей, как показывает анализ, принадлежат высокочастотные плазменные волны; к другой — низкочастотные акустические волны.

Допустим, что частота волн настолько высока, что выполнено условие $\beta^2 \gg \beta_i^2 v$, которое можно записать в виде

$$\omega^2 \gg \omega_{0i}^2, \quad (3.10)$$

где $\omega_{0i} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{M}}$ — частота колебаний ионов, которая введена по аналогии с собственной частотой колебаний электронов $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}$ (см. (1.17)). Тогда, не принимая во внимание соударений, вместо (3.9) имеем уравнение

$$\beta_i^2 \beta^2 n^4 - \beta^2 n^2 + 1 - v = 0. \quad (3.11)$$

Учитывая, что $\beta^2 \ll 1$ и тем более $\beta_i^2 \ll 1$, легко установить приближенные значения для корней уравнения (3.11). Для одного из них получаем

$$n^2 \cong \frac{1 - v}{\beta^2},$$

т. е. приходим к формуле (2.6) для плазменной волны при неучете движения ионов. Для второго корня имеем

$$n^2 \cong \frac{1}{\beta_i^2},$$

что соответствует распространению с фазовой скоростью

$$v_\phi = \frac{c}{n} = \sqrt{\frac{xT}{M}},$$

которая одного порядка со средней скоростью теплового движения ионов и скоростью звука в плазме. В действительности, однако, говорить о распространении подобных высокочастотных квазиакустических волн по всей вероятности нельзя, так как их фазовая скорость много меньше (в отношении $\sqrt{\frac{M}{m}}$) средней скорости теплового движения электронов.

В подобных условиях, по крайней мере для высокочастотных плазменных волн, должно возникнуть сильное затухание из-за теплового движения частиц (см. § 2), которое при квазигидродинамическом рассмотрении не учитывалось. Поэтому аналогичный результат для квазиакустических волн был бы вполне понятен (непосредственным расчетом это предположение не проверено).

Рассмотрим теперь случай низких частот, предполагая выполнение неравенства $\omega^2 \ll \omega_{0i}^2$, обратного (3.10). В этом случае, при неучете соударений, из (3.9) получаем

$$\beta_i^2 \beta^2 n^4 + 2\alpha \beta_i^2 n^2 - v = 0. \quad (3.12)$$

Для одного из корней уравнения (3.12) имеем $n^2 = \frac{1}{2\beta_i^2}$, что соответствует распространению волны со скоростью

$$v_\phi = \frac{c}{n} \cong \sqrt{\frac{2\kappa T}{M}}, \quad (3.13)$$

которая совпадает со скоростью звука в изотермической плазме, в силу чего рассматриваемую низкочастотную волну можно назвать акустической. Для второго из корней (3.12) $n^2 = -\frac{2v}{\beta^2}$, т. е. $n^2 < 0$ и, кроме того, $|n^2| \gg 1$, в силу чего этот корень реального интереса не представляет.

При распространении в направлении, строго перпендикулярном магнитному полю H_0 (т. е. когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$), как и при неучете движения ионов (см. § 2), дисперсионное уравнение распадается на два независимых уравнения, одно из которых определяет значения показателя преломления обыкновенной волны n_2^2 , а другое — остальных нормальных волн. При этом для n_2^2 получается формула (3.1), соответствующая изотропному случаю, и в итоге для этой волны учет движения ионов практически ничего нового не вносит. Электрический вектор и скорость движения частиц в обыкновенной волне 2 при $\alpha = \pi/2$ направлены по полю H_0 и именно поэтому эта волна и распространяется так же, как поперечные волны в изотропной среде. В области низких частот обыкновенная волна, очевидно, сильно затухает ($n^2 = 1 - v \simeq -v < 0$ при $v \gg 1$).

Другая часть дисперсионного уравнения при $\alpha = \pi/2$ и низкой частоте имеет три корня для n^2 (или при учете поглощения для $(n - ix)^2$). Два из этих корней отрицательны и велики по абсолютной величине, а один корень определяется соотношением (предполагается, что $s = 0$ и $\frac{v}{\sqrt{u u_i}} \gg 1$):

$$v(1 - 2\beta_i^2 n^2) = \sqrt{u u_i}. \quad (3.14)$$

Таким образом, в низкочастотном случае при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ возможно фактически распространение только одного типа волн, фазовая скорость которых в соответствии с (3.14) определяется формулой

$$v_\phi = \frac{c}{n} = \sqrt{\frac{2\kappa T}{M} + \frac{H_0^2}{4\pi N M}}. \quad (3.15)$$

Эти волны как бы являются одновременно и акустическими, и магнитогиродинамическими. Они линейно поляризованы; при этом скорости упорядоченного движения $\mathbf{v}_e$ и $\mathbf{v}_i$ направлены по $\mathbf{k}$, а электрическое поле $\mathbf{E}$ перпендикулярно плоскости $\mathbf{kH}_0$, т. е. в наших обозначениях (см. рис. 1) направлено по оси x . Соотношение (3.15) может быть получено в магнитогиродинами-

ческом приближении, т. е. опираясь на уравнения гидродинамики проводящей сжимаемой жидкости (см.⁴¹ и § 63).

Нужно заметить при этом, что при низких частотах область углов очень близких к $\alpha = \pi/2$, когда выполнено условие

$$\sqrt{uu_i} \cos^2 \alpha \ll 1$$

является исключительной (в этой области углов волны распространяются так, как это указано выше для случая $\alpha = \pi/2$). Дело в том, что при противоположном условии $\sqrt{uu_i} \cos^2 \alpha \gg 1$, т. е. при низких частотах, почти всегда волны распространяются уже существенно другим образом. Именно, для трех волн при этом скорость распространения отлична от нуля и справедливы соотношения, получающиеся в магнитогидродинамическом приближении (см.⁴¹ и § 63), и только одна волна, которая может быть названа плазменной, сильно затухает (для этой волны $n^2 \simeq -\frac{2v}{\beta_e^2} < 0$).

Если переход к случаю $\alpha = \pi/2$ совершить сразу в магнитогидродинамическом приближении, то для волны, которая может распространяться без затухания, как сказано, получается выражение (3.15). Но двум другим волнам (кроме плазменной) при $\alpha = \pi/2$ в магнитогидродинамическом приближении отвечает скорость $v_\phi = 0$, в то время как при квазигидродинамическом подходе выясняется, что эти волны сильно затухают (см. выше). Фактически это различие при $\alpha = \pi/2$ мало существенно, так как с обеих точек зрения соответствующие волны распространяться не могут. Тем не менее при угле α , близком к $\pi/2$, такое отличие может уже оказаться существенным и нужно помнить, что обычное магнитогидродинамическое приближение вообще справедливо только, если

$$\sqrt{uu_i} \cos^2 \alpha = \frac{\omega_H}{\omega^2} \cos^2 \alpha \gg 1$$

(вместе с тем, как ясно из сказанного, соблюдение этого условия не существенно для волны, скорость которой при $\alpha = \pi/2$ определяется выражением (3.15)).

Квазигидродинамическое рассмотрение является лишь приближенным методом учета влияния теплового движения на характер распространения низкочастотных волн. И здесь вновь, как и § 2, возникает вопрос о более детальном учете теплового движения, опирающемся на метод кинетического уравнения. Мы остановимся на этом вопросе только применительно к одному частному случаю: к магнитогидродинамическим волнам, распространяющимся в направлении магнитного поля H_0 . В этом случае в квазигидродинамическом приближении поправки за счет учета теплового движения электронов и ионов, как свидетельствуют соотношения (3.7)–(3.8), вообще отсутствуют. С этим выводом трудно согласиться, в частности, в связи с тем, что в большинстве интересных случаев скорость магнитогидродинамических волн

$$v_0 = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi NM}}$$

(см. (3.8)) может быть сравнительно небольшой и оказывается одного порядка или даже меньше средней скорости теплового движения ионов. Для высокочастотных волн в аналогичных условиях влияние теплового движения было бы весьма существенным (см. § 2). Поэтому без детального анализа остается неясным, не поведет ли более корректный учет теплового движения как к существенным поправкам для фазовой скорости, так и к дополнительному, не связанному с соударениями затуханию, подобного тому, о котором шла речь в § 2. Ответ на эти вопросы можно найти в работе⁴³ (см. также⁴⁴).

Опираясь на кинетические уравнения для электронов и ионов и предполагая, что в равновесном состоянии распределение электронов и ионов описывается максвелловской функцией с общей температурой T , можно для слабозатухающих волн прийти к соотношениям:

$$v_{\phi, 1, 2} = \frac{c}{n_{1, 2}} = v_0 \sqrt{1 \mp \frac{\bar{v}_i^2}{v_0^2} \frac{\omega}{\Omega_H}}, \quad (3.16)$$

$$\gamma_{1, 2} = \frac{\Omega_H^2}{\omega} \frac{v_{\phi, 1, 2}}{\bar{v}_i} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(2 \pm \frac{\bar{v}_i^2}{v_{\phi, 1, 2}^2} \frac{\omega}{\Omega_H} \right)^{-1} \exp \left(- \frac{v_{\phi, 1, 2}}{2 \bar{v}_i} \frac{\Omega_H^2}{\omega^2} \right), \quad (3.17)$$

где $v_{\phi, 1, 2}$ и $\gamma_{1, 2}$ определяют фазовую скорость и декремент затухания волн. При этом индекс 1 и верхний знак в (3.16)—(3.17) относятся к той низкочастотной волне, которая получена при предельном переходе, исходя из дисперсионного уравнения для необыкновенной волны; индекс 2 и нижний знак следует отнести к волне, полученной из уравнения для обыкновенной волны.

В формулах (3.16)—(3.17) $\bar{v}_i = \sqrt{\frac{\kappa T}{M}}$ — некоторая средняя скорость теплового движения ионов, $v_0 = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi NM}}$ — скорость волн при неучете теплового движения.

Характерным результатом, связанным с учетом теплового движения при использовании метода кинетического уравнения, является неравенство фазовой скорости распространения необыкновенной и обыкновенной волн и при предельном переходе к магнитогидродинамическим волнам. При этом фазовая скорость, найденная с учетом теплового движения, зависит от частоты ω , т. е. обе волны распространяются с дисперсией (см. (3.16)).

Из соотношения (3.17) можно сделать заключение, весьма существенное с точки зрения оценки роли рассматриваемого механизма затухания магнитогидродинамических волн. Величина декремента затухания в обсуждаемом здесь случае $\gamma \ll \omega$ (слабое затухание) определяется, в основном, выражением, стоящим в экспоненте, и зависит не только от квадрата отношения фазовой скорости v_{ϕ} к тепловой скорости наиболее медленных частиц — ионов $\left(\frac{v_{\phi}^2}{\bar{v}_i^2} \right)$, а от произ-

ведения $\frac{v_{\phi}^2}{\bar{v}_i^2}$ на величину $\frac{\Omega_H^2}{\omega^2}$, которая, в силу «условия низкочастотности» (3.3),

по определению много больше единицы. Поэтому величина затухания может быть весьма малой, даже когда фазовая скорость магнитогидродинамической волны сравнима или даже в известных пределах меньше скорости $\bar{v}_i$ теплового движения ионов. Это же относится и к поправкам к фазовой скорости v_0 (см. (3.8) и (3.16)). Однако, так как в (3.16) во втором члене подкоренного выражения отношение $\frac{\omega}{\Omega_H}$ входит только в первой степени, поправки к скорости за счет теплового движения могут быть более существенными.

Оценки на основе соотношения (3.16) показывают, что в условиях земной ионосферы тепловые поправки при определении величины фазовой скорости могут не приниматься во внимание. Декремент затухания (3.17) для распространения в ионосфере ничтожно мал, так что поглощение магнитогидродинамических волн в ионосфере определяется исключительно соударениями.

§ 4. ОБ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

Как в земной ионосфере, так и в ряде других случаев, приходится иметь дело с распространением волн в неоднородной плазме. Задача не может при этом быть исследована с достаточной полнотой, если не конкретизировать характер зависимости свойств среды от координат. Важнейшим примером такой конкретизации является рассмотрение плоско-слоистой среды. В этом случае, которым мы ниже ограничимся, компоненты тензора ϵ'_{ik} или (в изотропной среде) комплексная проницаемость ϵ' являются функциями только одной координаты, в качестве которой выберем координату z .

Далее, обычно можно считать, что свойства среды медленно изменяются на расстояниях порядка длины волны в этой среде, т. е. что при распространении волны вдоль оси z , соблюдается неравенство

$$\left| \frac{d\epsilon}{dz} \right| \cdot \lambda^2 = \left| \frac{d\epsilon}{dz} \right| \cdot \frac{\lambda_0}{\sqrt{|\epsilon|}} \ll \epsilon, \quad (4.1)$$

где поглощение предполагается, для простоты, отсутствующим; $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ — длина волны в вакууме, а $\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{\lambda_0}{n}$ — длина волны в среде. Условие (4.1) можно переписать в виде

$$\frac{\lambda_0}{2\pi |n|^2} \left| \frac{dn}{dz} \right| \ll 1, \quad (4.2)$$

применим и к случаю анизотропной и, в частности, магнитоактивной среды (при этом под n нужно понимать показатели преломления n_1 или n_2)*).

Если условие (4.1)–(4.2) выполнено, среду можно считать квазиоднородной в том смысле, что распространение волн в небольшой области неоднородной среды происходит так же, как и в однородной среде, с теми же параметрами. Соответствующее приближение называется приближением геометрической оптики**). В изотропном случае при нормальном падении плоской волны на плоско-слоистую среду выражение для поля волны в этом приближении можно записать, например, в виде

$$E_{x,y} = \frac{[\text{const}]}{\sqrt{n(z)}} e^{i \left[\omega t \pm \frac{\omega}{c} \int n(z) dz \right]}. \quad (4.3)$$

Для однородной среды, когда $n(z) = n = \text{const}$, решение (4.3) совпадает, разумеется, с выражением для поля плоской волны в однородной среде

$$E_{x,y} = E_0 \cdot e^{i \left(\omega t \pm \frac{\omega}{c} n z \right)}.$$

Отметим, что в приближении геометрической оптики обе волны, соответствующие

*) В (4.2) вместо λ_0 фигурирует величина $\lambda_0/2\pi$. Формально эта замена, поскольку речь идет о неравенстве, не существенна. Практически же множитель $1/2\pi$ довольно важен и в то же время получается автоматически при исследовании области применимости приближения геометрической оптики (можно сказать, таким образом, что свойства среды должны медленно изменяться на расстоянии порядка $\lambda/2\pi$).

**) Для справедливости приближения геометрической оптики, что мы отождествляем с возможностью считать среду квазиоднородной, соблюдение условия (4.2) необходимо, но еще не достаточно. Поскольку, однако, условия, отличные от (4.2), играют второстепенную роль, и с одним из таких условий придется столкнуться только в § 9, мы не будем останавливаться на этом вопросе подробнее (см. § 65 и 77).

