

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕЗОАТОМЫ

Д. Д. Иваненко и Г. Е. Пустовалов

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Предположение, что отрицательные мезоны могут некоторое время вращаться вокруг ядра впредь до захвата ядром или спонтанного распада, образуя мезоатом¹, было несколько лет назад подтверждено на опыте. Прежде всего было показано, что космические мезоны при остановке в тяжелых элементах дают начало γ -квантам энергии порядка нескольких Мэв, что совпадает по порядку с энергией перехода $2P \rightarrow 1S$ мезона в тяжелых мезоатомах². Окончательно существование π -мезоатомов (π -атомы) было установлено Камаком и другими³ при изучении характеристических рентгеновских лучей, возникающих при остановке мезонов, полученных с помощью ускорителей в 1952 г. μ -мезоатомы (μ -атомы) были открыты подобным же способом Фитчем и Рейнвотером⁴, и их излучение было исследовано вдоль всей периодической системы вплоть до $Z = 83$ в 1953 г.

По сравнению с обычным электронным водородоподобным атомом мезоатом обладает рядом специфических особенностей: близость мезона к ядру, возможность захвата мезона ядром, ядерное взаимодействие мезона с нуклонами ядра, наличие на орбитах в атоме одновременно частиц разных сортов (электронов и мезона), разные спины мезонов и т. д. Изучение мезоатомов поэтому представляет большой интерес и может дать много новых сведений о строении ядер и взаимодействии частиц.

Наличие мезоатомной стадии при остановке отрицательных мезонов в веществе накладывает своеобразный и очень глубокий отпечаток на процессы ядерного захвата и распада отрицательных мезонов. Это обстоятельство является причиной, вызвавшей появление значительного числа работ, так или иначе связанных с изучением свойств мезоатомов. Явления, сопровождающие остановку мезонов в веществе, захват мезонов на орбиту кулоновским полем ядра, образование мезоатомов, радиационные переходы и переходы Оже, иначе называемые в случае мезоатомов конверсионными, захват мезона ядром, с орбиты подробно рассмотрены в ряде работ^{5-8*}).

μ -мезон с его относительно большим временем жизни $\tau = 2,22 \cdot 10^{-6}$ сек. и малой вероятностью поглощения нуклонами в легких мезоатомах чаще всего распадается, не успев захватиться ядром. Поэтому время жизни таких мезоатомов определяется практически временем жизни самого мезона. Однако для μ -мезоатомов с $Z > 10$ начинает преобладать ядерный захват, так что время жизни тяжелых μ -мезоатомов определяется вероятностью захвата ядром и имеет порядок 10^{-8} сек⁸. С другой стороны, π -мезон даже в самых легких мезоатомах имеет большие шансы захватиться ядром до распада, ввиду чего уровни π -мезоатомов оказываются имеющими значительную ширину. Время

*) Кроме литературы по этим вопросам, указанной в обзоре⁷, см. также еще работы⁹⁻²⁰.

жизни π -мезоводорода равно всего 10^{-10} сек, в то время как собственное время жизни π -мезона равно $2,6 \cdot 10^{-8}$ сек.

В первом приближении значения энергий, радиусы орбит, вероятности переходов для мезоатомов даются формулами для обычных электронных водородоподобных атомов. Боровский радиус орбиты при этом оказывается в μ/m_e раз меньше радиуса электронной орбиты (m_e — масса электрона, μ — масса мезона). Электроны, вращающиеся далеко от ядра, не оказывают заметного действия на движущийся близко к ядру мезон. Мезон же проводит в тяжелых мезоатомах (например, в μ -мезосвинце) примерно половину своего времени жизни, $\sim 4 \cdot 10^{-8}$ сек, внутри атомного ядра, проходя за это время в ядерном веществе, обладающем плотностью $\sim 10^5$ т/мм³, т. е. $\sim 10^{17}$ г/см³, расстояние около 5 м. Поэтому форма и размеры ядра оказывают сильное влияние на всю систему энергетических уровней мезона в мезоатоме. Следовательно, мезон в мезоатоме является гораздо более эффективным по сравнению с электроном в обычном атоме средством для исследования свойств ядра: его размеров, формы, распределения по объему ядра положительного заряда, квадрупольного электрического момента ядра, а также сил неэлектромагнитного происхождения, действующих

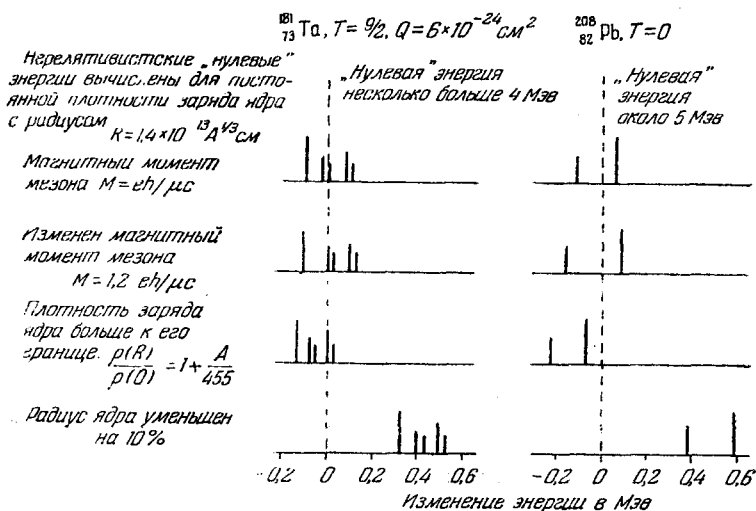


Рис. 1. Влияние различных свойств ядра и μ -мезона на величину энергии перехода $2P \rightarrow 1S$ в μ -мезоатомах тантала и свинца ²¹.
Q-квадрупольный электрический момент ядра; T-спин ядра.

между мезоном и нуклонами ²¹. С другой стороны, изучение мезоатомов может уточнить некоторые сведения о самом мезоне (например, о его магнитном моменте, массе). Рис. 1 показывает, насколько сильно сказывается влияние различных свойств ядра и мезона на величине энергии перехода $2P \rightarrow 1S$ в тяжелых μ -атомах.

§ 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕЗОАТОМОВ

Мы уже говорили о том, что мезоатомы могут быть получены искусственно с помощью ускорителей. Типичная установка для исследования спектров мезоатомов ²² изображена на рис. 2. Отрицательные π -мезоны, полученные торможением протонов в мишени внутри циклотрона, фокусируются магнитным полем самого циклотрона и специальных магнитов и направляются через систему счетчиков в поглотитель из вещества, содержащего элемент, мезоатомы которого желательны получить. В пучке содержатся также μ -мезоны, получаю-

шиеся при распаде π -мезонов, причем количество π -мезонов убывает, а μ -мезонов возрастает по мере увеличения расстояния от циклотрона. Следовательно, с помощью такой установки можно исследовать как π -, так и μ -мезоатомы.

Рентгеновские лучи, связанные с остановкой мезона в поглотителе, регистрируются сцинтилляционным счетчиком, связанным с фотоумножителем.

Импульсы от фотоумножителя детектируются многоканальным амплитудным анализатором, который калибруется с помощью каких-либо источников рентгеновских лучей известной энергии. В некоторых случаях калибровка производилась с помощью излучения мезоатомов, энергия переходов которых была известна²³.

Для измерения энергии переходов некоторых мезоатомов оказалось возможным применение критической абсорбционной техники. При этом используются фильтры, которые ставятся между поглотителем и счетчиком фотонов. Величина энергии перехода сравнивается с хорошо известной резкой границей поглощения K -серии рентгеновских лучей материала фильтра. Подбирая фильтры с различными Z , можно установить пределы, между которыми заключается энергия перехода. В частности, этот способ позволил уточнить значения масс μ - и π -мезонов^{24, 25}.