щие знакам $\pm$ в (4.3), совершенно независимы — одна волна без отражения распространяется в направлении положительных значений z , а другая волна в противоположном направлении. Обе эти волны поэтому вполне аналогичны нормальным волнам в однородной среде.

Однако в областях, где условия (4.2) не выполняются, геометрико-оптическое приближение (4.3) несправедливо, и волны, распространяющиеся в разных направлениях, оказываются связанными. В этом смысле можно говорить о взаимодействии нормальных волн в неоднородной среде, понимая под нормальными волнами волны типа (4.3), являющиеся таковыми только в геометрико-оптическом приближении.

Это приближение, как ясно из (4.3), нарушается, если градиент dn/dz достаточно велик и, в частности, на резкой границе раздела между двумя средами. Условие (4.2) нарушается также в более интересном и специфическом для плазмы случае, когда показатель преломления n мал, т. е. вблизи точки $\epsilon(z) \equiv n^2(z) = 0$. В области около точки $n = 0$, а также в области больших градиентов n , происходит отражение волн, т. е. имеет место связь между волнами различного направления. Случай «отражения от точки» $n = 0$ вполне аналогичен при этом полному внутреннему отражению, хорошо известному в оптике.

До сих пор речь шла о нормальном падении волны на плоско-слоистую изотропную среду, когда волновой вектор направлен по оси z . Поляризация волн при этом, конечно, роли не играет, и решения (4.3) относятся в равной мере к компонентам электрического поля E_x и E_y .

При наклонном падении волн на изотропную среду волны с электрическим вектором, лежащим в плоскости падения yz , независимы от волн, для которых поле $\mathbf{E}$ перпендикулярно плоскости падения (при сделанном выборе координат в последнем случае $E_x \neq 0$, $E_y = E_z = 0$). Задача об отражении волн, для которых вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен плоскости падения, мало чем отличается от задачи о нормальном падении и математически легко сводится к этой последней путем замены $\epsilon'(z)$ на $\epsilon'(z) - \sin^2 \vartheta_0$, где ϑ_0 — угол падения волны из вакуума на неоднородную среду (см. ¹ § 67; для простоты предполагается, что на границе среды $\epsilon'(z) = 1$). При отсутствии поглощения $\epsilon' = \epsilon = n^2$, и роль точки отражения $n = 0$ играет точка $n(z) = \sin \vartheta_0$ (рис. 7).

В случае волны с вектором $\mathbf{E}$, лежащим в плоскости падения, отражение происходит от той же точки $n(z) = \sin \vartheta_0$, но, кроме того, поле волны имеет особенность в точке $\epsilon(z) = 0$. Отличие между полями волн с разными поляризациями ясно из схематического рис. 8 (по оси ординат отложен квадрат модуля поля стоячей волны, образующейся в результате отражения падающей волны от области, где $n = \sin \vartheta_0$). Своеобразное поведение поля волны, поляризованной в плоскости падения, вблизи нуля функции $\epsilon(z)$ обычно не привлекает большого внимания, так как практически в ионосфере соответствующий эффект оказывается несущественным (см. ниже). Однако вопрос об особенности поля в точке $\epsilon = 0$ не только весьма интересен в принципиальном отношении, но и может оказаться очень важным при рассмотрении механизма генерации радиоволн в солнечной короне ⁴⁵. Поэтому мы довольно подробно остановимся на исследовании поля вблизи точки, где $\epsilon = 0$.

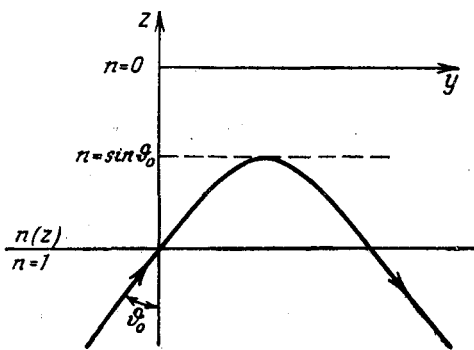


Рис. 7.

Впервые этот вопрос для случая наклонного падения радиоволн на изотропную среду с линейной зависимостью ϵ от z был рассмотрен в работе ⁴⁶. В ней было показано, что требование об обращении в нуль решения соот-

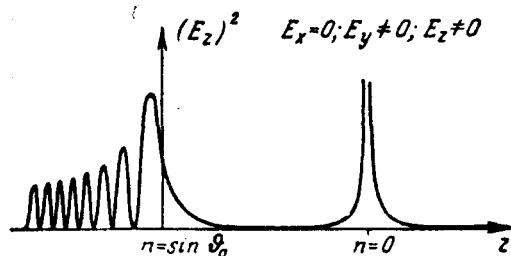
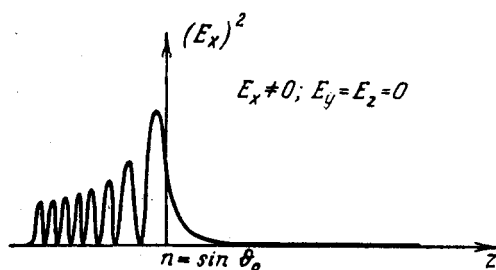


Рис. 8.

ветствующего волнового уравнения при $z \rightarrow \infty$ (в области отрицательных значений $\epsilon(z)$) приводит к появлению в этом решении члена, обращающегося в бесконечность в точке, где $\epsilon(z) = 0$. Однако автор затем уклонился от решения задачи, просто полагая, что функция $\epsilon(z)$ нигде не обращается в нуль. В дальнейшем исследованию этой задачи были посвящены работы ⁴⁷⁻⁴⁹.

Для волны, поляризованной в плоскости падения, удобнее рассматривать не электрическое поле с компонентами E_y и E_z , а магнитное поле, имеющее только компоненту H_x . Полагая

$$H_x = w(z) \cdot e^{i(\omega t + k_0 q y)}, \quad (4.4)$$

для $w(z)$ получаем уравнение (см., например, ¹ § 67)

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{1}{\epsilon'(z)} \cdot \frac{d\epsilon'}{dz} \cdot \frac{dw}{dz} + + k_0^2 (\epsilon' - q^2) w = 0, \quad (4.5)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c}$ и $q = \sin \theta_0$. Компоненты электрического поля можно найти из уравнения $\text{rot } \mathbf{H} = ik_0 \epsilon' \mathbf{E}$, что дает

$$E_y = \frac{1}{ik_0 \epsilon'} \frac{\partial H_x}{\partial z}; \quad E_z = -\frac{1}{ik_0 \epsilon'} \frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (4.6)$$

Воспользуемся, далее, выражением (1.16) для $\epsilon'(z)$, причем будем считать, что $\nu_{\text{эфф}}/\omega \ll 1$. Тогда

$$\epsilon'(z) \approx 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2} \left(1 + i \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \right) = \epsilon(z) - i \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cdot \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}.$$

Для простоты предположим также, что поглощение мало меняется с высотой, т. е. $\nu_{\text{эфф}}$ слабо зависит от z . В таком случае мнимую часть $\epsilon'(z)$ можно считать постоянной и равной ее значению при $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}$. В результате для линейного слоя получаем *)

$$\epsilon'(z) = -az - i \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} = -az - is, \quad (4.7)$$

где $a > 0$, так что для значений $z > 0$ диэлектрическая проницаемость $\epsilon(z) < 0$.

*) Для произвольного слоя выражение (4.7) также пригодно в малой окрестности нуля функции $\epsilon(z)$, где неприменимо приближение геометрической оптики (см. ¹ § 69).

Дифференциальное уравнение (4.5) запишется теперь в виде

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{a}{az + is} \frac{dw}{dz} + k_0^2 (-az - is - q^2) w = 0.$$

Вводя новую переменную $\zeta = az + is$ и обозначение $\rho = \frac{k_0}{a}$, получим

$$\frac{d^2 w}{d\zeta^2} - \frac{1}{\zeta} \frac{dw}{d\zeta} + \rho^2 (-\zeta - q^2) w = 0. \quad (4.8)$$

Вид уравнения (4.8) при переходе к случаю $s = 0$, очевидно, не меняется. Единственное отличие задачи с учетом поглощения заключается в том, что в ней «математическая» точка отражения $\zeta = -q^2$ соответствует комплексным значениям координаты z . Отметим, кроме того, что для среды с медленно меняющимися свойствами, входящий в уравнение (4.8) параметр $\rho = \frac{k_0}{a} \gg 1$. Так в слое F ионосферы ($a \sim 10^{-7}$) для частоты $\omega \sim 10^8$ параметр $\rho \sim 3 \cdot 10^4$.

В работах ⁴⁷⁻⁴⁸ было показано, что решение уравнения (4.8), удовлетворяющее необходимым физическим требованиям, принимает некоторое неравное нулю значение в точке, где $\varepsilon'(z)$ обращается в нуль. Поэтому вертикальная компонента электрического поля

$$E_z = -\frac{1}{ik_0 \varepsilon'} \frac{\partial H_x}{\partial y} = -\frac{q}{\varepsilon'(z)} \cdot w(z) e^{i(\omega t + k_0 y)} \quad (4.9)$$

обращается в этой точке в бесконечность. Характер этой особенности зависит от поведения функции $\varepsilon'(z)$, причем для линейного слоя E_z обращается в бесконечность, как $\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{az + is}$, а компонента E_y имеет логарифмическую особенность. Эти особенности находятся на действительной оси только при $s = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} = 0$. При учете же поглощения максимальное значение E_z будет равно

$$|E_z|_{z=0} = \frac{q |w(0)|}{s} \quad (4.10)$$

и при достаточно малых s может быть очень большим. При этом величина поля существенным образом зависит от того, какие значения принимает функция $w(0)$. Эта функция в свою очередь зависит от угла падения и определяет, таким образом, величину $|E_z|_{z=0}$ во всем интервале значений параметра $q = \sin \vartheta_0$.

Сравнительно легко установить вид функции $w(z)$ при больших углах падения, когда точка отражения $\zeta = -q^2$ (точка $\varepsilon' = \sin^2 \vartheta_0$) и особая точка $\zeta = 0$ (т. е. точка $\varepsilon' = 0$) отстоят друг от друга на значительном расстоянии ⁴⁹. Для этой цели вместо уравнения (4.8) удобнее исследовать уравнение

$$\frac{d^2 u}{d\zeta^2} - \left[\rho^2 (\zeta + q^2) + \frac{3}{4\zeta^2} \right] u = 0, \quad (4.11)$$

которому удовлетворяет функция

$$u(\zeta) = \frac{w(\zeta)}{\sqrt{\zeta}}. \quad (4.12)$$

Предположение о том, что расстояние между точками $\zeta = -q^2$ и $\zeta = 0$ велико, означает в данном случае, что это расстояние много больше длины волн. Для среды с медленно меняющимися свойствами ($\rho \gg 1$) это имеет место даже при малых значениях $q^2 = \sin^2 \vartheta_0$. В подобных условиях прибли-

женное решение уравнения ((4.11), справедливое всюду за исключением малой окрестности точки $\zeta = 0$ и представляющее слева от $\zeta = -q^2$ стоячую волну (рис. 9), можно записать в виде (см. ⁵⁰)

$$u = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{12}} \sqrt{\frac{S}{S'}} H_{1/3}^{(1)}(iS), \quad (4.13)$$

где

$$S = \rho \int_{-q^2}^{\zeta} \sqrt{\zeta + q^2} d\zeta = \frac{2}{3} \rho (\zeta + q^2)^{3/2}; \quad S' = \frac{dS}{d\zeta} \quad (4.14)$$

и $H_{1/3}^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода порядка $1/3$. Постоянная, стоящая в решении (4.13), выбрана так, чтобы на границе неоднородного слоя (при $\epsilon'(z) = 1$) амплитуда поля падающей волны была бы равна единице.

Другое приближенное решение, годное справа от точки отражения, можно получить, используя метод, предложенный в работе ⁵⁰. Введем новую независимую переменную

$$\xi = \rho \int_0^{\zeta} \sqrt{\zeta + q^2} d\zeta = \frac{2}{3} \rho [(\zeta + q^2)^{3/2} - q^3]. \quad (4.15)$$

Легко показать, что функция

$$u^* = A \sqrt{\frac{\xi}{\frac{d\xi}{d\zeta}}} \cdot H_1^{(1)}(i\xi) \quad (A = \text{const}) \quad (4.16)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 u^*}{d\xi^2} - \left[\rho^2 (\zeta + q^2) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\zeta} \right)^2 + \frac{5}{16 (\zeta + q^2)^2} \right] u^* = 0. \quad (4.17)$$

При малых ζ , как ясно из (4.15), $\xi \approx \rho q \zeta$, и уравнение (4.17) имеет точно такую же особенность в точке $\zeta = 0$, как и основное уравнение (4.11). Кроме

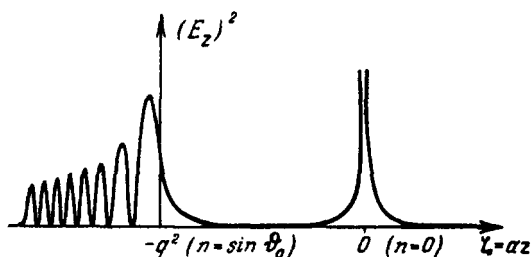


Рис. 9.

того, при больших значениях параметра ρ уравнения (4.17) и (4.11) вообще весьма мало отличаются друг от друга, если исключить из рассмотрения некоторую окрестность точки $\zeta = -q^2$, где функция $\frac{5}{16} (\zeta + q^2)^2$ начинает резко расти. Следовательно, вдали от точки $\zeta = -q^2$ соответствующим образом выбранные решения этих уравнений будут мало отличаться друг от друга.

При этом функция (4.16) аппроксимирует то решение, которое стремится к нулю при $\zeta \rightarrow \infty$ (в области отрицательных значений $\epsilon(z)$).

Мы получили, таким образом, приближенные решения (4.13) и (4.16), передающие асимптотическое поведение искомого решения (при $\rho \gg 1$) в различных областях значения переменной ζ : слева от $\zeta = 0$ (функция (4.13)) и справа от $\zeta = -q^2$ (решение (4.16)). В интервале $-q^2 < \zeta < 0$ справедливы оба приближения, что дает возможность связать эти решения так, чтобы они передавали поведение одного и того же частного решения нашей

задачи. Это сшивание решений дает для константы A значение ⁴⁹

$$A = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} - S_0}, \quad (4.18)$$

где

$$S_0 = \rho \int_{-q^2}^0 \sqrt{\zeta + q^2} d\zeta = \frac{2}{3} \rho q^3. \quad (4.19)$$

На основе (4.16) и (4.18) окончательную формулу, передающую поведение функции $w(\zeta)$ в области $\zeta > -q^2$, можно записать в следующем виде:

$$w(\zeta) = \sqrt{\zeta} u^* = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} - S_0} \sqrt{\frac{\zeta\xi}{\xi'}} H_1^{(1)}(i\xi). \quad (4.20)$$

Если величина ζ настолько мала, что $\xi = \rho q \zeta \ll 1$, то при вычислении компонент поля мы можем использовать разложение функции $H_1^{(1)}(i\xi)$ в степенной ряд, ограничиваясь первыми членами разложения

$$H_1^{(1)}(i\xi) \approx -\frac{2}{\pi\xi} - \frac{\xi}{\pi} \ln \xi. \quad (4.21)$$

Теперь легко показать, что амплитуды компонент поля ведут себя следующим образом. Амплитуда H_x при $\zeta \rightarrow 0$ стремится к постоянному значению (см. (4.4))

$$|w(0)| = \frac{2}{\pi\rho q} |A| = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \frac{e^{-S_0}}{q}. \quad (4.22)$$

Горизонтальная компонента электрического поля E_y согласно (4.6) равна

$$|E_y| \approx \frac{2q}{\pi} |A \ln \xi|, \quad (4.23)$$

т. е. имеет логарифмическую особенность. И, наконец, вертикальная компонента электрического поля E_z обращается в бесконечность по закону (см. (4.9))

$$|E_z| \approx \frac{q |w(0)|}{|\zeta|} = \frac{q |w(0)|}{\left| az + i \frac{\gamma_{\text{эфф}}}{\omega} \right|}. \quad (4.24)$$

Используя для величины $|w(0)|$ выражение (4.22), окончательно запишем

$$|E_z| \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \frac{e^{-S_0}}{|\zeta|}. \quad (4.25)$$

При $z = 0$ величина $|E_z|$ принимает максимальное значение (в среде с поглощением $\zeta = az + is$):

$$|E_z|_{z=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \frac{e^{-S_0}}{s_a}. \quad (4.26)$$

Напомним, что окончательные формулы применимы лишь при больших углах падения: при $q \rightarrow 0$ формула (4.22) дает явно неверный результат, так как при $q = 0$ (нормальное падение) строгое решение задачи свидетельствует о том, что $E_z = 0$. Однако для верхних слоев ионосферы, где $\rho \gg 1$, приближенные формулы оказываются пригодными вплоть до углов падения ϑ_0 по-

рядка $4^\circ \div 5^\circ$, и, как легко убедиться, в этих условиях эффект нарастания поля вблизи точки $\zeta=0$ был бы незначительным ($S_0 \gg 1$), даже если не учитывать влияния земного магнитного поля, о чем пойдет речь ниже. (Большие значения электрическое поле может принимать лишь при очень малых значениях $\nu_{\text{эфф}}$.) При этом наличие особенности в точке, где $\varepsilon'=0$, не сказывается на поведении поля в области, расположенной ниже точки отражения, т. е. отражение волны, имеющей компоненту E_z , в этих условиях происходит так же, как это имеет место для волны, электрический вектор которой перпендикулярен плоскости падения.

Формула (4.24) показывает, что величина поля в точке, где $\varepsilon=0$ (т. е. в точке $z=0$), помимо $\nu_{\text{эфф}}$, определяется значениями функции $q\omega(0)$. При нормальном падении (когда $q=0$) $E_z=0$; при больших значениях S_0 , как ясно из (4.19) и (4.25), поле E_z падает с ростом q . Следовательно, при некотором малом угле падения эффект нарастания поля у точки $\varepsilon=0$ будет максимальным. В связи с этим интерес представляет поведение функции $q\omega(0, q)$ при всех углах падения. Исследование решений уравнения (4.8) показывает⁴⁹, что функция $|q\omega(0, q)|$ во всем интервале значений параметра q может быть приближенно представлена в виде

$$|q\omega(0, q)| = \frac{4\tau\nu(\tau^2)}{\sqrt{2\pi\rho}} \sqrt{\frac{\nu(\tau^2)}{\nu'(\tau^2)}} = \frac{\Phi(\tau)}{\sqrt{2\pi\rho}}, \quad (4.27)$$

где ν и ν' — функция Эйри и ее производная (см. ⁵¹), а параметр

$$\tau = \rho^{1/3} q = \left(\frac{k_0}{a}\right)^{1/3} \cdot \sin \vartheta_0. \quad (4.28)$$

Зависимость максимальной величины $|E_z|$ от угла падения определяется, таким образом, функцией $\Phi(\tau)$, график которой приведен на рис. 10, где, кроме того, параллельно оси абсцисс приведен масштаб для угла падения ϑ_0 в градусах при $a=10^{-7}$ см⁻¹ и $\omega=2\pi \cdot 10^7$ ($\lambda_0=30$ м).

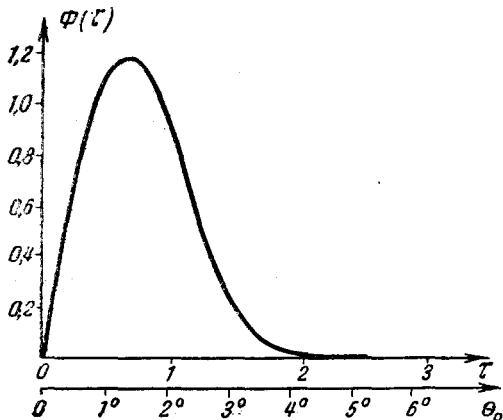


Рис. 10.

Существенно, что $\Phi(\tau)$ принимает значения порядка единицы для очень узкого интервала углов падения. Максимум кривой, равный 1,2, приходится для рассматриваемого примера на угол $\vartheta_0=1,5^\circ$ и уже при $\vartheta_0=5^\circ$ $\Phi(\tau) \sim 10^{-4}$.

Оценим, основываясь на формулах (4.24) и (4.27) значения, которые может достигать поле E_z в более или менее реальных условиях. Максимальное значение $|E_z|$ равно

$$\frac{1,2}{\sqrt{2\pi\rho}} \frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}} = \frac{1,2}{\frac{ca}{2\pi\omega}} \frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}.$$

Поэтому в E -слое ионосферы, где можно положить $a \sim 10^{-6}$, при $\lambda_0=100$ м ($\omega=6\pi \cdot 10^6$) $|E_z|_{z=0} \approx 3,6$ для $\nu_{\text{эфф}}=10^5$ и $|E_z|_{z=0} \approx 36$ для $\nu_{\text{эфф}}=10^4$.

Для слоя F ($a=10^{-7}$, $\omega=2\pi \cdot 10^7$ ($\lambda_0=30$ м)) имеем при $\nu_{\text{эфф}}=10^4$ $|E_z|_{z=0} \approx 20$, а при $\nu_{\text{эфф}}=10^3$ $|E_z|_{z=0} \approx 200$. Напомним, что на нижней границе неоднородного слоя $|E|=1$ и $|E_z|=|E| \sin \vartheta_0 = q$.

Известный интерес представляет также эффективный размер области, где поле велико. Из формулы (4.4) легко установить, что $|E_z|^2$ спадает до

максимального значения на расстояниях

$$\Delta z = \frac{v_{эфф}}{\omega a} = \frac{\lambda_0}{2\pi} \cdot \frac{v_{эфф}}{ca} \quad (4.29)$$

от точки $z=0$, где поле максимально.

При $v_{эфф} \sim 10^4$ и $a \sim 10^{-7}$, очевидно, что $\Delta z \sim \lambda_0$.

Резкое нарастание напряженности электрического поля вблизи точки, где $\epsilon'(z)=0$, приводит к тому, что описание поля при помощи обычной диэлектрической проницаемости $\epsilon'(z)$ может оказаться невозможным. Дело в том, что величина $\epsilon' = \epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ носит локальный характер, связывая поляризацию и ток в данной точке с электрическим полем в той же точке. Такое локальное приближение справедливо, если длина свободного пробега электронов $l = \frac{v}{v_{эфф}}$, а также путь $\frac{v}{\omega}$, проходимый ими за четверть периода (v — скорость электрона), малы по сравнению с Δz , т. е. с размерами области, в которой поле изменяется заметным образом*). Учитывая (4.29), отсюда получаем условия справедливости проведенных выше расчетов:

$$v_{эфф} \gg \sqrt{\omega va} = \sqrt{\frac{2\pi c v a}{\lambda_0}}; \quad v_{эфф} \gg va. \quad (4.30)$$

Второе из этих условий всегда слабее первого, поскольку мы рассматриваем случай, когда $\frac{v_{эфф}}{\omega} \ll 1$. Это второе условие, т. е. фактически условие $\frac{2\pi v}{\omega} \ll \Delta z$, приведено тем не менее по следующей причине. Если бы соударений совсем не было, то при использовании величины $\epsilon(z)$ поле в точке $z=0$ должно было бы возрасти до бесконечности. На самом же деле в достаточно сильном поле электрон приобретает большую скорость, так что величина $\frac{v}{\omega}$ возрастает и использование диэлектрической проницаемости ϵ становится недопустимым. В результате индукция $D(z)$ отлична от величины $\epsilon E(z)$ и в точке $z=0$ равна не нулю, а определяется полем E в точке, смещенной на расстояние порядка амплитуды колебаний электрона $\frac{v}{\omega}$. Поэтому, как было отмечено в ⁴⁸, в формуле типа (4.24) в точке $z=0$ (т. е. при $z=0$) в знаменателе стоит не

нуль, а величина $a \int_0^t v_z dt$, где v_z — скорость электрона в направлении оси z и $t=0$ — момент, когда поле обращается в нуль. В сильном поле скорость v_z значительно превосходит скорость теплового движения $v \sim \sqrt{\frac{\kappa T}{m}} \sim 10^7$ (при $T \sim 300^\circ \text{K}$) и по порядку величины равна $v_z \sim \frac{eE_z}{m\omega}$. Отсюда $a \int_0^t v_z dt \sim \frac{aeE_z}{m\omega^2} \sim 10^{-5} E_z$ (при $a \sim 10^{-7}$ и $\omega = 2\pi \cdot 10^7$). Поскольку зависящая от E_z

*) Речь здесь идет о требовании, аналогичном тому, которое используется в теории нормального скин-эффекта (см., например, ⁵²).

Приведенный в тексте критерий применимости локального приближения (4.30) является простейшим и, быть может, нуждается в уточнении на основе анализа кинетического уравнения. По причинам, ясным из дальнейшего, мы, однако, не останавливаемся на этом вопросе подробнее.

величина $a \int_0^t v_z dt$ появляется в знаменателе выражения типа (4.24) для E_z , ясно, что задача перестает быть линейной. Это и понятно, так как в гармоническом по времени, но сильно неоднородном поле электрон движется уже не по гармоническому закону. Обсуждаемый эффект в реальной среде становится существенным, если значение $a \int_0^t v_z dt$ сравнимо с величиной $\frac{v_{\text{эфф}}}{\omega}$, которая появляется в знаменателе выражения (4.24) при учете поглощения. В F -слое, как мы видели, $\frac{v_{\text{эфф}}}{\omega} \sim 10^{-4}$ и $a \cdot \int_0^t v_z dt \sim 10^{-5} E_z \sim 10^{-4}$ только при $E_z \sim 10 = 3000$ в/см; но в тех же условиях поле в точке $\varepsilon = 0$ больше поля в начале слоя лишь в 20 раз (см. выше) и, таким образом, нелинейный эффект нужно было бы учитывать только в очень сильных полях, с которыми не приходится иметь дело в случае ионосферы (мы уже не говорим о том, что в таких полях линейное рассмотрение распространения радиоволн в плазме становится недопустимым не только в окрестности точки $\varepsilon = 0$, но и во всем слое).

Что касается первого из условий (4.30), то при $a \sim 10^{-7}$ $\omega = 2\pi \cdot 10^7$ и $v \sim \sqrt{\frac{\kappa T}{m}} \sim 10^7$ оно принимает вид $v_{\text{эфф}} \gg 10^4$. Такое неравенство в F -слое не соблюдается и, следовательно, для строгого вычисления поля вблизи точки $\varepsilon = 0$ нужно было бы использовать кинетическое уравнение. В применении к ионосфере в соответствующем исследовании нет, однако, необходимости. Дело в том, что выше не учитывалось влияние земного магнитного поля, в силу чего только и можно было считать среду изотропной. Как мы увидим ниже (см. § 6), учет влияния магнитного поля в применении к ионосфере существенно изменяет картину. Поэтому, когда выше при численных оценках речь шла об ионосфере, это носило условный характер и служило, собственно, только для целей выбора каких-то параметров среды. Аналогичным образом мы будем поступать и в § 5, где осуждается еще один эффект, обеспечивающий конечность поля в точке $\varepsilon = 0$.

§ 5. ПОВЕДЕНИЕ ПОЛЯ ПРИ УЧЕТЕ ВЛИЯНИЯ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

Как было показано в § 4, учет поглощения, а также нелинейных эффектов приводит к устранению особенности, т. е. конечному значению поля электромагнитной волны в точке $\varepsilon = 0$. К тому же результату приводит также учет влияния плазменных волн. Дело в том, что возможность появления этих волн выше игнорировалась. Между тем в точке $\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = 0$ (поглощением пренебрегаем) частота волны ω как раз равна частоте плазменных колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}$. В этой связи можно думать, что характерное поведение вертикальной компоненты E_z в окрестности точки $\varepsilon = 0$ связано с резонансными свойствами плазмы. Функция, изображающая зависимость $|E_z|^2$ от z , представляет собой при этом своего рода резонансную кривую (см. рис. 9), которая вблизи максимума ($\varepsilon = 0$; $z = 0$) имеет вид $|E_z|^2 = \frac{\text{const}}{(az)^2 + \left(\frac{v_{\text{эфф}}}{\omega}\right)^2}$ (см. (4.24)). Детальное исследование вопроса подтверждает сказанное.

В случае неоднородной среды для рассматриваемой волны $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho = -E_z \frac{d \ln \varepsilon'}{dz} \neq 0$ (см.¹ § 67), в силу чего возникают плазменные колебания, амплитуда которых растет по мере приближения к резонансной точке $\varepsilon = 0$. Эти локальные колебания не являются при этом независимыми, поскольку всякое изменение плотности электронов в одном из участков среды передается соседнему через электронное давление, учет которого приводит к появлению плазменных волн, уносящих с собой некоторую долю энергии стоячей электромагнитной волны. В конечном итоге энергия, связанная с плазменными волнами, идет на нагревание плазмы.

Таким образом, при достаточно общей постановке задачи нужно учитывать возможность возникновения плазменных волн, что приводит к устранению особенности решения и конечному значению поля в резонансной точке. Соответствующий анализ в первом приближении можно провести, используя квазигидродинамический метод, о котором была речь в §§ 2 и 3. В уравнение движения электронов вводится электронное давление. Получающиеся при этом поправки войдут в уравнения поля для волны с компонентами E_z , H_y , H_x (см.⁴⁹). Предполагая, как и раньше, что свойства среды зависят лишь от координаты z , а волновой вектор $\mathbf{k}$ лежит в плоскости yz , ищем решение в виде ($q = \sin \vartheta_0$, см. рис 7):

$$H_x = w(z) e^{ik_0 q y}; \quad E_z = u(z) e^{ik_0 q y}. \quad (5.1)$$

Тогда при учете электронного давления для $w(z)$ и $u(z)$ получаем систему двух связанных между собой уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{1}{\varepsilon - \beta^2 q^2} \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{dw}{dz} + k_0^2 (\varepsilon - q^2) w &= \frac{\beta^2 q}{\varepsilon - \beta^2 q^2} \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{du}{dz}; \\ \beta^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + k_0^2 (\varepsilon - \beta^2 q^2) u &= q k_0^2 (\beta^2 - 1) w, \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

где $\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$ (поглощением пренебрегаем), и, как и в § 2, $\beta = \sqrt{\frac{\kappa T}{mc^2}}$. По порядку величины параметр β равен отношению скорости теплового движения электронов к скорости света и представляет собой в обычных условиях весьма малую величину (так, например, при $T \sim 300^\circ \text{K}$ $\beta \sim 2 \cdot 10^{-4}$).