На этой же установке можно определить не только величину энергии переходов, но и квантовый выход, т. е. число мезонов, остановка которых в поглотителе сопровождалась излучением фотона определенной энергии^{22, 26-29}. С помощью

квантового выхода можно найти отношение вероятности захвата мезона ядром с данной орбиты к вероятности радиационного перехода. Это отношение, например, для вероятностей захвата W_{2P} , из состояния $2P$ и вероятности $W_{2P \rightarrow 1S}$ перехода $2P \rightarrow 1S$, должно быть пропорционально Z^2 , так как вероятность радиационного перехода $2P \rightarrow 1S$ пропорциональна Z^4 , а вероятность захвата ядром пропорциональна числу протонов в ядре Z и вероятности нахождения мезона в области, занимаемой ядром, т. е. величине $|\psi_{21}(0)|^2$, пропорциональной Z^5 . Отсюда вероятность захвата мезона ядром из P -состояния пропорциональна Z^6 . Экспериментальные данные²² находятся в согласии с предсказанной теоретически Маршаком и Мессией³⁰ зависимостью

$$\text{от } Z \text{ этого отношения: } \frac{W_{2P}}{W_{2P \rightarrow 1S}} = 0,2Z^2.$$

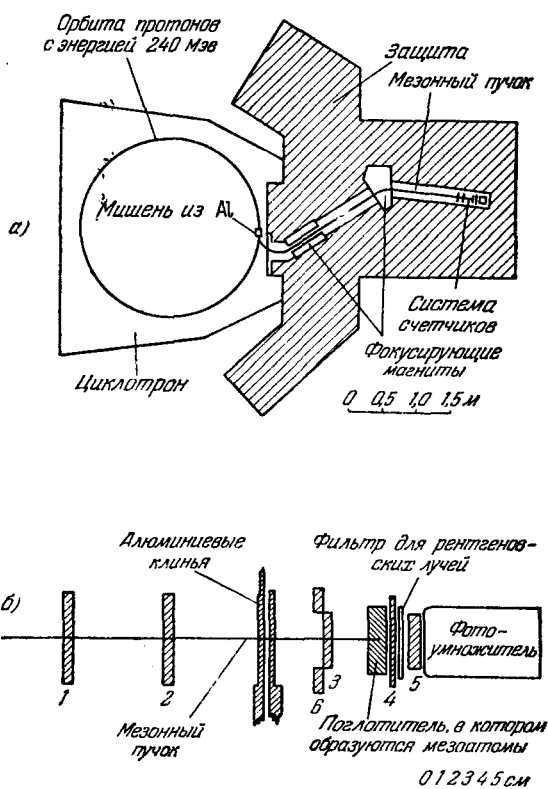


Рис. 2. Схема установки для исследования спектров мезоатомов²². а — общая схема, б — система счетчиков: 1, 2, 3, 4, 6 — сцинтилляционные счетчики, регистрирующие мезоны; 5 — счетчик (кристалл NaI), регистрирующий фотоны, возникающие при переходе мезонов в мезоатомах; счетчики 1, 2, 3, 5 включены на совпадение; 4, 6 — на антисовпадение. С помощью алюминиевых клиньев можно добиться, чтобы большая часть мезонов останавливалась в поглотителе.

Сравнение экспериментальных и теоретических величин энергий перехода $2P \rightarrow 1S$ в μ -мезоатомах со значениями Z от 13 до 83 привело к неожиданному результату для размеров ядер ^{4,31}. Оказалось необходимым в формуле для радиусов ядер $R = R_0 A^{1/3}$ взять для константы R_0 значение $1,2 \cdot 10^{-13}$ см вместо казалось бы хорошо подтвержденного многими данными значения $1,4 \cdot 10^{-13}$ см. Мы не будем сейчас останавливаться на дискуссии по поводу размеров ядер, отметив лишь, что распределения протонов и нейтронов могут не совпадать, что речь идет о радиусах эффективных сфер в случае несферических ядер и что для разных эффектов эффективные размеры ядер могут, по-видимому, несколько отличаться.

§ 3. УЧЕТ ОБЪЕМА ЯДРА

Благодаря размазанности заряда по конечному объему ядра уровни мезоатомов будут сдвинуты вверх (ослабление взаимодействия) по сравнению с ожидаемыми для точечных ядер. Этот эффект объема хорошо известен в теории изотопического смещения обычных, т. е. электронных атомов, где он является, причем, гораздо менее значительным, чем в рассматриваемом случае мезоатомов.

В наибольшей степени влияние объема ядра сказывается на S -уровнях, в меньшей — на P -уровнях, еще в меньшей — на D -уровнях и т. д. Из-за этого в мезоатомах даже меняется обычный порядок уровней. Например, в μ -мезосурьме уровень $2S$ лежит выше уровней $2P_{1/2}$ и $2P_{3/2}$, а уровень $3S$ — выше уровней $3P_{1/2}$, $3P_{3/2}$, $3D_{3/2}$ и $3D_{5/2}$. В μ -мезосвинце, кроме того, уровни $3P_{1/2}$ и $3P_{3/2}$ лежат соответственно выше уровней $3D_{3/2}$ и $3D_{5/2}$ (рис. 3).

Принципиально говоря, в атоме может находиться несколько мезонов, так что можно говорить о построении аналога периодической системы μ -мезоэлементов. Очевидно, это не будет иметь место для π -мезонов ввиду бозонного характера π -мезонов, которые могут находиться в любом числе на одном уровне. Так как ввиду конечного объема ядра порядок уровней изменен, то свойства системы μ -мезоэлементов не будут совпадать со свойствами обычной электронной менделеевской системы.

Для нахождения собственных значений энергии и собственных функций мезона в мезоатоме мы должны, следовательно, задавшись тем или иным, наиболее разумным (по данным ядерной физики) распределением положительного заряда в ядре, решить задачу о движении мезона в электрическом поле ядра. Для μ -мезонов обычно решается уравнение Дирака, для π -мезонов — релятивистское скалярное (или совпадающее в данном случае с ним псевдоскалярное) уравнение Клейна — Гордона.

Наиболее простым будет распределение протонов с плотностью, постоянной внутри ядра и равной нулю вне ядра. Тогда внутри ядра будет иметь место томсоновский осцилляторный потенциал, а снаружи кулоновский:

$$\left. \begin{aligned} V(r) &= \frac{eZ}{R} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (r < R), \\ V(r) &= \frac{eZ}{r} \quad (r > R). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Нахождение собственных функций и собственных значений энергии мезона с комбинированным потенциалом даже такого простого вида представляет довольно трудную задачу, не имеющую точного решения.