Учет теплового движения электронов приводит, таким образом, к уравнениям более высокого порядка. Решения системы (5.2) описывают нормальные волны двух типов, которые только в некоторых частных случаях, или вне области, где величина ε мала, дают возможность представлять волновое поле в виде суперпозиции электромагнитных и плазменных волн. Так, при $q = 0$ (нормальное падение) система (5.2) распадается на два независимых уравнения. Первое из этих уравнений совпадает с уравнением (4.5) и его решения описывают электромагнитные волны. Второе же из уравнений (5.2) переходит в уравнение для плазменных волн.

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + k_0^2 \frac{\varepsilon(z)}{\beta^2} u = 0. \quad (5.3)$$

В случае наклонного падения ($q \neq 0$) разделение поля на электромагнитные и плазменные волны, строго говоря, невозможно. Поэтому, если выбрать нормальное решение, которое в области отрицательных $\varepsilon(z)$ затухает, то ниже некоторой точки «взаимодействия», где $\varepsilon = \beta^2 q^2$, асимптотическое поведение этого решения будет представлять электромагнитные (падающую и отраженную) и плазменную (отраженную) волны.

Легко убедиться в том, что если $\epsilon(z)$ не имеет особых точек и $\beta^2 \neq 0$, то решения системы (5.2) в интересующей нас области будут аналитическими функциями. Особенность же решения в точке, где $\epsilon(z) = 0$, появляется только при стремлении к нулю малого параметра β^2 , стоящего при старшей производной в эквивалентной системе (5.2) уравнения четвертого порядка.

Таким образом, учет теплового движения электронов действительно приводит к устранению особенностей электромагнитного поля. Как уже отмечалось, это связано с тем, что падающая на слой электромагнитная волна в резонансной области вызывает плазменную волну, энергия которой затем переходит в энергию теплового движения электронов. Такой механизм диссипации энергии естественно приводит к конечному значению плотности энергии в резонансной области.

Если величина $q = \sin \vartheta_0$ не мала, то взаимодействие между электромагнитной и плазменной волнами незначительно. Решая систему уравнений (5.2) методом последовательных приближений, можно при этом показать, что значение E_z в резонансной точке по порядку величины будет равно

$$|E_z|_{z=0} \sim \frac{q |\omega(0, q)|}{\left(\frac{\beta}{\rho}\right)^{2/3}}. \quad (5.4)$$

К этому результату можно прийти также при помощи нижеследующих простых рассуждений, которыми мы в данном случае и ограничимся. Напишем уравнение движения электронов под действием компоненты E_z при учете соударений и градиента давления (см. (2.3))

$$-\omega^2 N m r + i \omega \nu_{\text{эфф}} N m r = e N E_z - \chi T \frac{\partial N}{\partial z}, \quad (5.5)$$

где движение для простоты сразу предполагается гармоническим (все величины пропорциональны $e^{i\omega t}$) и, очевидно, $r = v/i\omega$ — смещение электрона. Если учесть, кроме того, уравнение непрерывности

$$\frac{\partial N}{\partial t} + i \omega \operatorname{div} N \bar{r} = 0$$

и положить $\frac{\partial N}{\partial z} \approx kn$, $\frac{\partial N}{\partial t} = i \omega n$, $\operatorname{div} N \bar{r} \approx k N r$, где n — малое отклонение концентрации электронов N от равновесного значения, а $1/k$ — некоторый размер, характеризующий волновое поле, то уравнение (5.5) можно записать в виде

$$-\omega^2 N m r + i \omega \nu_{\text{эфф}} N m r = e N E_z - \chi T k^2 N r. \quad (5.6)$$

Из этого уравнения ясно, что учет градиента давления (член $\chi T k^2 N r$) родственен учету соударений (член $i \omega \nu_{\text{эфф}} m N r$). Следовательно, можно думать, что для учета градиента давления (т. е. плазменных волн) в пренебрежении соударениями нужно в полученной ранее при учете соударений формуле

$$|E_z| \approx \frac{q |\omega(0, q)|}{\left| a z + i \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \right|} \quad (4.24)$$

заменить $\nu_{\text{эфф}}/\omega$ на $\frac{\chi T}{m \omega^2} k^2$. Что касается характерного размера $1/k$, то в качестве него естественно выбрать расстояние Δz , на котором величина $|E_z|^2$

уменьшается, скажем, в два раза. Очевидно, последнее будет иметь место, если $a\Delta z \sim \frac{a}{k} \sim \frac{\kappa T}{m\omega^2} k^2$ (см. (4.24), где величина $\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}$ заменена на $\frac{\kappa T}{m\omega^2} k^2$).

Отсюда

$$k \sim \left(\frac{m\omega^2 a}{\kappa T} \right)^{1/2},$$

и значение поля E_z в резонансной точке $z=0$ по порядку величины будет равно

$$|E_z|_{z=0} \sim \frac{q |w(0, q)|}{\frac{\kappa T k^2}{m\omega^2}} = \frac{q |w(0, q)|}{\left(\frac{\beta}{\rho} \right)^{1/2}},$$

что полностью совпадает с (5.4).

Таким образом, влияние плазменных волн в нашей задаче можно сравнить с аналогичным влиянием поглощения, если ввести некоторое эквивалентное число соударений

$$\frac{\nu_{\text{эkv}}}{\omega} = \left(\frac{\beta}{\rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{\kappa T}{m} \right)^{1/2} \left(\frac{a}{\omega} \right)^{1/2}. \quad (5.7)$$

Для слоя E ($\beta \sim 2 \cdot 10^{-4}$; $a = 10^{-6}$; $\lambda_0 = 100$ м) $\nu_{\text{эkv}} \cong 10^3$. Для слоя F ($\beta \sim (2 \div 4) \cdot 10^{-4}$; $\lambda_0 = 30$ м) $\nu_{\text{эkv}} \cong 4 \cdot 10^2$ (при $a = 10^{-7}$) и $\nu_{\text{эkv}} \cong 2 \cdot 10^3$ (при $a = 10^{-6}$).

Из этих цифр видно, что учет влияния плазменных волн в некоторых случаях ($a \sim 10^{-6}$) мог бы быть столь же существен, как и учет соударений (при $\nu_{\text{эфф}} \sim 10^3$). Однако в условиях ионосферы, даже если отвлечься от влияния земного магнитного поля (см. § 6), поглощение все же играло бы доминирующую роль.

Обсуждавшийся эффект взаимодействия поперечной и плазменной волны представляет большой интерес с точки зрения теории спорадического радиоизлучения Солнца (см. ⁴⁵).

§ 6. ПОВЕДЕНИЕ ПОЛЯ В МАГНИТОАКТИВНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Внешнее магнитное поле, вообще говоря, сильно влияет на распространение волн в плазме. Для однородной среды это обстоятельство уже неоднократно подчеркивалось в §§ 1—3. Если же плазма неоднородна, то различия между изотропным и магнитоактивным случаями становятся еще более разнообразными и ярко выраженными. В областях, где применима геометрическая оптика, распространение волн в неоднородной плазме в общем аналогично имеющему место в однородной плазме — положение здесь такое же, как в изотропном случае (см. § 4). Действительно, в геометрико-оптическом приближении поляризация бегущих (нормальных) волн в каждой точке неоднородной среды оказывается такой же, как и для однородной среды с параметрами, отвечающими этой точке. Амплитуда волны также определяется свойствами среды в рассматриваемой точке, а выражение для фазы $\varphi_{1,2} = -\frac{\omega}{c} \int n_{1,2} dz$ имеет очевидный физический смысл. Наконец, волны разных типов (обыкновенная и необыкновенная) и волны данного типа, но бегущие в противоположных направлениях, распространяются независимо друг от друга. В подобных условиях особенно удобно и естественно рассматривать распространение волн в среде с помощью графика функций $n_{1,2}^2(\nu)$ (см. рис. 2).

Параметр $v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2}$ характеризует при этом расстояние от начала неоднородного слоя, а для линейного слоя ($N(z) = az$) просто пропорционален этому расстоянию.

В начале слоя падающая волна расщепляется на обыкновенную (индекс 2) и необыкновенную (индекс 1), которые затем распространяются независимо друг от друга «вдоль кривых» $n_2^2(v)$ и $n_1^2(v)$. При $u = \frac{\omega_n^2}{\omega^2} < 1$ (для определенности будем иметь в виду именно этот случай) волна 1 доходит до точки

$$v_1^- = 1 - \sqrt{u} = 1 - \frac{\omega_n}{\omega}, \quad (6.1)$$

где $n_1(v) = 0$, и должно иметь место полное отражение (поглощением пренебрегаем; рассматривается нормальное падение волны на слой). В точке $n_1(v) = 0$ или, точнее, в области вблизи этой точки геометрическая оптика к волне типа 1, конечно, не применима. Но к волне типа 2 геометрико-оптическое приближение в этой области применимо*) и, следовательно, волна типа 2 здесь не отражается. Поведение же вблизи точки v_1^- волны типа 1 оказывается, естественно, вполне аналогичным поведению волны с любой поляризацией в изотропной среде вблизи точки $\epsilon(z) = n^2(z) = 0$ (речь идет о нормальном падении). Что касается волны типа 2, то для нее $n_2(v) = 0$ при

$$v = v_2 = 1, \quad (6.1')$$

т. е. там же, где обращается в нуль показатель преломления в изотропном случае, когда $\epsilon(v) = n^2(v) = 1 - v$. В точке (6.1') отражается волна типа 2; волна типа 1 в этой области распространяется независимо от волны 2 и, кроме того, не может попасть туда из области $v < 1 - \sqrt{u}$ (подробнее см. ¹ гл. V).

В магнитоактивной среде геометрическая оптика может, однако, оказаться неприменимой не только в двух указанных случаях (вблизи точки v_1^- для волны 1 и вблизи точки v_2 для волны 2), в которых картина подобна имеющей место в изотропной среде. В некоторых условиях приближение геометрической оптики в магнитоактивной среде может нарушаться также в самом начале слоя, где значения параметра $v = \frac{4\pi e^2 N}{m}$ весьма малы. Этот случай будет разобран в § 9. Кроме того, геометрическая оптика неприменима также в области, охватывающей точку $v_2 = 1$, одновременно к волнам обоих типов, если достаточно мал угол α между магнитным полем и осью z (направлением волнового вектора). В результате при малых углах $\alpha \neq 0$ обыкновенная и необыкновенная волны (волны типа 2 и 1) взаимодействуют друг с другом в смысле, указанном в начале § 4. Наличие этого взаимодействия приводит к своеобразному эффекту «умножения» отражающихся от ионосферы сигналов (см. ⁵³ и ¹ § 79). На новых результатах, касающихся взаимодействия обыкновенной и необыкновенной волн, мы остановимся в §§ 7 и 8. Сейчас же перейдем к обсуждению вопроса о влиянии магнитного поля на своеобразное «разбухание» поля вблизи точки $\epsilon(v) = n^2(v) = 0$, которое было рассмотрено в §§ 4 и 5 только в применении к изотропной среде.

*) Предполагается, что слой является плавным (т. е. ϵ_{ik} плавно меняются в зависимости от z) и кроме того, что точка отражения не находится в непосредственной близости от максимума слоя.

Как было выяснено в § 5, особенность поля в точке $\varepsilon = 0$, имеющая место при наклонном падении волны с отличной от нуля компонентой E_z , связана с резонансными свойствами плазмы. Не случайно поэтому, что в точке $\varepsilon = 0$ частота падающей поперечной электромагнитной волны ω совпадает с плазменной частотой ω_0 . В этой связи можно думать, что при наличии магнитного поля «разбухание» электрического поля волны также будет иметь место в случае совпадения частот падающей и плазменной волн. Но в магнитном поле слабо затухающие плазменные волны могут существовать лишь

вблизи точки $v_\infty = \frac{u-1}{u \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\omega_H^2 - \omega^2}{\omega_H^2 \cos^2 \alpha - \omega^2}$, в которой показатель преломле-

ния для необыкновенной волны $n_1(v) = \infty$ (см. § 1; предполагаем, что $u < 1$). Таким образом, мы приходим к заключению, которое подтверждается в результате более подробного анализа (см. ⁵⁴ и ниже), что в магнитоактивной среде поле волны будет иметь особенность (или при учете поглощения — мак-

симум) в точке v_∞ . При этом для значений $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} < 1$, когда $n_1(v_\infty) = \infty$, особенность будет иметь необыкновенная волна, а при $u > 1$, $u_L > 1$ особенность будет иметь обыкновенная волна (в случае $u > 1$, $u_L > 1$, как известно, $n_2(v_\infty) = \infty$; в области $u > 1$, $u_L < 1$ особенности не имеет ни одна волна; см. § 1). Этот результат находится, конечно, в соответствии со всем сказанным ранее применительно к изотропной среде, так как при стремлении магнитного поля к нулю ($u \rightarrow 0$) $v_\infty \rightarrow 1$, и, таким образом, особенность поля имеет место как раз в точке $\varepsilon = 1 - v = 0$.

Общие уравнения поля для наклонного падения весьма сложны. Поэтому ограничимся частным случаем, когда внешнее магнитное поле H_0 направлено по оси x , а нормаль к волне лежит в плоскости yz (свойства среды изменяются лишь в зависимости от z)*). В подобных условиях (поперечное распространение, т. е. угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$) уравнения поля разделяются на два независимых уравнения для обыкновенной и необыкновенной волн. В обыкновенной волне отличны от нуля компоненты E_x , H_y , H_z , и она распространяется так же, как и при отсутствии магнитного поля. Это вполне понятно, поскольку электрическое поле этой волны параллельно внешнему магнитному полю H_0 , и последнее не влияет на вынужденное движение электронов под действием поля E . Поле этой волны не имеет особенностей.

Для необыкновенной волны отличны от нуля компоненты H_x , E_y и E_z . Полагая в этом случае (обозначения такие же, как и в § 4)

$$H_x = w(z) e^{ik_0 q u},$$

для $w(z)$ имеем

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{dw}{dz} + k_0^2 \left(\mu - q^2 - \frac{q\mu}{k_0} \frac{df}{dz} \right) w = 0. \quad (6.2)$$

Далее,

$$\left. \begin{aligned} E_y &= \left[iqf(v) w(z) - \frac{i}{k_0 \mu(v)} \frac{dw(z)}{dz} \right] e^{ik_0 q y}, \\ E_z &= \left[-q \frac{w(z)}{\mu(v)} + \frac{f(v)}{k_0} \frac{dw(z)}{dz} \right] e^{ik_0 q y}. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

*) Для того чтобы обозначения ближе соответствовали принятым в §§ 4 и 5, мы направляем поле H_0 по оси x в отличие от условия, принятого в § 1 (в § 1 поле H_0 предполагалось лежащим в плоскости yz).