Для вычисления изменения энергии мезона в легких мезоатомах (до $Z \sim 10$) вследствие влияния объема ядра в нерелятивистском приближении можно воспользоваться теорией возмущений. В качестве возмущения можно взять разность между кулоновским и томсоновским потенциалом внутри

ядра. Вне ядра возмущение равно нулю. Тогда

$$\Delta E_{nl} = \int \psi_{nl}^* \Delta V \psi_{nl} d\tau = \int_0^R |R_{nl}(r)|^2 \left\{ \frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{R} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \right\} r^2 dr. \quad (2)$$

Здесь R — радиус ядра; $R_{nl}(r)$ — радиальные волновые функции кеплеровой

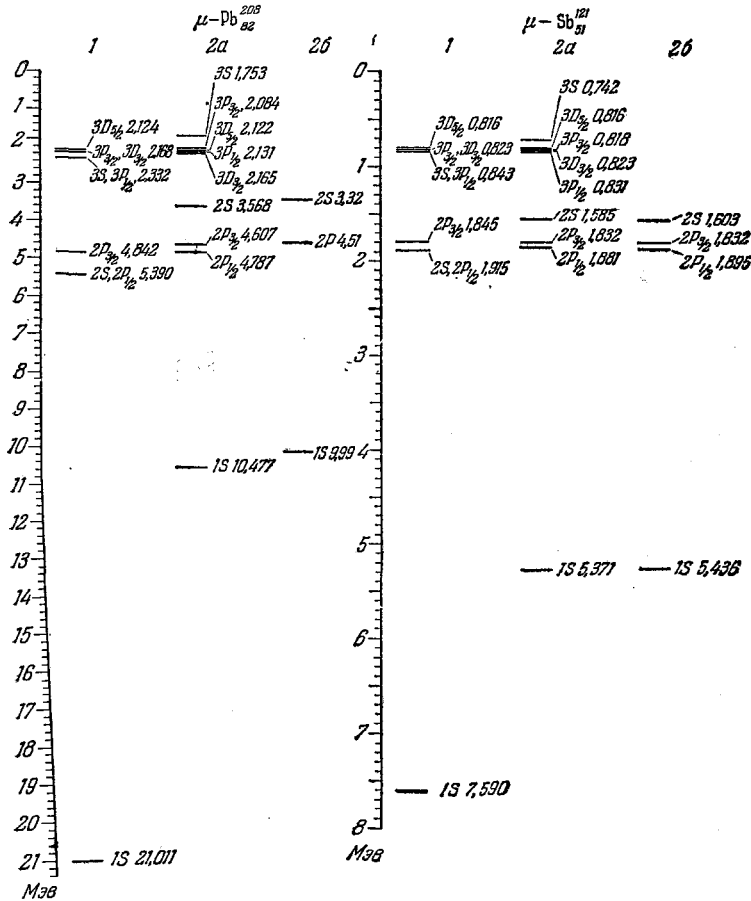


Рис. 3. Энергетические уровни μ -мезосвинца и μ -мезосурьмы, найденные: 1 — без учета объема ядра с помощью уравнения Дирака; 2 — при постоянной плотности распределения заряда ядра; а — с помощью уравнения Дирака методом сшивания волновых функций на границе ядра; б — с помощью нерелятивистского уравнения Шредингера вариационным методом (для сурьмы учтены релятивистские поправки порядка $\alpha^2 Z^2$). Около уровней написано значение их энергии в Мэв. Масса мезона $207 m_e$, радиус ядра $1,2 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \text{ см}$.

проблемы для мезоатома. Воспользовавшись значениями радиальных волновых функций при $r=0$, легко получить:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta E_{n0}}{E_{n0}} &= -\frac{4}{5n} \left(\frac{ZR}{b} \right)^2; \quad \frac{\Delta E_{n1}}{E_{n1}} = -\frac{2(n^2-1)}{105n^3} \left(\frac{ZR}{b} \right)^4, \\ \frac{\Delta E_{n2}}{E_{n2}} &= -\frac{2(n^2-4)(n^2-1)}{225n^5} \left(\frac{ZR}{b} \right)^6. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь $b = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$ — боровский радиус мезонной орбиты, $\bar{\mu}$ — приведенная масса мезона.

Влияние размеров и формы ядра особенно сильно сказывается на положении энергетических уровней мезоатомов с большими Z . В этом случае конечность размеров ядра нельзя рассматривать как малое возмущение и считать нулевым приближением решение кеплеровой проблемы. В самом деле, радиус боровской орбиты мезона в мезоатоме уже для $Z \sim 30$ становится сравнимым с радиусом ядра. Для свинца же радиус боровской орбиты в 2,3 раза меньше радиуса ядра. При этом влияние объема ядра становится столь значительным, что энергия уровня $1S$ оказывается в 2 — 2,5 раза меньше, чем по формулам для точечных ядер.

Для тяжелых мезоатомов в качестве невозмущенной задачи можно взять решение для бесконечно протяженного осцилляторного потенциала, а возмущением считать разность между кулоновским и осцилляторным потенциалом вне ядра³².

Эту же задачу можно решить вариационным методом^{8, 33}, который при подходящем выборе вариационных волновых функций дает неплохие результаты и для мезоатомов с большими Z . Преимущество вариационного метода заключается в том, что получаемые при этом волновые функции имеют сравнительно простое аналитическое выражение и могут быть использованы при решении целого ряда других задач (см., например, следующий параграф).

Более точным является решение способом сшивания волновых функций на границе ядра. При этом на границе ядра требуется непрерывность волновых функций для случая уравнения Дирака и непрерывность волновой функции и ее первой производной для случая уравнения Клейна — Гордона, т. е. для ненормированных волновых функций равенство отношений:

$$\left. \frac{F_i}{G_i} \right|_{r=R} = \left. \frac{F_e}{G_e} \right|_{r=R}, \quad \left. \frac{R_i}{R'_i} \right|_{r=R} = \left. \frac{R_e}{R'_e} \right|_{r=R}. \quad (4)$$

Здесь F_i , G_i и F_e , G_e — радиальные части волновых функций уравнения Дирака, а R_i и R_e — радиальные части волновой функции уравнения Клейна — Гордона. Индексы i и e относятся к решениям внутри и вне ядра соответственно, R — радиус ядра. В волновые функции энергия входит в качестве параметра, поэтому соотношения (4) являются уравнениями для определения собственных значений энергии.

Исчезающие на бесконечности решения уравнений Дирака и Клейна — Гордона для волновых функций вне ядра могут быть выражены с помощью функции Уиттекера или же через комбинации вырожденных гипергеометрических функций. Решения внутри ядра можно искать в виде обобщенных степенных рядов. Собственные значения энергии находятся численным решением уравнений (4). Этот способ годится не только для постоянной плотности распределения протонов в ядре, но и для всякого другого сферически симметричного распределения протонов в конечной области пространства, если его можно представить в виде разложения по степеням r^*).

Можно поставить и обратную задачу: имея экспериментальные сведения об уровнях энергии мезоатомов, требуется подобрать подходящее распределение плотности заряда в ядре. Для этой цели уравнение Дирака для частного случая μ -мезосвинца было решено путем численного интегрирования на электронной счетной машине для различных форм распределения плотности

*) Относительно решения методом сшивания с учетом конечного объема ядра см. работы^{4, 34, 35}, а также в³⁶, § 7, в.

заряда в ядре³⁷. При этом оказалось, что, если увеличение плотности заряда к центру ядра ведет к сдвигу уровней $1S$, $2P_{1/2}$ и $2P_{3/2}$ вверх примерно на одну и ту же величину, то уровень $2S$ сдвигается вниз на величину, примерно в четыре раза меньшую (рис. 4). Правда, до сих пор для μ -мезосвинца измерена только энергия перехода $2P \rightarrow 1S$, поэтому никаких выводов о распределении заряда пока что сделать нельзя.