В выражениях (6.2)–(6.3) введены обозначения $\left(v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2}, \right.$
 $\left. u = \frac{\omega_h^2}{\omega^2} \right)$:

$$\mu(v) \equiv n_1^2(v) = 1 - \frac{v(1-v)}{1-u-v}; \quad f(v) = \frac{\sqrt{u} \cdot v}{(1-v)^2 - u}. \quad (6.4)$$

Функция $\mu(v)$ представляет собой не что иное, как квадрат показателя преломления для необыкновенной волны в случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (см. § 75, или формулу (1.9) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$). При нормальном падении нули функции $\mu(v) \equiv n_1^2(v)$ являются точками «отражения»; координаты их суть $v_1^\pm = 1 \pm \sqrt{u}$ (рис. 11). Плазменные же волны при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ могут существовать вблизи точки

$$v_\infty = 1 - u = 1 - \frac{\omega_h^2}{\omega^2}. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.2) по виду лишь немногим отличается от соответствующего ему уравнения (4.5) для изотропного случая, когда $u = 0$. Поэтому, казалось бы, здесь нужно ожидать появления особенности у поля в точке $v_1^- = 1 - \sqrt{u}$, поскольку выражения для E_y и E_z (см. (6.3)) содержат множители $1/\mu(v)$ и $f(v)$, обращающиеся в этой точке в бесконечность (поглощением пренебрегаем). Однако исследование решений

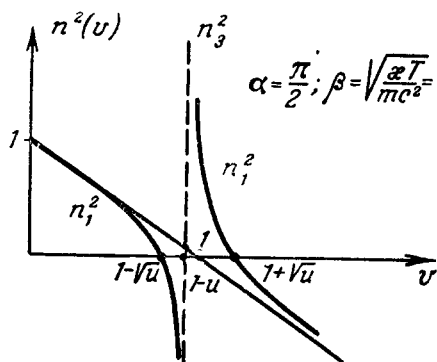


Рис. 11.

показывает, что поле в этой точке остается конечным⁵⁴. Этот вывод физически ясен после сказанного выше о том, что особенности у поля нужно ожидать не у точки v_1^- , а у точки v_∞ , где частота внешнего поля совпадает с собственной частотой колебаний плазмы. Анализ уравнения (6.2) подтверждает и это последнее заключение. Интересно отметить, что особенности поля существуют теперь и при $q = \sin \vartheta_0 = 0$, т. е. и в случае нормального падения. Этот факт объясняется

тем, что у необыкновенной волны и при нормальном падении электрический вектор имеет продольную компоненту E_z , которая и возбуждает плазменные колебания вблизи точки $v_\infty = 1 - u$. Поэтому ограничимся ниже рассмотрением только нормального падения.

В случае нормального падения удобнее сначала выяснить поведение компоненты E_y , которая подчиняется уравнению

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 \left(1 - \frac{v(1-v)}{1-u-v} \right) E_y = 0, \quad (6.6)$$

а остальные компоненты определить из соотношений

$$E_z = i \frac{\sqrt{u} \cdot v}{1-u-v} E_y; \quad H_x = \frac{1}{ik_0} \frac{\partial E_y}{\partial z}. \quad (6.7)$$

Считая функцию $v(z)$ линейной $\left(\frac{dv}{dz} = a\right)$ и делая в (6.6) замену переменного $1 - u - v = -\zeta$, получим

$$\frac{d^2 E_y}{d\zeta^2} + \rho^2 \left(2u - \zeta + \frac{u(1-u)}{\zeta}\right) E_y = 0; \quad \left(\rho = \frac{k_0}{a}\right). \quad (6.8)$$

При очень малых ζ (пренебрегая членами $2u$ и ζ по сравнению с $\frac{u(1-u)}{\zeta}$) получим приближенное решение этого уравнения в виде

$$E_y = \sqrt{\zeta} H_1^{(1, 2)}(2\rho \sqrt{u(1-u)}\zeta), \quad (6.9)$$

где $H_1^{(1, 2)}$ — функции Ганкеля первого порядка. Затем сразу же можно убедиться в том, что при $\zeta \rightarrow 0$ компонента E_y остается конечной, так как $H_1^{(1, 2)}(\sqrt{\zeta}) \sim \frac{1}{\sqrt{\zeta}}$. Следовательно, компонента E_z обращается, согласно (6.7), в бесконечность по закону

$$|E_z| = \frac{\text{const}}{|\zeta|}. \quad (6.10)$$

Кроме того, простым дифференцированием можно показать, что компонента

$$H_x = \frac{1}{ik_0} \frac{\partial E_y}{\partial z} \sim H_0^{(1, 2)}(2\rho \sqrt{u(1-u)}\zeta)$$

имеет логарифмическую особенность, так как $H_0^{(1, 2)}(\sqrt{\zeta}) \sim \ln \zeta$ при $\zeta \rightarrow 0$.

При учете поглощения поле в любой точке будет конечным. Действительно, в этом случае в формулах (6.6), (6.7) вместо функции $1 - u - v$ будет стоять $1 - u - v - i \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} (1 + u)$ (см. § 75; учтено, что $(\nu_{\text{эфф}}/\omega) \ll 1$ и $v \cong v_{\infty} = 1 - u$) и, следовательно, при малых ζ вместо формулы (6.10) получим

$$E_z = \frac{\text{const}}{\left| \zeta + i \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} (1 + u) \right|}. \quad (6.11)$$

В изотропном случае величина E_z зависит от угла падения. Аналогично этому, в случае нормального падения волны на ионизированную среду в присутствии магнитного поля компонента E_z зависит от величины магнитного поля или, точнее, величины $u = \frac{\omega_n^2}{\omega^2}$. Максимальный эффект, очевидно, будет иметь место при некотором малом значении параметра u , когда нули функции $n_1^2(v)$ сближаются. При $u = 0$ особенность поля, конечно, исчезает (речь идет о нормальном падении).

Как показывают оценки⁵⁴, в ионосферных условиях эффект нарастания поля несуществен, так как значение магнитного поля Земли относительно велико и точка отражения $v_1^- = 1 - \sqrt{u}$ для оптимальных частот лежит значительно ниже резонансной точки $v_{\infty} = 1 - u$. Таким образом, учет влияния земного магнитного поля действительно не позволяет использовать результаты §§ 4 и 5 в случае земной ионосферы, а так же вообще приводит к несущественности эффекта резкого «разбухания» поля в ионосферных условиях. Это

обстоятельство, однако, ни в коей мере не лишает этот эффект большого значения как в принципиальном отношении, так и в применении к другим случаям (например, к солнечной короне).

Заметим, что бесконечное нарастание поля в резонансной точке v_∞ устраняется не только при наличии соударений, но и при учете возможности возникновения плазменных волн. Для этой цели, как и в изотропном случае (см. § 5), необходимо учитывать тепловое движение электронов. В результате, как было показано в § 2, полюс функции $n_1^2(v)$ исчезает. Тем не менее функция $n_1^2(v)$ и примыкающая к ней функция $n_3^2(v)$ по-прежнему состоят из двух

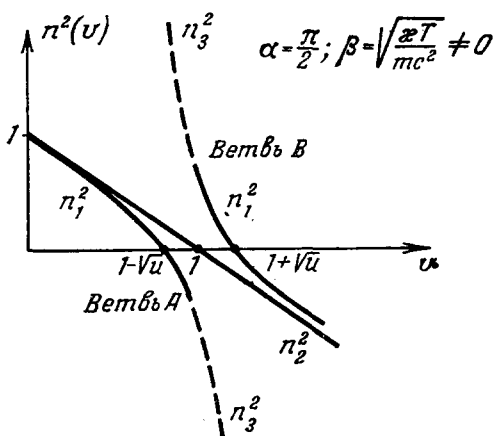


Рис. 12.

ветвей A и B , показанных на рис. 12 (см. также рис. 3 и 5).

В однородной среде волны, принадлежащие к ветвям A и B , не взаимодействуют. Однако при распространении волн в неоднородной среде будет иметь место явление, аналогичное тому, с которым мы встречаемся при изучении взаимодействия необыкновенной и обыкновенной волн в условиях квазипродольного распространения (см. ¹ § 79 и ниже § 7).

Простейшее рассмотрение этой задачи в квазигидродинамическом приближении показывает, что уравнения поля волны, имеющей продольную компоненту электрического поля E_z , уже при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ записыва-

ются в виде двух связанных между собой уравнений второго порядка. В среде могут существовать волны типа A и B , которые взаимодействуют друг с другом в области резкого изменения функции $n_{13}^2(v)$. При распространении волны A в среде возникают волны типа B : одна из них справа от области взаимодействия ($v \sim 1 - u$) (см. рис. 12) бежит в сторону нуля функции $n_{1B}^2(v)$, полностью от него отражаясь, другая распространяется в сторону больших значений показателя преломления. Последняя представляет собой в этой области плазменную волну, которая, в конечном итоге, полностью поглощается. Совершенно ясно из этой картины, что никаких особенностей поля в этом случае не будет.

Отметим, наконец, что в среде с медленно меняющимися свойствами ($\rho = \frac{k_0}{a} \gg 1$) поле необыкновенной волны, отражающейся на уровне $v_1^- = 1 - \sqrt{u}$, достигает резонансной точки $v = 1 - u$ с весьма малой амплитудой, если только параметр u не близок к нулю. В этих условиях взаимодействие волн будет настолько незначительным, что существованием волны B можно вообще пренебречь и рассматривать отражение необыкновенной волны от точки v_1^- обычными методами. Ощутимого взаимодействия можно ожидать лишь при малых u , когда кривые $n_A^2(v)$ и $n_B^2(v)$ сближаются (см. рис. 12)*. Заметим, что в пределе, когда $u = 0$ (нет магнитного поля), функции $n_A^2(v)$ и $n_B^2(v)$ вырождаются в две прямые (см. (2.6) и рис. 4, б при $u = 0$). В этом случае можно говорить о полном разделении поля на электромагнитные вол-

*) Показатели n_A и n_B суть показатели преломления для ветвей A и B , показанных на рис. 12. При этом, очевидно, $n_A = n_1$ при $v < 1 - u$ и $n_A = n_3$ при $v > 1 - u$; аналогично $n_B = n_3$ при $v < 1 - u$ и $n_B = n_1$ при $v > 1 - u$ (имеется в виду случай $\alpha = \pi/2$).

ны с показателем преломления $n_1(v)$ и плазменные волны с показателем $n_3^2(v)$ (волны типа 2 распространяются независимо и при $u \neq 0$; напомним, что имеется в виду случай $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $u < 1$).

В заключение остановимся, независимо от исследования особенностей поля, на поведении волн в области, где показатель преломления обращается в бесконечность. Исследование поведения поля в малой окрестности полюса $n^2(v)$ не может дать исчерпывающий ответ на вопрос о том, какие изменения возникают в электромагнитной волне, проходящей через резонансную область. Например, в некоторых случаях оказывается, что даже при отсутствии затухания (соударений) волна частично или полностью поглощается в этой области.

Для поперечного распространения ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) решение этой задачи связано с исследованием строгих решений уравнения (6.8) (для линейного слоя). Так как получение общего решения этого уравнения затруднительно, мы ограничимся исследованием строгих решений для упрощенных видов функции $n^2(v)$. Для этой цели рассмотрим следующие уравнения:

$$\frac{d^2 E}{d\zeta^2} + \rho^2 \frac{b}{\zeta} E = 0, \quad (6.12)$$

$$\frac{d^2 E}{d\zeta^2} + \rho^2 \left(b_1 + \frac{b_2}{\zeta} \right) E = 0 \quad (6.13)$$

($\zeta = az$ — безразмерная координата и $\rho = \frac{k_0}{a}$), где в изотропной среде под E

можно понимать любую из компонент E_x или E_y (для изотропной среды продольные компоненты поля равны нулю). Если же нас интересует случай поперечного распространения в магнитоактивной среде, то под E нужно понимать компоненту E_y , а остальные компоненты находить из соотношений типа (6.7).

Уравнение (6.12) описывает распространение волн в среде, показатель преломления которой не имеет нулей и обращается в бесконечность в точке $\zeta = 0$ (рис. 13). Это уравнение можно получить, например, из уравнения (6.8), пренебрегая членами $2u$ и ζ по сравнению с $\frac{u(1-u)}{\zeta}$.

Как показывает исследование⁵⁵ строгих решений уравнения (6.12), волна, падающая на такой слой со стороны положительных ζ (положительных значений $n^2(\zeta)$), полностью поглощается в области, где $n^2(\zeta)$ обращается в бесконечность (полное поглощение имеет место даже, если $\gamma_{\text{эфф}} = 0$). Ясно, что плотность энергии в этой области нарастает до бесконечности.

Уравнение (6.13) описывает распространение волн в слое, диэлектрическая проницаемость которого имеет один нуль в точке $\zeta = -\frac{b_2}{b_1}$ и обращается в

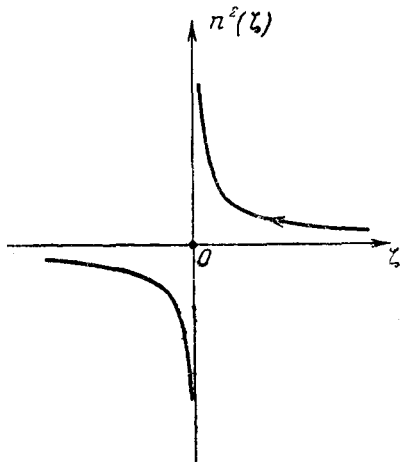


Рис. 13.

бесконечность в точке $\zeta = 0$ (рис. 14). Если выбрать

$$b_1 = \sqrt{u}(1-u); \quad b_2 = u(1-u),$$

то характер особенности и один из нулей $\zeta = -\sqrt{u}$ функции $n^2(\zeta)$ в уравнениях (6.8) и (6.13) будут одинаковыми. Исследование строгих решений для этого случая показывает следующее⁵⁵. Если волна падает со стороны положительных значений ζ , то отражения не происходит, а ее просачивание в область, расположенную слева от нуля $\zeta = -\frac{b_2}{b_1}$, характеризуется коэффициентом

прохождения

$$D = e^{-\frac{\pi p}{2} \frac{b_2}{\sqrt{b_1}}} = e^{-\frac{\pi p}{2} u^{3/4} \sqrt{1-u}}. \quad (6.14)$$

Относительная доля энергии, которая поглощается в резонансной области, равна

$$A^2 = 1 - D^2 = 1 - e^{-\pi p u^{3/4} \sqrt{1-u}}.$$

Для волны, падающей слева, т. е. со стороны отрицательных значений ζ , коэффициенты отражения и прохождения равны

$$R = 1 - e^{-\pi p \frac{b_2}{\sqrt{b_1}}}, \quad (6.15)$$

$$D = e^{-\frac{\pi p}{2} \frac{b_2}{\sqrt{b_1}}}. \quad (6.16)$$

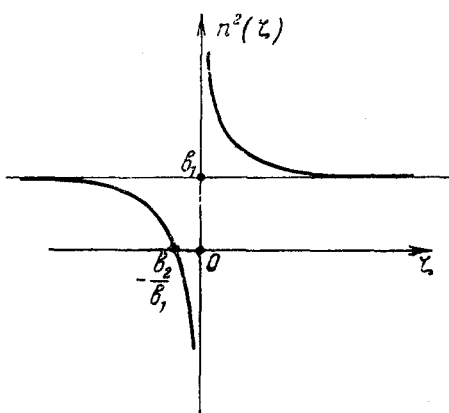


Рис. 14.

Доля энергии, которая поглощается, и в этом случае не равна нулю ($A^2 = 1 - R^2 - D^2 > 0$), а плотность энергии в окрестности точки $\zeta = 0$ нарастает до бесконечности^{*}).

Заметим, что аналогичный эффект поглощения энергии при $\nu_{эфф} \rightarrow 0$ был еще раньше рассмотрен в случае взаимодействия обыкновенной и необыкновенной волн при малых значениях α (см. ¹ § 79).

§ 7. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОБЫКНОВЕННОЙ И НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛН В ИОНОСФЕРЕ (ЭФФЕКТ «УМНОЖЕНИЯ» ОТРАЖЕННЫХ РАДИОСИГНАЛОВ)

Как уже упоминалось в § 6, в неоднородной магнитоактивной среде даже при плавном изменении концентрации электронов с высотой (координатой z) геометрическая оптика становится в некоторой области неприменимой к обеим волнам 1 и 2 (необыкновенной и обыкновенной) в случае малых углов α между нормалью к волне и направлением внешнего магнитного поля. При нормальном падении волны на слой, что будет ниже предполагаться, область неприменимости геометрической оптики расположена вблизи точек $\nu = 1$ и ν_∞ , которые при малых углах α близки друг к другу (напомним,

^{*}) Заметим, что задача о поглощении волн в резонансной области $\nu \cong 1 - u$ для поперечного распространения в магнитоактивной плазме в общем случае еще не решена. Очевидно, однако, что при учете отражения от второго нуля функции $n^2_1(\nu)$ (см. рис. 11) поглощение возрастает.

что при нормальном падении угол α есть угол между направлением магнитного поля и осью z). Интересно, что при $\alpha = 0$ (продольное распространение) район вблизи точки $v = 1$ для обеих волн 1 и 2 ничем не выделен, а продольная плазменная волна 3, могущая существовать в этом случае при $v = 1$, совершенно независима от волн 1 и 2. Это и понятно, так как волна 3 распространяется по магнитному полю, которое не влияет на движение частиц в том же направлении. Что же касается малых углов $\alpha \neq 0$, то отмеченное нарушение условий применимости геометрической оптики ясно в этом случае уже из соответствующих кривых $n_{1,2}^2(v)$, изображенных на рис. 2 и 15.

Неприменимость геометрической оптики к обеим волнам 1 и 2 приводит к явлению «взаимодействия». Математическое описание этого взаимодействия заключается в нахождении асимптотических представлений точного решения волнового уравнения, относящихся к различным областям, разделенным областью взаимодействия. Это взаимодействие приводит к тому, что падающая из области $v < 1$ обывковенная волна в области взаимодействия ($v \approx 1$) частично отражается, а частично превращается в несбыкновенные волны, распространяющиеся вправо и влево от точки $v = 1$ (см. правую ветвь функции $n_1^2(v)$ на рис. 15). В применении к ионосфере такое взаимодействие приводит к эффекту «умножения» отраженных радиосигналов, рассмотренному в ⁵³ и затем подробнее в ¹ § 79 (этому вопросу, а также родственным проблемам посвящены также работы ⁵⁶⁻⁶²). Ниже мы остановимся только на новых

результатах в этой области, не нашедших отражения в § 79 монографии ¹.

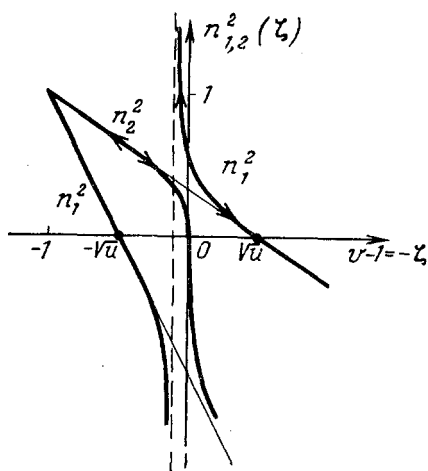


Рис. 15.

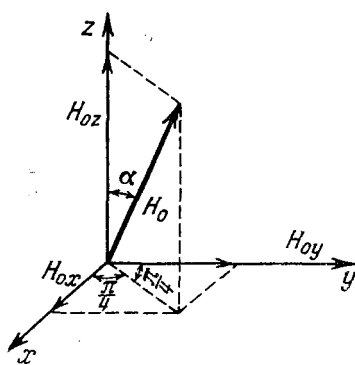


Рис. 16.

Все исследование проводится на базе феноменологических (макроскопических) уравнений в применении к плоско-слоистой магнитоактивной среде. В системе координат, изображенной на рис. 16, эти уравнения принимают вид (все величины пропорциональны $e^{i\omega t}$, свойства среды изменяются вдоль оси z , рассматривается нормальное падение):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 F_1}{dz^2} + k_0^2 (C + B) F_1 &= -ik_0^2 A F_2, \\ \frac{d^2 F_2}{dz^2} + k_0^2 (C - B) F_2 &= ik_0^2 A F_1, \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

где

$$F_1 = E_x + iE_y; \quad F_2 = E_x - iE_y, \quad (7.2)$$

и используются следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} C &= 1 - \frac{(1-is-\varepsilon') [\omega_y^2 - (1-is)\varepsilon']}{2(1-is)\omega_y^2 - [(1-is)^2 - \omega_z^2]\varepsilon'}; \\ A &= \frac{-(1-is-\varepsilon')\omega_y^2}{2(1-is)\omega_y^2 - [(1-is)^2 - \omega_z^2]\varepsilon'}; \\ B &= \frac{(1-is-\varepsilon')\omega_z\varepsilon'}{2(1-is)\omega_y^2 - [(1-is)^2 - \omega_z^2]\varepsilon'}; \\ \omega_x = \omega_y &= \frac{|e|H_{0z}}{mc\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega_H}{\omega} \sin \alpha; \\ \omega_z &= \frac{\omega_H}{\omega} \cos \alpha; \quad s = \frac{\nu_{эфф}}{\omega}; \quad k_0 = \frac{\omega}{c} \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

(α — угол между осью z и направлением внешнего магнитного поля $\vec{H}_0$; равенство $\omega_x = \omega_y$ связано с характером выбранной системы координат). Функции $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ зависят от координаты z , через параметр $\varepsilon' = 1 - is - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2}$, который для среды без поглощения ($\nu_{эфф} = 0$; $s = 0$) представляет собой диэлектрическую проницаемость ионизированного газа в отсутствие внешнего магнитного поля и в этом случае равен $\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = 1 - \nu$.

Системы двух связанных уравнений 2-го порядка, подобные системе (7.1), исследовались различными авторами и записывались в самых различных видах. Их сравнение проводится в работе⁵⁶.

Будем считать, что функция $\varepsilon(z) = 1 - \nu$ в окрестности точки, где $\varepsilon(z) = 0$, может быть представлена в виде

$$\varepsilon = az \quad (a = \text{const}).$$

Вводя новую переменную $\zeta = az - is$ и исключая из системы (7.1) функцию F_2 , получим следующее уравнение четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 F_1}{d\zeta^4} - \frac{2A'}{A} \frac{d^3 F_1}{d\zeta^3} + \left\{ -\left(\frac{A'}{A^2}\right)' A + 2\rho^2 C \right\} \frac{d^2 F_1}{d\zeta^2} + \\ + 2A\rho^2 \left(\frac{C+B}{A}\right)' \frac{dF_1}{d\zeta} + \left\{ \rho^2 \left(\frac{C+B}{A}\right)'' A + \rho^4 (C^2 - B^2 - A^2) \right\} F_1 = 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

($\rho = \frac{k_0}{a}$, штрихи означают дифференцирование по переменной ζ).

Решение полученного уравнения в приближении геометрической оптики можно записать в следующем виде⁵⁸:

$$\begin{aligned} F_1 = \left\{ \left(\frac{c_2}{n_2^{1/2}} e^{i\rho \int n_2 d\zeta} + \frac{d_2}{n_2^{1/2}} e^{-i\rho \int n_2 d\zeta} \right) e^{\frac{1}{2} \int \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{c_1}{n_1^{1/2}} e^{i\rho \int n_1 d\zeta} + \frac{d_1}{n_1^{1/2}} e^{-i\rho \int n_1 d\zeta} \right) e^{-\frac{1}{2} \int \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}} \right\} e^{-\frac{1}{2} \int \frac{\eta d\eta}{1+\eta^2}}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Здесь $c_{1,2}$ и $d_{1,2}$ — произвольные комплексные постоянные, а выражения

$$n_{1,2}^2 = \frac{(1-is)(\omega_y^2 - \varepsilon'^2) + (\omega_z^2 + \omega_y^2)\varepsilon' \pm (1-is-\varepsilon')\omega_z \sqrt{\varepsilon'^2 + \frac{\omega_y^4}{\omega_z^2}}}{2(1-is)\omega_y^2 - \varepsilon'[(1-is)^2 - \omega_z^2]} \quad (7.6)$$

представляют собой комплексные квадраты показателей преломления обыкновенной (2) и необыкновенной (1) волн (рассматривая эти величины как функции комплексного переменного ζ , удобно и в случае поглощающей среды сохранить обозначения $n_{1,2}^2$ вместо введенных в § 1 обозначений $(n - i\kappa)_{1,2}^2$). Далее,

$$\eta = -\frac{B}{A} = \frac{\omega_z}{\omega_y^2} \epsilon' = \frac{\epsilon'}{s_c}, \quad (7.7)$$

где $s_c = \frac{\nu_{\text{эфф}}, \text{ с}}{\omega}$; $\nu_{\text{эфф}} = \frac{\omega_y^2}{\omega_z}$ — так называемое критическое число соударений; см. (1.10).

Приближение (7.5) является асимптотическим представлением точного решения при $\rho \rightarrow \infty$ и достаточно хорошо его аппроксимирует (при $\rho \gg 1$) в некоторых областях комплексной плоскости ζ . Функции, входящие в это решение, описывают бегущие волны разных типов; известно, что в указанном приближении они независимы. Следовательно, описание явления взаимодействия волн разных типов должно опираться на дополнительное использование некоторых свойств точного решения.

Это взаимодействие, как было указано, отражается в наличии связи между различными асимптотическими формами решения, пригодными в разных областях, примыкающих к области взаимодействия. В нашем случае областью взаимодействия является область, окружающая точки

$$\zeta_{\pm} = \pm i s_c \quad (\eta = \pm i).$$

В этих точках $n_1 = n_2$. Решение (7.5), как легко видеть, в этой области нарушается.

Будем считать поглощение равным нулю (учет влияния поглощения см. в § 8). Тогда функции $n_1^2(\zeta)$ и $n_2^2(\zeta)$ определяются формулами (7.6) при $s=0$. Качественное поведение этих функций в зависимости от параметра $\alpha - 1 = -\zeta$ изображено на рис. 15 для случая, когда $\alpha < 1$ и угол α мал. В пределе при $\alpha \rightarrow 0$ ($s_c \rightarrow 0$) эти функции вырождаются в две прямые линии (см. рис. 2). Особенно сильное взаимодействие наблюдается при малых углах α (когда точки $\zeta_{\pm} = \pm i s_c$ приближаются к действительной оси) в той области, где $n_1^2(\zeta)$ и $n_2^2(\zeta)$ принимают близкие друг к другу значения (см. рис. 15).

Точки «взаимодействия» ($\zeta_{\pm} = \pm i s_c$), так же как и нули функций $n_{1,2}^2(\zeta)$ (точки «отражения»), являются точками ветвления функции $n_1(\zeta)$ и $n_2(\zeta)$. Однако показатели преломления для разных типов волн можно представить в виде однозначной функции на четырехлистной поверхности Римана. Основываясь на приближении геометрической оптики, соответствующим выбором пути интегрирования на римановой поверхности можно найти коэффициенты отражения для той или иной волны. Исследования явления взаимодействия с этой точки зрения содержится в работах⁵⁹⁻⁶². Именно на этом пути в⁶⁰ удалось установить, что поглощение существенно влияет на взаимодействие обыкновенной и необыкновенной волн (см. также § 8 и ¹ § 79).

Интересующее нас сейчас явление взаимодействия, как уже упоминалось, сводится к тому, что падающая на неоднородный слой со стороны положительных значений $n_2^2(\zeta)$ обыкновенная волна в области взаимодействия частью отражается в виде обыкновенной и необыкновенной волн, а частью просачивается в область отрицательных значений $n_2^2(\zeta)$ в виде необыкновенной волны, где показатель преломления для этой последней волны принимает действительные значения. Интерес при этом представляют, прежде всего, коэффициенты отражения и прохождения волн через область взаимодействия. Их значения легко получить, располагая асимптотическими представлениями точного решения по обе стороны от области взаимодействия. Для этого

достаточно, очевидно, установить ту связь, которая существует между коэффициентами, входящими в решения типа (7.5) и относящимися к разным интервалам переменной ζ , примыкающим к области взаимодействия.

Такую связь можно найти, используя метод фазовых интегралов, широко применяющийся при исследовании асимптотической формы решений уравнений 2-го порядка⁶³⁻⁶⁵. Обобщение этого метода на случай уравнений четвертого порядка было проведено в работе⁶³, посвященной исследованию одной квантово-механической задачи. В этой работе было показано, что точки, где $n_1 = n_2$ ($\zeta_{\pm} = \pm is_c$) (в терминах нашей задачи), обладают свойствами, подобными тем, с которыми мы встречаемся, изучая асимптотическое поведение решений уравнений 2-го порядка

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k_0^2 \epsilon(z) E = 0.$$

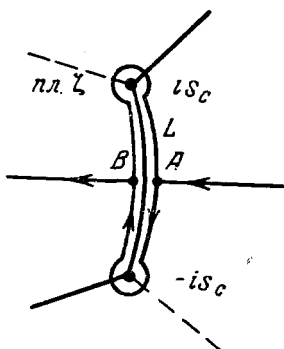


Рис. 17.

При обходе нуля функции $\epsilon(z)$ в комплексной плоскости z наблюдается так называемое явление Стокса: на определенных лучах, выходящих из точки, где $\epsilon = 0$, коэффициенты в асимптотическом разложении решения изменяются скачками (см., например,^{64, 65}).