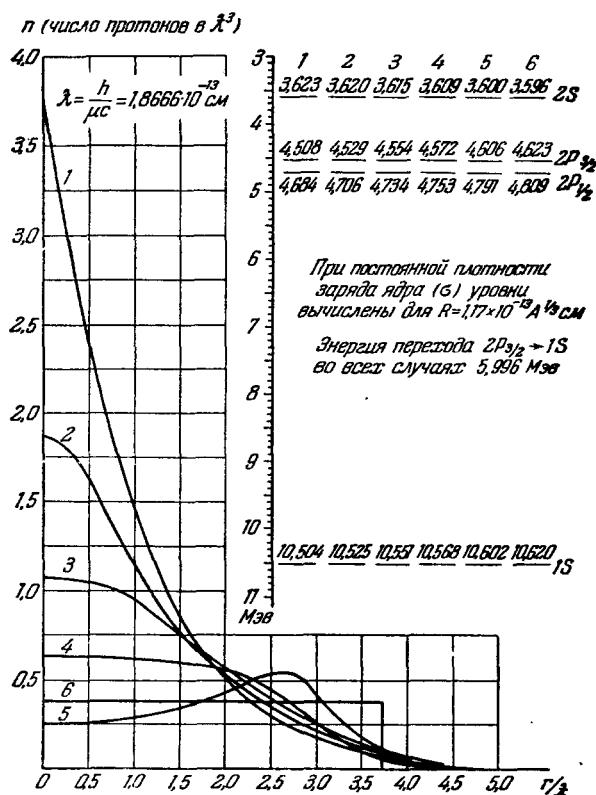


Рис. 4. Различные формы распределения плотности заряда в ядре и соответствующие им энергетические уровни μ -мезосвинца. Около уровней написано значение их энергии в Мэв. (Согласно³⁷ кривые 1, 2, 3 принадлежат семейству I со значениями $n = 0, 1, 3$ соответственно; кривая 4 — семейству II с $n = 4$; кривая 5 — семейству III с $n = 8, s = 3$; 6 — постоянная плотность заряда. Энергия перехода $2P_{3/2} \rightarrow 1S$ выбрана во всех случаях около 6 Мэв для согласия с опытом.)

Заметим также, что мезон в мезоатоме в свою очередь оказывает на ядро некоторое влияние, вызывая деформацию (поляризацию) ядра^{31, 38}. При этом могут возбуждаться ротационные уровни ядра, что ведет к возникновению тонкой структуры мезонных спектральных линий^{39, 40}.

§ 4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА В МЕЗОАТОМАХ

Интересной и существенной поправкой для энергии уровней мезоатомов оказался учет поляризации вакуума^{41, 42}. В то время как лэмбовский сдвиг энергетических уровней электрона в водороде, в основном, обязан поправке на полеую электромагнитную массу электрона или влиянию вакуумных флук-

туаций, т. е. нулевых колебаний фотонов, и лишь примерно $\frac{1}{25}$ сдвига приходится на поляризацию вакуума, т. е. влияние флуктуаций вакуумных электронов — позитронов, в мезоатомах мы имеем другую картину. Поляризация вакуума электронов — позитронов меняет электростатический потенциал ядра, в поле которого движется мезон, независимо от массы мезона, вращающегося на орбите, притом на расстояниях порядка комптоновской длины волны электрона $\sim 10^{-11}$ см, т. е. больших размеров ядра, но совпадающих по порядку

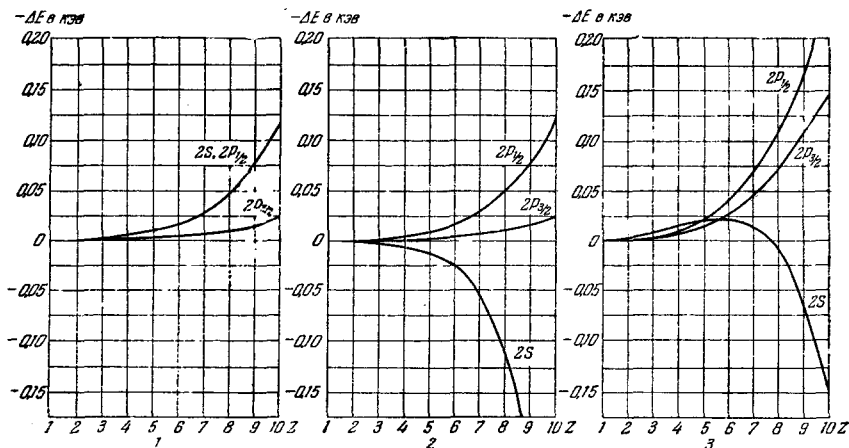


Рис. 5. Зависимость от Z величины расщепления 2-го уровня в легких мезоатомах вследствие различных эффектов: 1 — релятивистское расщепление без учета объема ядра и поляризации вакуума; 2 — учтен объем ядра; 3 — учтена также поляризация вакуума. За нуль принята нерелятивистская энергия уровня. Масса мезона $207 m_e$, радиус ядра $1,2 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ см. Обратим внимание, что в мезоатомах легче бора вследствие влияния поляризации вакуума восстанавливается нормальный порядок уровней (уровень $2P$ выше уровня $2S$)⁴⁴

величины с радиусами мезонных орбит. В то же время поправка на собственную электромагнитную массу, обратно пропорциональная квадрату массы движущейся частицы, будет в мезоатомах ввиду большей массы мезона значительно меньше, чем в случае лэмбовского сдвига для электрона. Влияние поляризации вакуума заметно при малых Z и для уровней с большими орбитальными моментами, когда влияние объема ядра невелико. Это хорошо видно на рис. 5.

Сдвиг энергетического уровня мезона в мезоатоме, обусловленный поляризацией вакуума, определяется выражением (см., например, ⁴³)

$$\Delta E_{nl} = -4ae \int_0^\infty I_{nl}(k) \varphi_0(k) \times \\ \times \left[\frac{4k_0^2 - 2k^2}{3k^2} \left(1 - \frac{\sqrt{4k_0^2 + k^2}}{k} \operatorname{Arsh} \frac{k}{2k_0} \right) + \frac{1}{9} \right] dk, \quad (5)$$

где

$$I_{nl}(k) = \int_0^\infty r |R_{nl}(r)|^2 \sin kr dr; \quad (6)$$

$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ — постоянная тонкой структуры; $R_{nl}(r)$ — радиальные волновые функции мезона; $\varphi_0(k)$ — Фурье-компонента потенциала внешнего поля, вызывающего поляризацию вакуума, т. е. в нашем случае потенциала ядра; $k_0 = \frac{m_e c}{\hbar}$ (m_e — масса электрона). В случае точечного ядра, когда

$$\varphi_0(k) = \frac{eZ}{2\pi^2 k^2} \quad (7)$$

и

$$\begin{aligned} I_{10}(k) &= k \frac{1}{(1 + \zeta^2)^2}, \\ I_{20}(k) &= k \frac{1 - 12\zeta^2 + 32\zeta^4}{(1 + 4\zeta^2)^4}, \\ I_{21}(k) &= k \frac{1 - 4\zeta^2}{(1 + 4\zeta^2)^4} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (8)$$