Точно так же и для решений уравнения (7.4) при обходе области взаимодействия на определенных лучах, выходящих из точек $\zeta_{\pm} = \pm is_c$, коэффициенты в решении (7.5) изменяются скачками. Для решений уравнения (7.4) эти точки и выходящие из них линии Стокса располагаются так, как это показано на рис. 17. Уравнения этих линий можно записать в виде

$$\arg \left(\pm i \int_{\pm is_c}^{\zeta} \frac{(n_1 - n_2)}{2} d\zeta \right) = \pi + m \cdot 2\pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Изучая изменение асимптотического представления решений при обходе вокруг точек $\zeta_{\pm} = \pm is_c$, можно установить закон изменения постоянных, входящих в решение (7.5), и, таким образом, связать приближенные решения, относящиеся к различным областям, разделенным областью взаимодействия. Такой расчет был проведен в работе⁵⁸, и его результаты, приведенные также в⁵⁷, сводятся к следующему. Падающая на слой обыкновенная волна в области взаимодействия вызывает появление отраженной волны того же типа с коэффициентом отражения

$$|R_2| = 1 - e^{-2\delta_0}, \quad (7.8)$$

а ее просачивание в область, где $n_1^2 > 0$, определяется коэффициентом

$$|D_1| = e^{-\delta_0}. \quad (7.9)$$

В формулах (7.8) — (7.9) вещественная величина δ_0 определяется интегралом

$$\delta_0 = -i\rho \oint_L \frac{n_1 - n_2}{4} d\zeta = 2i\rho \int_A^B \frac{n_1 - n_2}{4} d\zeta. \quad (7.10)$$

Контур L охватывает две особые точки подынтегральной функции, в которых $n_1 = n_2$ (см. рис. 17). Во втором интеграле интегрирование ведется по петле, охватывающей точку $-is_c$. Предполагается, что обыкновенная волна

падает со стороны положительных ζ (т. е. со стороны малых значений $v = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$).

В полученном решении присутствует, кроме того, возникающая в результате взаимодействия необыкновенная волна, которая распространяется «вниз» в сторону полюса функции $n_1^2(\zeta)$. Коэффициент, характеризующий «отражение» этой волны от области взаимодействия, оказывается равным

$$|R_1| = e^{-\delta_0} \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}}. \quad (7.11)$$

Как легко убедиться, в согласии с требованием закона сохранения энергии,

$$|R_1|^2 + |R_2|^2 + |D_1|^2 = 1. \quad (7.12)$$

Интересно отметить, что, несмотря на асимптотический характер полученных решений, формулы (7.8) — (7.11) применимы при любых значениях угла α (см⁵⁸). Действительно, при $\delta_0 \gg 1$ (α не очень мало) взаимодействие мало. Для этого случая в ⁵³ и ¹ § 79 вариационными методами был получен коэффициент просачивания $|D_1|$. Этот результат совпадает с формулой (7.9), если в (7.10) стянуть путь интегрирования к линии, соединяющей точки $\pm i\delta_0$. Исследование формул (7.8), (7.9) показывает, что они не теряют своего значения и при переходе к малым углам α , т. е. в условиях квазипродольного распространения, когда $|R_2| \ll 1$, а коэффициент $|D_1| \simeq 1$. Так, при сильном просачивании ($\delta_0 \ll 1$) формулы (7.8) — (7.9) дают

$$|R_2| \simeq 2\delta_0; \quad |D_1| \simeq 1 - \delta_0, \quad (7.13)$$

и вычисление интеграла (7.10) в указанных условиях показывает⁵⁸, что эти значения коэффициентов полностью совпадают с соответствующими формулами, полученными в ¹ § 79 иным методом, в котором предположение о малости $|R_2|$ используется с самого начала.

Выражения (7.13), справедливые при очень малых углах α , были получены в ¹ без учета возможности отражения необыкновенной волны. При этом оказалось, что значения коэффициентов (7.13) не удовлетворяют закону сохранения энергии, а связаны соотношением

$$|R_2| = 2(1 - |D_1|).$$

Этот факт был связан в ¹ § 79 с существованием дополнительных потерь в резонансной области (т. е. в окрестности точки $v_\infty = \frac{u-1}{u_L-1} = \frac{\omega_z^2 + 2\omega_y^2 - 1}{\omega_z^2 - 1}$,

$$\text{где } \epsilon_\infty = 1 - v_\infty = \frac{2\omega_y^2}{1 - \omega_z^2}).$$

При более детальном описании, как мы видели, удается выделить необыкновенную волну, которая распространяется в сторону полюса функции $n_1^2(\zeta)$. Учет этой волны (ее амплитуду можно определить из (7.11)) как раз и приводит к выполнению закона сохранения энергии (см. (7.12)).

Решение, описывающее эту волну, при обходе полюса $\epsilon = \epsilon_\infty$ затухает. Волна не отражается, и энергия должна, таким образом, накапливаться в резонансной области. Мы имеем здесь, очевидно, дело со случаем, аналогичным рассмотренному в ⁵⁵ и в конце § 6. При учете поглощения энергия поля переходит в тепло в согласии с интерпретацией, указанной в ¹ § 79 (см. выше).

Из формулы (7.11) ясно, что при $\delta_0 \gg 1$ поглощение, связанное с появлением бегущей «вниз» необыкновенной волны, весьма мало. При

строго продольном распространении $R_1 = 0$ (в этом случае $\delta_0 = 0$). Следовательно, для некоторого малого угла α поглощение будет достигать максимума. Из формулы (7.11) можно видеть, что коэффициент $|R_1|^2$ имеет максимальное значение, равное $1/2$ при $e^{-2\delta_0} = 1/2$, и, таким образом, при $2\delta_0 = \ln 2$ в среде остается $1/4$ всей энергии падающей обыкновенной волны. Эта остающаяся в среде энергия (выйти из среды бегущая «вниз» волна I не может), как уже указывалось, переходит в тепло. Механизм такого перехода двоякий. К поглощению волны приводит раньше всего наличие соударений электронов с другими частицами. Но, кроме того, нужно иметь в виду, что при учете теплового движения электронов полюс функции $n_1^2(v)$ исчезает, и ее ветвь непосредственно переходит в плазменную волну (см. § 2). И только при $\alpha = 0$ (продольное распространение) кривые $n_1^2(v)$, $n_2^2(v)$ и $n_3^2(v)$ разделяются. Характер соответствующего предельного перехода ясен из рис. 4. Что же касается плазменной волны 3 , в которую переходит волна 1 , то она поглощается (т. е. ее энергия переходит в тепло) не только в результате действия соударений, но и путем своеобразного механизма, о котором говорилось в § 2.

Отметим, что в ионосферных условиях, как можно показать, в области взаимодействия учет теплового движения лишь очень незначительно изменяет вид функций $n_1^2(v)$ и $n_2^2(v)$. Поэтому решение задачи о взаимодействии, приведенное выше без учета теплового движения, сохраняет свое значение.

В заключение подчеркнем, что в силу обсуждавшегося взаимодействия возможен, разумеется, и обратный переход плазменных волн в обыкновенную волну (или при $u > 1$, $u_L > 1$ в необыкновенную волну). Подобный эффект представляет большой интерес с точки зрения теории спорадического солнечного радионизлучения и, вообще, теории генерации радиоволн в магнитоактивной плазме (см. 27).

§ 8. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН ПРИ УЧЕТЕ ПОГЛОЩЕНИЯ

При исследовании взаимодействия волн в неоднородной магнитоактивной среде мы выше, при конкретных расчетах, не учитывали поглощения. На первый взгляд может показаться, что введение малого поглощения не должно существенным образом изменить картину взаимодействия волн. Однако в некоторых случаях это не так, и учет поглощения приводит к существенным изменениям эффекта взаимодействия (см. 60, 1 § 79). Дело в том, что в среде с поглощением условия перехода к квазипродольному распространению зависят от числа соударений $\nu_{эфф}$. Этот переход наступает при $\nu_{эфф} \gg \nu_{эфф, c}$, где $\nu_{эфф, c}$ — критическое число соударений, введенное в § 1. При этом из (1.10) видно, что значение $\nu_{эфф, c}$ достаточно мало как раз при малых углах α . Отсюда ясно, что при наличии соответствующего поглощения появление сильного взаимодействия, и, следовательно, эффекта «умножения» сигналов можно ожидать и на широтах, не очень близких к магнитному полюсу. Метод, изложенный в § 7, позволяет без труда решить задачу о взаимодействии волн и при наличии поглощения.

Будем считать, что поглощение мало, т. е. $\frac{\nu_{эфф}}{\omega} \ll 1$ и не зависит от координат. Тогда изменения, связанные с выведением числа соударений, можно свести лишь к изменению параметра $\epsilon' = \epsilon - i\delta$ (при отсутствии поглощения $\epsilon' = \epsilon$). Другие же изменения в формулах (7.6) для квадратов показателей преломления сводятся к появлению величины $1 - i\delta$, которую по-прежнему можно считать равной единице.

Таким образом, с формальной стороны, с введением переменной $\zeta = \epsilon - is = \alpha z - is$ мы приходим к тем же самым уравнениям, которые были исследованы в случае $s = 0$. Их единственное отличие заключается в том, что при учете поглощения вещественные значения координаты z располагаются на прямой, параллельной действительной оси ζ на расстоянии, равном is (рис. 18).

Наиболее интересным моментом в обсуждаемой задаче является отыскание коэффициента прохождения $|D_1|$. Это значение легко получить, задав поле в области $n_2^2(\zeta) > 0$ ($\zeta > 0$) в виде падающей и отраженной обыкновенных волн и отраженной необыкновенной волны и отыскивая решение слева от точек $\pm is_c$ (рис. 18). Применяя правила обхода по петле, охватывающей точку $-is_c$, можно получить следующее значение для коэффициента прохождения:

$$|D_1| = e^{-\delta}, \quad (8.1)$$

где

$$\delta = i\rho \int_{A'}^{B'} \frac{n_1 - n_2}{2} d\zeta, \quad (8.2)$$

и интеграл берется по петле, охватывающей точку $-is_c$ снизу. Формула (8.2) при $s = 0$ переходит в формулу (7.10), полученную без учета поглощения.

Весьма существенным следствием полученных результатов является тот факт, что величина δ при некотором значении поглощения может обратиться в нуль. Тогда, очевидно, $|D_1| = 1$ и в этом случае обыкновенная волна, падающая на слой, целиком проходит через область взаимодействия. Легко усмотреть, что это происходит при $s \geq s_c$. При $s < s_c$ коэффициент прохождения дается формулой (8.1), в которой $\delta \rightarrow 0$ по мере приближения s к s_c (при этом в формуле (8.2) длина петли интегрирования сокращается). Значение $|D_1| = 1$, которое достигается при $s = s_c$, остается неизменным и при $s > s_c$, так как в последнем случае путь интегрирования проходит ниже точки $\zeta = -is_c$ и интеграл (8.2) остается равным нулю. Все это хорошо согласуется с известными фактами, говорящими о том, что переход к квазипродольному распространению определяется критическим числом соударений. В результате для значений $s > s_c$ выполняются условия квазипродольного распространения, когда обыкновенная волна свободно проходит через область взаимодействия, отражаясь не от точки $v_2 = 1$, где ее показатель преломления равен нулю, а от вышележащего уровня ($v_1^+ = 1 + \sqrt{u}$), где обращается в нуль функция $n_1^2(v)$. Подробное исследование формул (8.1) и (8.2) содержится в работах ⁶⁰ и ¹ § 79.

В заключение заметим, что эффект взаимодействия волн в неоднородной магнитоактивной среде рассматривался выше только при нормальном падении. Между тем физически очевидно, что и при наклонном падении взаимодействие волн должно в той или иной мере сохраниться (достаточно сказать, что взаимодействие не может, конечно, отсутствовать при очень малых, хотя и отличных от нуля углах падения волн на слой). К сожалению, соответствующее исследование взаимодействия волн при наклонном падении еще не проведено *).

*) Некоторое отношение к вопросу о взаимодействии волн при наклонном падении, по-видимому, имеют работы ⁶⁶⁻⁶⁸. В этих работах, однако, исследование волновых уравнений не производилось, и задача не была даже четко поставлена.

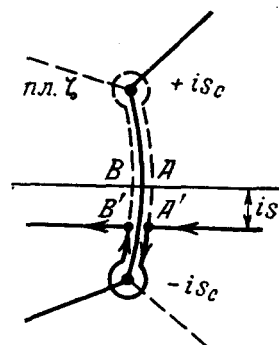


Рис. 18.

§ 9. ПРЕДЕЛЬНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВОЛН, ВЫХОДЯЩИХ ИЗ ИОНОСФЕРЫ

В неоднородной среде и, в частности, среде магнитоактивной, геометрическая оптика неприменима также при малой анизотропии. В случае ионосферы последнее имеет место в начале слоя, где электронная концентрация N , а следовательно, и параметр $v = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$ могут быть достаточно малы.

При $v \rightarrow 0$ среда приближается к вакууму, где, как и во всякой изотропной среде, имеет место «поляризационное вырождение», состоящее в том, что в качестве нормальных волн можно выбрать волны с любой поляризацией. С другой стороны, даже при $v \rightarrow 0$ поляризация нормальных волн в однородной анизотропной среде не произвольна, а является вполне определенной (см. (1.14)). Отсюда следует, что в слабо анизотропной, но неоднородной среде, электромагнитные волны не будут, вообще говоря, близки к нормальным волнам в однородной среде. Действительно, поляризация распространяющейся в среде волны при $v \rightarrow 0$ будет, очевидно, изменяться весьма мало, в то время как поляризация нормальных (обыкновенной и необыкновенной) волн может и в этом случае измениться вполне заметным образом *).

Положение, имеющее место в начале слоя (при $v \rightarrow 0$), можно охарактеризовать, сказав, что в этой области имеет место взаимодействие нормальных волн в уже употреблявшемся нами ранее смысле. Это взаимодействие приводит к тому, что обыкновенная или необыкновенная волна, приходящая «сверху» из области больших значений v , в начале слоя порождает волну другого типа, в результате чего поляризация волнового поля в целом изменяется не так, как для нормальной волны. Взаимодействие при этом происходит в основном в области, где

$$|n_2 - n_1| \sim \frac{1}{k_0} \left| \frac{dn_{1,2}}{dz} \right|. \quad (9.1)$$

Это условие носит приближенный характер и может быть уточнено на основе волновой теории (см. условие (9.8)). С ростом v геометрическая оптика становится уже применимой (соответствующий критерий см. ¹ § 77).

Эффект взаимодействия волн в начале слоя исследовался в работах ⁶⁹⁻⁷³. Ниже мы приведем результаты наиболее полного из этих исследований ⁷¹, где в качестве исходной используется следующая система уравнений, эквивалентная системе (7.1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Pi_1}{dz^2} + (k_0^2 n_1^2 - \psi^2) \Pi_1 &= \Pi_2 \frac{d\psi}{dz} + 2\psi \frac{d\Pi_2}{dz}; \\ \frac{d^2 \Pi_2}{dz^2} + (k_0^2 n_2^2 - \psi^2) \Pi_2 &= -\Pi_1 \frac{d\psi}{dz} - 2\psi \frac{d\Pi_1}{dz}. \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Здесь $\Pi_2 = E_{x,2} \cdot \sqrt{1 - K_2^2}$, $\Pi_1 = E_{x,1} \cdot \sqrt{1 - K_1^2}$; n_1 , n_2 и $K_{1,2} = \frac{E_{y,1,2}}{E_{x,1,2}}$ — показатели преломления и коэффициенты поляризации обыкновенной и необыкновенной волны (система координат выбрана так, что магнитное поле $\mathbf{H}_0$ лежит в плоскости yz — см. § 1).

*) Достаточно сказать, что при $v = 0$ поляризация нормальных волн зависит от параметров $u = \omega_n^2 / \omega^2$ и α , в то время как в вакууме ($v = 0$) никакое изменение этих параметров не может, конечно, оказать влияния на электромагнитные поля.

В уравнение (9.2) входит так называемый параметр связи

$$\phi = \frac{i}{2} \frac{d}{dz} \ln \frac{K_2 - 1}{K_2 + 1} = \frac{i}{4} \frac{d}{dz} \ln \left(\frac{\epsilon - is + is_c}{\epsilon - is - is_c} \right) \quad (9.3)$$

$$\left(\epsilon = 1 - v = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \right).$$

Параметр ϕ мал в областях, где взаимодействие между обыкновенной и необыкновенной волнами мало. Если $\phi = 0$ (однородная среда), то система (9.2) распадается на два независимых уравнения: обыкновенная и необыкновенная волны не взаимодействуют.

Получить точное решение системы (9.2) не удастся. Если, однако, использовать предположение о медленном изменении параметров ионосферы с высотой, то можно описать указанное взаимодействие следующим образом.

Для среды с медленно меняющимися свойствами решение можно записать в приближении геометрической оптики. Выберем решения, описывающие обыкновенную и необыкновенную волны, бегущие сверху вниз:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1 &= A_1 \Pi_{11} = A_1 n_1^{-1/2} \exp \left\{ ik_0 \int n_1 dz \right\}, \\ \Pi_2 &= A_2 \Pi_{21} = A_2 n_2^{-1/2} \exp \left\{ ik_0 \int n_2 dz \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Если между обыкновенной и необыкновенной волнами нет никакой связи, то коэффициенты A_1 и A_2 остаются постоянными. При учете связи A_1 и A_2 представляют собой медленно меняющиеся функции.

Используя метод вариации постоянных и сделав некоторые упрощающие предположения, для A_1 и A_2 можно получить следующие уравнения⁷¹:

$$\left. \begin{aligned} k_0 \frac{dA_1}{dz} &= -i\psi A_2 \Pi_{11}^* \frac{d\Pi_{21}}{dz}, \\ k_0 \frac{dA_2}{dz} &= i\psi A_1 \Pi_{21}^* \frac{d\Pi_{11}}{dz}. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Π^* получается из Π заменой i на $-i$ в показателе экспоненты (см. 9.4). Замена переменных

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= A_1 \exp \left\{ \frac{ik_0}{2} \int_{z_0}^z (n_2 - n_1) dz \right\}, \\ U_2 &= A_2 \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2} \int_{z_0}^z (n_2 - n_1) dz \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

(z_0 — точка, где $n_1 = n_2$) позволяет привести (9.5) к одному уравнению 2-го порядка

$$-\frac{d^2 U}{dz^2} + \left\{ \psi^2 + \frac{k_0^2}{4} (n_2 - n_1)^2 - \frac{1}{2} ik_0 \frac{d}{dz} (n_2 - n_1) \right\} U = 0, \quad (9.7)$$

где U означает U_1 и U_2 .

Исследование решений этого уравнения показывает следующее. Если

$$|\psi|^2 \gg \left| \frac{k_0^2}{4} (n_2 - n_1)^2 - \frac{ik_0}{2} \frac{d}{dz} (n_2 - n_1) \right|,$$

то волна с произвольной поляризацией будет распространяться в среде без изменения поляризации.

Если же выполняется обратное неравенство

$$|\psi|^2 \ll \left| \frac{k_0^2}{4} (n_2 - n_1)^2 - \frac{ik_0}{2} \frac{d}{dz} (n_2 - n_1) \right|,$$

то нормальные волны в приближении геометрической оптики (9.4) распространяются независимо одна от другой: поляризация нормальных волн легко определяется при этом на основе обычных формул (см. § 1).

Отсюда следует, что область взаимодействия, которая определяет предельную поляризацию волн по выходе из слоя, характеризуется тем, что в ней

$$|\psi|^2 \approx \left| \frac{k_0^2}{4} (n_2 - n_1)^2 - \frac{ik_0}{2} \frac{d}{dz} (n_2 - n_1) \right|. \quad (9.8)$$

Для больших частот (в случае ионосферы при $f > 1 \text{ Мгц}$) это условие можно приближенно записать в виде

$$|\psi|^2 \approx \frac{k_0^2}{4} |n_2 - n_1|^2,$$

тогда как для длинных волн ($f < 500 \text{ кгц}$), в виде

$$|\psi|^2 \approx \frac{k_0}{2} \left| \frac{d}{dz} (n_2 - n_1) \right|.$$

Исследование решений уравнения (9.7) для определенной модели ионосферы $\left(\frac{k_0}{2} (n_2 - n_1) = Me^{az}; M = \text{const}; a = \text{const} \right)$ показывает, что предельная поляризация коротких волн, выходящих из ионосферы, определяется формулами

$$K_{1,2} = \frac{K_{p1,2} (F - G) - (F + G)}{(F - G) - K_{p1,2} (F + G)}, \quad (9.9)$$

где

$$\frac{F}{G} = -2^{-2r} r^{2r} e^{i\pi r} \frac{\Gamma(1-r)}{\Gamma(1+r)}; \quad r = i \frac{\psi}{a},$$

Γ — гамма-функция и $K_{p1,2}$ — коэффициенты поляризации, вычисленные по обычным формулам, в которые нужно подставить значение концентрации электронов на уровне, где

$$\psi^2 = \frac{k_0^2}{4} (n_2 - n_1)^2.$$

Как показывает исследование полученных формул для высоких частот ($f > 1 \text{ Мгц}$), величина $F/G \approx -1$ и, таким образом, получаем

$$K_{1,2} \approx K_{p1,2}.$$

Поскольку в области взаимодействия $\epsilon = 1 - \nu \approx 1$ и $s = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \ll 1$, предельная поляризация определяется только магнитным полем Земли, и, следовательно, ее экспериментальное определение не может служить источником новых сведений об ионосфере.

В заключение мы хотели бы еще раз подчеркнуть, что в рамках настоящей статьи представилось возможным остановиться только на части вопросов, относящихся к теории распространения волн в плазме. Вместе с тем рассмотренные выше задачи связаны между собой и в совокупности образуют выделенную и при этом весьма важную и интересную область исследования свойств плазмы. Поэтому мы надеемся, что появление настоящей статьи окажется оправданным.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург и Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, 1953.
2. В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в ионосфере, Гостехиздат, 1949.
3. E. Carlevato, *Ricerca Scientifica* **25**, 521 (1955).
4. И. М. Виленский, Сборник памяти А. А. Андропова, стр. 582. Изд-во АН СССР (1955).
5. С. А. Жевакин и В. М. Файн, ЖЭТФ **30**, 518 (1956).
6. А. В. Гуревич, ЖЭТФ **30**, 1112 (1956); Радиотехника и электроника **1**, 704 (1956).
7. W. O. Schumann, *Zeits. angew. Physik* **7**, 284 (1955).
8. J. Heading, *Proc. Roy. Soc.* **231**, 414 (1955).
9. J. Shmoys, *Proc. I. R. E.* **44**, 163 (1956).
10. L. R. O. Storey, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **246**, 113 (1953).
11. E. N. Bramley, *Proc. Roy. Soc.* **225**, 515 (1954).
12. J. A. Ratcliffe, *Reports on Progress in Physics* **19**, 188 (1956).
13. Physics of the Ionosphere. Reports of the physical Society Conference, London (1955).
14. B. H. Briggs a. M. Spenser, *Reports on Progress in Physics* **17**, 245 (1954).
15. *Proc. I. R. E.* **43**, № 10 (1955).
16. Динамика плазмы, Сборник «Проблемы современной физики», № 2, ИЛ (1956).
- 16a. L. Spitzer, *Physics of fully ionized gases*. New York, 1956.
17. Магнитная гидродинамика, Сборник «Проблемы современной физики», № 2, ИЛ (1954).
18. Б. Н. Гершман и В. Л. Гинзбург, ДАН **100**, 647 (1955); *Астроном. журнал* **32**, 201 (1955). Труды ГИФТИ и Р. Ф. ГГУ (ученые записки ГГУ, сер. физ.) **30**, 3 (1956).
19. Б. Н. Гершман, *Радиотехника и электроника* **1**, 720 (1956).
20. Физика ионосферы и распространение радиоволн, Сборник «Проблемы современной физики», № 4, ИЛ (1954) и № 7 (1955).
21. Труды 5-го совещания по вопросам космогонии, Изд-во АН СССР (1956).
22. A. v. Engel, *Ionized Gases*. Oxford (1955).
- 22a. G. Dresselhaus, A. F. Kip a. C. Kittel, *Phys. Rev.* **100**, 618 (1955).
- 22b. И. В. Курчатов, УФН **59**, 603 (1956); R. F. Post, *Rev. Mod. Phys.* **28**, 338 (1956). (УФН, LXI, вып. 3, стр. 493)
23. А. А. Власов, ЖЭТФ **8**, 291, (1938); Уч. зап. МГУ, вып. 75, (1945).
24. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **16**, 574 (1946).
25. D. Bohm a. E. P. Gross, *Phys. Rev.* **75**, 1851; **75**, 1864 (1949) (перевод см. сборник «Проблемы современной физики» № 11, ИЛ (1952) «Электромагнитные волны в плазме»).
26. J. Lengmuir a. L. Tonks, *Phys. Rev.* **33**, 195 (1929).
27. Б. Н. Гершман и В. В. Железняков, Труды 5-го совещания по вопросам космогонии, Изд-во АН СССР, стр. 273 (1956).
28. Б. Н. Гершман, Диссертация, Горький (1953).
29. R. M. Larentz, *Naturwiss.* **40**, 527 (1953).
30. J. H. Piddington, *Phil. Mag.* **46**, 1037 (1955); *Mon. Not. Roy. Soc.* **115**, 671 (1955).
31. А. И. Ахнезер и Л. Э. Паргаманик, Уч. зап. ХГУ **27**, 75 (1948).
32. Г. В. Гордеев, ЖЭТФ **23**, 660 (1952).
33. Г. В. Гордеев, ЖЭТФ **27**, 24 (1954).
34. E. Gross, *Phys. Rev.* **82**, 232 (1951).
- 34a. В. П. Силин, ЖЭТФ **23**, 649 (1952). Труды Физического Института АН СССР **6**, 199 (1955).
35. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ **24**, 659 (1953).
- 35a. А. Г. Ситенко и К. Н. Степанов, ЖЭТФ **31**, 642 (1956).
36. Б. Н. Гершман, Сборник памяти А. А. Андропова, стр. 599, Изд-во АН СССР (1955); ЖЭТФ **31**, 707 (1956).

37. G. Winkler, *Ann. Phys.* **16**, 414 (1955).
38. R. Lust, *Zeits. Astrophys.* **37**, 67 (1955).
39. Х. Альфвен, *Космическая электродинамика*, ИЛ (1952); H. Alfvén, *Ark. Mat. Astron. Fysik* **29B**, № 2 (1942).
40. С. И. Сыроватский, *УФН* **62**, в. 3 (1957).
41. В. Л. Гинзбург, *ЖЭТФ* **21**, 789 (1951).
42. E. Astrom, *Ark. f. Fysik* **2**, 443 (1950).
43. Б. Н. Гершман, *ЖЭТФ* **24**, 453 (1953).
44. J. W. Dungey, *Journ. Geoph. Res.* **59**, 323 (1954).
45. В. В. Железняков, *Радиотехника и электроника* **1**, 840 (1956).
46. Л. А. Жекулин, *ЖЭТФ* **4**, 76 (1934).
47. K. Försterling, *Arch. Electr. Übertrag* **3**, 115 (1949).
48. K. Försterling, a. H. O. Wüster, *Journ. Atm. Terr. Phys.* **2**, 22 (1951).
49. Н. Г. Денисов, *ЖЭТФ* **31**, 609 (1956).
50. В. А. Фок, *ДАН* **1**, 241 (1934).
51. В. А. Фок, *Таблицы функций Эйри*, Москва (1946).
52. В. Л. Гинзбург и Г. П. Мотулевич, *УФН* **55**, 469 (1955).
- 52a. D. Pines, *Rev. Mod. Phys.* **28**, 184 (1956).
53. В. Л. Гинзбург, *Journ. of Phys. USSR* **7**, 289 (1943).
54. Н. Г. Денисов, *Радиотехника и электроника* **1**, 732 (1956).
55. K. G. Budden, *Physics of Ionosphere. Reports on the Physical Society Conference*, стр. 320 (1955).
56. J. M. Kelso, *Journ. Geoph. Res.* **58**, 551 (1953).
57. Н. Г. Денисов, *ЖЭТФ* **29**, 380 (1955).
58. Н. Г. Денисов, *Труды ГИФТИ и Р. Ф. ГГУ (ученые записки ГГУ, сер. физ.)* **35**, 3 (1957).
59. T. L. Eckersley, *Proc. Phys. Soc.* **63B**, 49 (1950).
60. O. Rydbeck, *Journ. Appl. Phys.* **21**, 1205 (1950).
61. R. Jancel et T. Kahan, *Compt. Rend.* **237**, 1657 (1953).
62. W. Pfister, *Journ. Geoph. Res.* **58**, 29 (1953).
63. E. C. Stückelberg, *Helv. Phys. Acta* **5**, 369 (1932).
64. W. H. Furry, *Phys. Rev.* **71**, 360 (1947).
65. Сборник «Распространение ультракоротких волн» гл. II, § 8, Изд-во Сов. радио, М. (1954).
66. H. Pöeverlein, *Zeits. angew. Physic.* **1**, 517 (1949); **2**, 152 (1950).
67. G. Millington, *Proc. Inst. Electr. Eng.* **101** (IV) 235 (1954).
68. G. R. Ellis, *Journ. Atm. Terr. Phys.* **8**, 43 (1956).
69. H. G. Booker, *Proc. Roy. Soc.* **155**, 235 (1936).
70. J. J. Gibbons und R. J. Nertney, *Journ. Geoph. Res.* **57**, 323 (1952).
71. K. G. Budden, *Proc. Roy. Soc.* **A215**, 215 (1952).
72. N. Davids and R. W. Parkinson, *Journ. Atm. Terr. Phys.* **7**, 173 (1955).
73. R. Roy a. J. K. D. Verma, *Journ. Geoph. Res.* **60**, 457 (1955).