($\zeta = \frac{bk}{2Z}$, $b = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$ — боровский радиус мезонной орбиты), интеграл (5) может быть вычислен с помощью контурного интегрирования⁴⁴. При этом получается

$$\Delta E_{nl} = - \frac{\alpha^2 Z^2 \mu c^2}{3\pi n} K_{nl}(\epsilon_n), \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_n &= \frac{nm_e}{\mu \alpha Z}, \\ K_{10}(\epsilon) &= -\frac{11}{3} - 4\epsilon^2 + \pi \left(\frac{3}{2} \epsilon + 2\epsilon^3 \right) + (2 - \epsilon^2 - 4\epsilon^4) \Phi(\epsilon), \\ K_{20}(\epsilon) &= -\frac{16}{3} - 14\epsilon^2 + \pi \left(\frac{3}{2} \epsilon + 7\epsilon^3 \right) + \frac{3}{4} (1 - \epsilon^2)^{-1} + \\ &\quad + \frac{9}{4} (1 - \epsilon^2)^{-2} + \left[\frac{13}{4} + 4\epsilon^2 - 14\epsilon^4 - \frac{9}{4} (1 - \epsilon^2)^{-2} \right] \Phi(\epsilon), \\ K_{21}(\epsilon) &= -\frac{14}{3} - 10\epsilon^2 + \pi \left(\frac{3}{2} \epsilon + 5\epsilon^3 \right) + \frac{5}{4} (1 - \epsilon^2)^{-1} + \\ &\quad + \frac{3}{4} (1 - \epsilon^2)^{-2} + \left[\frac{11}{4} + 2\epsilon^2 - 10\epsilon^4 - (1 - \epsilon^2)^{-1} - \frac{3}{4} (1 - \epsilon^2)^{-2} \right] \Phi(\epsilon), \\ \Phi(\epsilon) &= (1 - \epsilon^2)^{-\frac{1}{2}} \ln \left\{ \epsilon^{-1} \left[1 + (1 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Аналогичные, хотя довольно громоздкие формулы могут быть получены и для сдвигов более высоких уровней. Результаты вычислений по этим формулам приведены на рис. 6 и 7.

Рассмотрим влияние объема ядра на поляризацию вакуума. Можно показать, что учет распределения заряда по объему ядра значительно уменьшает эффект поляризации вакуума для атомов с большими Z (см. ⁴⁵, а также ⁴⁶). Если мы возьмем в качестве источника, вызывающего поляризацию вакуума, ядро с зарядом, равномерно распределенным по объему, то Фурье-компонента потенциала ядра (1) будет

$$\varphi_0(k) = \frac{eZ}{2\pi^2 k^2} \frac{3}{R^2 k^2} \left(\frac{\sin kR}{kR} - \cos kR \right). \quad (11)$$

Здесь R — радиус ядра. Для учета изменения волновых функций мезона, описы-

ваемого для простоты нерелятивистским уравнением Шредингера, под влиянием конечного объема ядра, возьмем для состояний $1S$, $2S$ и $2P$ соответственно пробные волновые функции:

$$\left. \begin{aligned} R_{10}(r) &= 2 \left(q \frac{Z}{b} \right)^{3/2} \exp \left\{ -q \frac{Z}{b} r \right\}, \\ R_{20}(r) &= \frac{2 \sqrt{3} s \left(s \frac{Z}{b} \right)^{3/2}}{\sqrt{s^2 - qs + q^2}} \left[1 - \frac{Z}{3b} (s + q) r \right] \exp \left\{ -s \frac{Z}{b} r \right\}, \\ R_{21}(r) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t \frac{Z}{b} \right)^{5/2} r \exp \left\{ -t \frac{Z}{b} r \right\} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

с вариационными параметрами q , s и t , которые, как обычно, определяются из условия минимума энергии при учете того, что потенциал определяется формулами (1). Тогда имеем:

ΔE в кэв

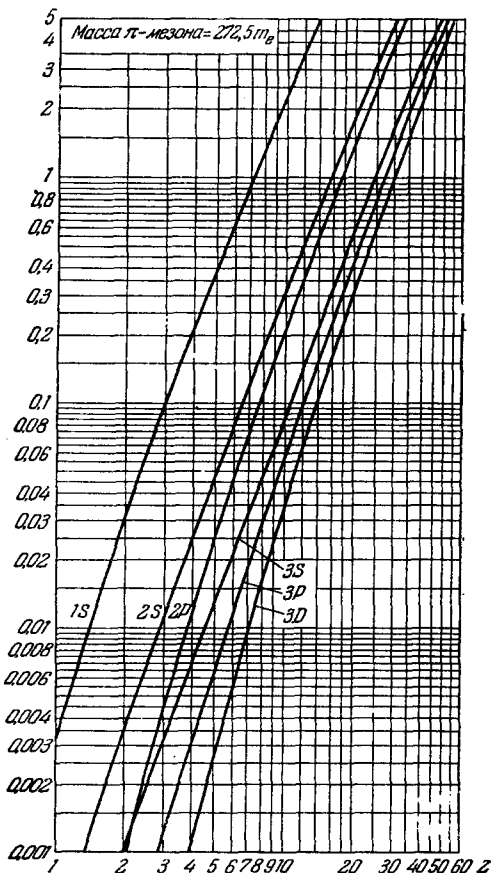


Рис. 6. Зависимость от Z величины сдвига энергетических уровней π -мезоатомов вследствие поляризации вакуума⁴⁴.

уровней в мезоатомах, обязанных поляризации вакуума, учтены только члены порядка αZ . Как показано в работе⁴⁷, учет членов более высоких порядков для точечного ядра даже в случае μ -мезоурана приводит к сдвигу, который составляет менее 0,02% энергии уровня. Очевидно, что учет объема ядра может только уменьшить эту цифру.

$$\left. \begin{aligned} I_{10}(k) &= \frac{k}{(1 + \zeta^2 q^{-2})^2}, \\ I_{20}(k) &= \frac{3s^2 k}{s^2 - sq + q^2} \times \\ &\times \left[\frac{1}{(1 + \zeta^2 s^{-2})^2} - \frac{s + q}{3s} \frac{3 - \zeta^2 s^{-2}}{(1 + \zeta^2 s^{-2})^3} + \right. \\ &\left. + \frac{(s + q)^2}{3s^2} \frac{1 - \zeta^2 s^{-2}}{(1 + \zeta^2 s^{-2})^4} \right], \\ I_{21}(k) &= k \frac{1 - \zeta^2 t^{-2}}{(1 + \zeta^2 t^{-2})^4}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(Заметим, что здесь $q < 1$, $s, t < \frac{1}{2}$; при $q=1$, $s=t=\frac{1}{2}$ формулы (13) превращаются в (8)).

Для нахождения сдвига уровня нужно в (5) подставить (11) и (13). На рис. 7 показаны значения сдвига уровней энергии μ -мезоатомов при учете объема ядра, полученные путем численного интегрирования. Для примера укажем, что для μ -мезосвинца поляризационный сдвиг уровня $1S$ без учета объема ядра равен 217 кэв, а с учетом объема всего лишь 53 кэв; для уровней $2S$ и $2P$ сдвиги равны соответственно 37 и 33 кэв без учета ядра и 17 и 28 кэв с учетом объема.

Следует отметить, что во всех предыдущих вычислениях сдвигов

Влияние поляризации вакуума было действительно открыто на опыте. Для получения значения массы μ -мезона, согласующегося с данными других опытов, при сравнении теории с экспериментальными значениями энергий переходов $2P \rightarrow 1S$ в μ -мезоуглероде, $3D \rightarrow 2P$ в μ -мезофосфоре и $4F \rightarrow 3D$ в μ -мезокремнии пришлось вводить поправку на поляризацию вакуума²⁴.

В таблицах I и II приведены для сравнения относительные изменения энергии перехода $2P \rightarrow 1S$ в π - и μ -мезоатомах с $Z \leq 10$, обязанные основным

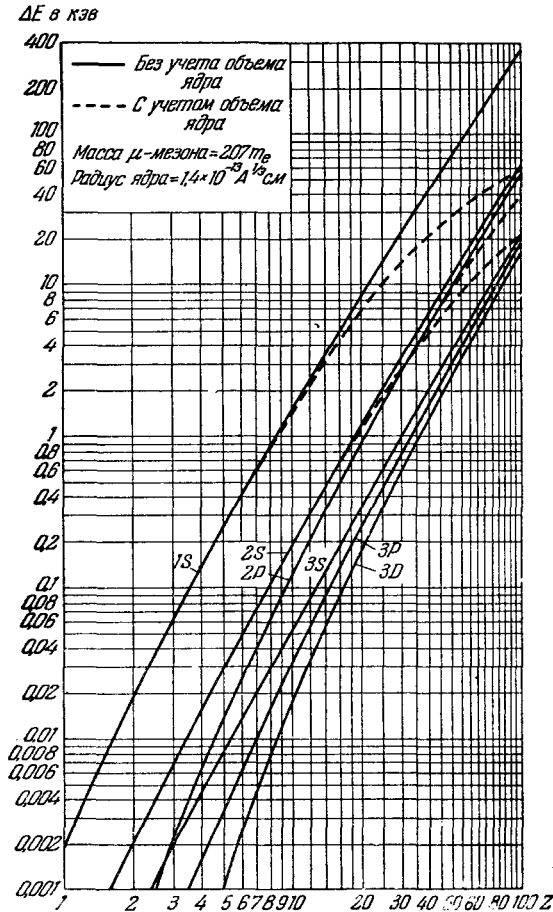


Рис. 7. Зависимость от Z величины сдвига энергетических уровней μ -мезоатомов вследствие поляризации вакуума⁴⁴.

эффектам, вызывающим сдвиги уровней, (кроме сдвига уровней в π -мезоатомах за счет ядерного взаимодействия π -мезона с нуклонами ядра). Неисправленные значения энергии перехода были получены решением нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом. Релятивистские поправки находились по обычным формулам тонкой структуры для уравнений Дирака в случае μ -мезоатомов и Клейна — Гордона в случае π -мезоатомов с точностью до членов порядка $\alpha^2 Z^2$ включительно. Конечный объем ядра учитывался по теории возмущений (см. формулы (3)), а поляризация вакуума — по формулам (10). Для масс мезонов и радиусов ядер были приняты значения: $m_\mu = 207 m_e$, $m_\pi = 272,5 m_e$, $R = 1,2 \cdot 10^{-13} A^{1/2} \text{ см}$.

Таблица I

 π -мезоатомы

Элемент	$\frac{\Delta E_{2p} - \Delta E_{1s}}{E_{2p} - E_{1s}} \cdot 10^3$				$E_{2p} - E_{1s}, \text{ кэВ}$	
	релятивистский эффект	эффект объема ядра	поляриз. вакуума	полное изменение энергии перехода	нерелятив. без учета объема и поляризации	релятив. с учетом объема и поляризации
H ₁ ¹	0,09	—	1,32	1,40	2,421	2,424
He ₂ ⁴	0,34	—0,38	2,81	2,77	10,722	10,752
Li ₃ ⁷	0,77	—1,28	3,82	3,32	24,50	24,58
Be ₄ ⁹	1,39	—2,72	4,62	3,28	43,76	43,90
B ₅ ¹¹	2,15	—4,89	5,26	2,52	68,58	68,75
C ₆ ¹²	3,14	—7,48	5,77	1,42	98,86	99,00
N ₇ ¹⁴	4,22	—11,36	6,13	—1,01	134,79	134,66
O ₈ ¹⁶	5,54	—16,31	6,68	—4,10	176,29	175,57
F ₉ ¹⁹	7,05	—23,34	7,06	—9,24	223,43	221,39
Ne ₁₀ ²⁰	8,74	—29,97	7,40	—13,84	275,96	272,19

Таблица II

 μ -мезоатомы

Элемент	$\frac{\Delta E_{2p_{3/2}} - \Delta E_{1s}}{E_{2p_{3/2}} - E_{1s}} \cdot 10^3$				$E_{2p_{3/2}} - E_{1s}, \text{ кэВ}$	
	релятивистский эффект	эффект объема ядра	поляриз. вакуума	полное изменение энергии перехода	нерелятив. без учета объема и поляризации	релятив. с учетом объема и поляризации
H ₁ ¹	0,02	—	0,99	1,01	1,898	1,900
He ₂ ⁴	0,07	—0,23	2,24	2,08	8,216	8,233
Li ₃ ⁷	0,15	—0,75	3,17	2,57	18,71	18,75
Be ₄ ⁹	0,27	—1,58	3,89	2,58	33,37	33,46
B ₅ ¹¹	0,42	—2,84	4,50	2,08	52,26	52,37
C ₆ ¹²	0,60	—4,35	5,01	1,26	75,32	75,41
N ₇ ¹⁴	0,82	—6,59	5,46	—0,31	102,65	102,62
O ₈ ¹⁶	1,07	—9,45	5,86	—2,52	134,21	133,87
F ₉ ¹⁹	1,36	—13,48	6,24	—5,88	170,05	169,06
Ne ₁₀ ²⁰	1,68	—17,29	6,57	—9,04	209,99	208,11

§ 5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ π -МЕЗОНА С НУКЛОНАМИ ЯДРА

В π -мезоатомах должно проявляться сильное взаимодействие мезона с нуклонами, составляющими ядро. Величина сдвига уровней энергии мезона в мезоатоме, обязанного этому взаимодействию, не может быть вычислена непосредственно ввиду того, что завершённой мезодинамики не существует. Однако можно провести сравнение опытов по рассеянию и поглощению π -мезонов с экспериментально определённой величиной сдвига уровней в π -атомах.

Движение мезона в мезоатоме можно наглядно понимать как совокупность рассеяний мезона в поле ядра. Если при рассеянии мезона на нуклоне пренебречь энергией, переданной нуклону, то в борновском приближении изменение амплитуды рассеяния a по сравнению с амплитудой рассеяния на кулоновском поле ядра (или сдвиг фазы с нулевым моментом δ_0 , т. е. в S -состоянии), так же как и величина сдвига уровня энергии для связанного состояния мезона в первом приближении теории возмущений, будет пропорционально средней добавочной потенциальной энергии взаимодействия мезона с нуклоном:

$$a = \frac{\delta_0}{k} = -\frac{\bar{\mu}}{2\pi\hbar^2} \int \Delta V d\tau; \quad \Delta E = |\psi(0)|^2 \int \Delta V d\tau. \quad (14)$$

Здесь $k = \frac{p}{\hbar}$, $\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{b} \right)^{3/2}$ — значение волновой функции мезона в нуле

(p — импульс мезона, $b = \frac{\hbar}{\mu e^2}$ — борковский радиус мезонной орбиты, $\bar{\mu}$ —

приведенная масса мезона). Отсюда для сдвига уровней в π -мезоводороде, используя соотношение теории изотопического спина

$$a = \frac{2}{3} a(T=1/2) + \frac{1}{3} a(T=3/2), \quad (15)$$

легко получить:

$$\frac{\Delta E}{E_{1S}} = -\frac{4}{b} a = -\frac{4}{b} \frac{2\delta_1 + \delta_3}{3k}, \quad (16)$$

где δ_1 и δ_3 — сдвиги фаз, характеризующие S -рассеяние π -мезона на нуклоне вследствие ядерного взаимодействия в состояниях изотопического спина $T=1/2$ и $T=3/2$, $E_{1S} = -\frac{e^2 Z^2}{2b}$ — энергия невозмущенного уровня $1S$. Для ядра с Z протонами и N нейтронами имеем:

$$\frac{\Delta E}{E_{1S}} = -\frac{4Z}{bk} \left(\frac{2}{3} Z\delta_1 + \frac{3N+Z}{3} \delta_3 \right). \quad (17)$$

Здесь предположена аддитивность эффектов рассеяния на протонах и нейтронах (при рассеянии π -мезонов на нейтронах участвует только состояние изотопического спина $T=3/2$). Наконец, для ядер с равным числом протонов и нейтронов получается для сдвига уровня $1S$ квадратичная зависимость от Z (см.⁴⁸, а также⁴⁹):

$$\frac{\Delta E}{E_{1S}} = -\frac{8Z^2}{b} \frac{\delta_1 + 2\delta_3}{3k}. \quad (18)$$

Экспериментальные наблюдения^{22, 23, 50, 51} относительных сдвигов уровня $1S$ в различных π -атомах вплоть до фтора не только подтвердили пропорциональность Z^2 , но дали также хорошее согласие с результатами эксперимента по определению фазового сдвига при рассеянии π -мезонов на нуклонах. Из (18)

при учете экспериментальных данных по сдвигу уровня $1S$ (см. рис. 8) следует

$$\frac{\delta_1 + 2\delta_3}{3\eta} = -1,1^\circ \pm 0,2^\circ \left(\eta = \frac{k\hbar'}{\mu c} \right). \quad (19)$$

С другой стороны, фазовый анализ рассеяния, проделанный Орир⁵², привел к соотношениям $\delta_1 = +9,2^\circ$, $\eta = 0,16$, $\delta_3 = -6,3^\circ$, $\eta = -0,11$ (для области 20—60 Мэв), подстановка которых в формулу (19) дает как раз $-1,1^\circ$. С этим согласуется соотношение $(\delta_1 - \delta_3) > 0$. С учетом этих данных формула (18) принимает вид

$$\frac{\Delta E}{E_{1S}} \approx \frac{Z^2}{850}. \quad (20)$$

Отметим также, что аналогичные расчеты были проведены для случая, когда нуклон при рассеянии π -мезона в промежуточном состоянии получает большой импульс. В реальном случае такое промежуточное состояние соответствует поглощению мезона ядром с образованием звезды ($\pi + \text{ядро} \rightarrow \text{звезда}$). Тогда при учете экспериментальных данных о вероятности поглощения мезонов ядрами для сдвига уровня $1S$ получается для ядер с $Z=N$ согласно Брюкнеру⁵³:

$$\frac{\Delta E_1}{E_{1S}} = \frac{Z^2}{985} + i \frac{Z^2}{2150}. \quad (21)$$

Мнимая часть дает ширину уровня, связанную с поглощением мезона с K -орбиты. Полный сдвиг определяется тогда суммой (20) и (21):

$$\frac{\Delta E}{E_{1S}} = \frac{Z^2}{456} + i \frac{Z^2}{2150}. \quad (22)$$

Сопоставление экспериментальных данных по непосредственно наблюдаемому сдвигу уровня $1S$ в мезоатомах с формулами Дезера — Гольдбергера — Баумана — Тирринга (20) и Брюкнера (22)

Рис. 8. Относительное изменение величины энергии перехода $2P \rightarrow 1S$ в π -мезоатомах за счет ядерного взаимодействия π -мезона с нуклонами ядра. Экспериментальные результаты^{23, 51}: a — по положению пика в многоканальном амплитудном анализаторе; b — по избирательному поглощению излучения мезоатомов в веществах с различными Z . Подсчеты для ядер с $Z=N$: 1 — согласно Дезеру — Гольдбергеру — Бауману — Тиррингу⁴⁸; 2 — согласно Брюкнеру⁵³; x — подсчеты по формуле (17):

$$E_{2P} - E_{1S} \approx \frac{3}{4} E_{1S}.$$

показано на рис. 8. Эксперимент дает хорошее согласие с (20) и несколько меньшие значения для сдвига, чем (22), что Брюкнер объясняет недостаточной точностью измерения фаз мезонов при рассеянии с малыми энергиями, а также упрощениями, сделанными при выводе этих формул.

Более поздние эксперименты по изучению K -серии спектров π -мезоатомов, выполненные с помощью пропорционального счетчика, дающего большую точность в этом диапазоне энергий (до 100 кэв), чем сцинтилляционные счетчики, также показали согласие с формулами Дезера и др., а не с формулами Брюкнера (см. таблицу III)⁵⁴.

Таким образом, из самого факта существования дополнительного сдвига уровней $1S$ вверх после учета объема ядра, поляризации вакуума и релятивистских поправок, следует фундаментальный вывод, что между нуклонами и мезоном имеет место сильное отталкивание на малых расстояниях порядка

$\sim 4,2 \cdot 10^{-14}$ см (примерно вдвое больше комптоновской длины волны нуклона). Аналогичные силы ядерного типа, но ведущие к притяжению, проявляются между электроном и нейтроном в обычных атомах и, по-видимому, сказываются относительно заметно в изотопическом смещении (см., например, в ³⁶, § 7, 2).

Отметим в данной связи, что вопрос о фазовых сдвигах при рассеянии мезонов на нуклонах в последнее время всесторонне рассматривался с экспериментальной и теоретической стороны. Очевидно, выяснение взаимодействия пионов с нуклонами должно в свою очередь помочь выяснению более сложного вопроса о взаимодействии нуклонов через мезоны, т. е., в частности, вопроса о ядерных силах и рассеянии нуклонов. Значения фаз и их ход с изменением энергии были значительно уточнены в последнее время и подтвердили правильность гипотезы о зарядовой независимости ядерных сил и возможности ограничения *S*- и *P*-рассеянием при умеренных энергиях. Что касается теоретических выводов, то, не вдаваясь в подробности, все же ввиду особой важности этого вопроса следует отметить, что современная псевдоскалярная мезодинамика в конце концов сумела при некоторых упрощающих предположениях удовлетворительно объяснить многие основные закономерности сдвига фаз при *S*- и *P*-рассеянии пионов на нуклонах в обоих состояниях изотопического спина $T = \frac{1}{2}$ и $T = \frac{3}{2}$ и, в частности, привела в согласии с опытом к выводу, что наиболее значительным является сдвиг фазы δ_{33} (*P*_{3/2}-волна, $T = \frac{3}{2}$), который в области около 200 Мэв достигает 90°, т. е. проходит через резонанс. Этот резонанс подтверждается также анализом фоторождения мезонов. Раньше для объяснения резонанса выдвигались полуфеноменологические модели возбужденного изобарного состояния протонов и другие. В области малых энергий экспериментальные значения δ_{33} растут как куб импульса (η^3), а в области примерно после 30 Мэв даже несколько быстрее. Эти результаты подтверждаются анализом рассеяния пионов при энергиях до 300 Мэв ⁵⁴⁻⁵⁶.

Следует отметить, что главная фаза δ_{33} удовлетворяет соотношению Чу-Ло, полученному из решения уравнения Ло:

$$\left(\frac{\eta^3}{\omega^*}\right) \operatorname{ctg} \delta_{33} = 8,05 - 3,8\omega^* \quad (23)$$

(ω^* — начальная энергия мезона минус энергия покоя протона). Отсюда при малых энергиях $\delta_{33} = 0,235\eta^3$ и резонансное значение $\delta_{33} = 90^\circ$ достигается при 192 Мэв*). Это важное уравнение для фаз было установлено на базе условий причинности и инвариантности с учетом наличия мезонного облака вокруг остова нуклона. Оно является шагом вперед по сравнению с трактовкой процессов по теории возмущений и методу Тамма — Данкова. Анализ рассеяния пионов и π -мезоатомов позволяет выяснить характер специфического неэлектромагнитного взаимодействия пионов с нуклонами (псевдоскалярная, псевдовекторная связь, роль нелинейных членов в связи) и, в частности, определить величину константы взаимодействия; лучшее значение последней на сегодняшний день гласит: $f^2/\hbar c = 0,68$, где f — π -мезонный псевдовекторный «заряд» нуклона.

В заключение подчеркнем, что успешный теоретический анализ рассеяния мезонов, проводимый на базе весьма общих соотношений, явился главным достижением мезодинамики последних лет и убедительно показал, что вопреки различным попыткам создать пессимистические настроения, обьявив чуть ли не о «крахе» мезодинамики, мезонная теория не только не исчерпала своих возможностей, но, напротив, развивается, «подтягиваясь» к уровню электродинамики. Вопросы устранения глубоких трудностей нынешней теории поля,

*) О теоретическом анализе уравнения Ло см. 57-65.

в значительной мере общие для электродинамики и мезодинамики и связанные прежде всего с расходимостью полевых вкладов масс, электрических зарядов и других констант связи частиц и тем более с неудачей попыток вывода определенных эмпирических значений для этих величин, будут, по всей видимости, решаться путем коренного обобщения теории, возможно в направлении учета какой-то минимальной длины.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. S. Tomonaga, G. Araki, Phys. Rev. **58**, 90 (1940).
2. W. Y. Chang, Rev. Mod. Phys. **21**, 166 (1949).
3. M. Camac, A. D. McGuire, J. B. Platt, H. I. Schulte, Phys. Rev. **88**, 134 (1952).
4. V. L. Fitch, J. Rainwater, Phys. Rev. **92**, 789 (1953).
5. E. Fermi, E. Teller, Phys. Rev. **72**, 399 (1947).
6. R. E. Marshak, Meson Physics, гл. 5, McGraw-Hill, N. Y., 1952.
7. М. И. Подгорецкий, УФН **51**, 253 (1953).
8. J. A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. **21**, 133 (1949).
9. J. A. Wheeler, Phys. Rev. **71**, 320 (1947).
10. D. H. Perkins, Phil. Mag. **40**, 61 (1949).
11. R. Huby, Phil. Mag. **40**, 685 (1949).
12. R. L. Rosenberg, Phil. Mag. **40**, 759 (1949).
13. W. F. Fry, Nuovo Cimento **10**, 490 (1953).
14. H. Morinaga, W. F. Fry, Nuovo Cimento **10**, 308 (1953).
15. G. G. Harris, T. J. B. Shanley, Phys. Rev. **89**, 983 (1953).
16. A. H. De Borde, Proc. Phys. Soc. (London) **A67**, 57 (1954).
17. F. Ferrari, C. Villi, Phys. Rev. **96**, 1159 (1954).
18. W. Y. Chang, Phys. Rev. **95**, 1288 (1954).
19. М. И. Подгорецкий, ЖЭТФ **26**, 255 (1954).
20. A. Fafarman, M. H. Shamos, Phys. Rev. **100**, 874 (1955).
21. J. A. Wheeler, Phys. Rev. **92**, 812 (1953).
22. M. Camac, A. D. McGuire, J. B. Platt, H. J. Schulte, Phys. Rev. **99**, 897 (1955).
23. M. Stearns, M. B. Stearns, S. De Benedetti, L. Leipuner, Phys. Rev. **97**, 240 (1955).
24. S. Koslov, V. Fitch, I. Rainwater, Phys. Rev. **95**, 291 (1954).
25. M. Stearns, M. B. Stearns, S. De Benedetti, L. Leipuner, Phys. Rev. **95**, 1353 (1954).
26. M. B. Stearns, S. De Benedetti, M. Stearns, L. Leipuner, Phys. Rev. **93**, 1123 (1954).
27. M. Stearns, M. B. Stearns, S. De Benedetti, L. Leipuner, Phys. Rev. **94**, 766 (1954).
28. A. D. McGuire, M. Camac, M. L. Halbert, I. B. Platt, Phys. Rev. **95**, 625 (1954).
29. M. Camac, M. L. Halbert, J. B. Platt, Phys. Rev. **99**, 905 (1955).
30. A. M. L. Messiah, R. E. Marshak, Phys. Rev. **88**, 678 (1952).
31. L. N. Cooper, E. M. Henley, Phys. Rev. **92**, 801 (1953).
32. S. Flügge, F. T. Adler, Naturwiss. **40**, 601 (1953).
33. S. Flügge, W. Zickendraht, Zs. f. Phys. **143**, 1 (1955).
34. A. Sommerfeld, Zs. f. Phys. **118**, 295 (1941).
35. Д. Иваненко, Н. Колесников, ДАН СССР **91**, 47 (1953).
36. А. Соколов, Д. Иваненко, Квантовая теория поля, ч. II, Гостехиздат, М., 1953.
37. D. L. Hill, K. W. Ford, Phys. Rev. **94**, 1617 (1954).
38. W. Lakin, W. Kohn, Phys. Rev. **94**, 787 (1954).
39. B. A. Jacobsohn, Phys. Rev. **95**, 654 (1954).
40. B. A. Jacobsohn, Phys. Rev. **96**, 1637 (1954).
41. А. Д. Галанин, И. Я. Померанчук, ДАН СССР **86**, 251 (1952).
42. L. L. Foldy, E. Eriksen, Phys. Rev. **95**, 1048 (1954).
43. А. И. Ахизер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, стр. 376, Гостехиздат, М., 1953.
44. Г. Е. Пустовалов, ЖЭТФ (в печати).
45. Г. Е. Пустовалов, ЖЭТФ **27**, 758 (1954).
46. A. B. Mickelwait, H. C. Corben, Phys. Rev. **96**, 1145 (1954).
47. E. H. Wichmann, N. M. Kroll, Phys. Rev. **101**, 843 (1956).
48. S. Deser, M. L. Goldberger, K. Baumann, W. Thirring, Phys. Rev. **96**, 774 (1954).

49. H. Bethe, F. de Hoffmann, Mesons and Fields, том II, § 33 h, Row, Peterson, N. Y., 1955.
 50. M. B. Stearns, L. Stearns, L. Leipuner, S. De Benedetti, Phys. Rev. **95**, 625 (1954).
 51. M. B. Stearns, M. Stearns, S. De Benedetti, L. Leipuner, Phys. Rev. **96**, 804 (1954).
 52. J. Orear, Phys. Rev. **96**, 176 (1954).
 53. K. A. Brueckner, Phys. Rev. **98**, 769 (1955).
 - 53a. D. West, E. F. Bradley, CERN Symposium of High Energy Accelerator and Pion Physics, Geneva, June 1956.
 54. H. L. Andersen, M. Glicksman, Phys. Rev. **100**, 268 (1955).
 55. J. Orear, Phys. Rev. **100**, 288 (1955).
 56. S. I. Lindenbaum, L. C. Yuan, Phys. Rev. **100**, 306 (1955).
 57. F. Low, Phys. Rev. **97**, 1392 (1955).
 58. F. S. Dyson, Phys. Rev. **100**, 344 (1953).
 59. G. C. Wick, Rev. Mod. Phys. **27**, 339 (1955).
 60. A. Reifman, B. de Witt, R. G. Newton, Phys. Rev. **101**, 877 (1955).
 61. G. Chew, F. Low, Proc. 5th Rochester Conference.
 62. R. G. Sachs, Phys. Rev. **102**, 867 (1956).
 63. G. F. Chew, F. E. Low, Phys. Rev. **101**, 1570 (1956).
 64. M. Cini, S. Fubini, A. Stanghellini, Nuov. Cim. **3**, № 6, 1380 (1956).
 65. E. Clementel, C. Villi, I. Gabrielli, G. Iernetti, Suppl. Nuov. Cim. № 3, 474, 496 (1956).
-