

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА
И «ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ РАДИУС» ТЯЖЁЛЫХ ЯДЕР****Г. Ф. Друкарёв****1. ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время накопились экспериментальные данные и теоретические расчёты, позволяющие уточнить значения «электрических радиусов» тяжёлых ядер и выяснить некоторые детали пространственного распределения заряда ядра.

Для исследования распределения заряда можно использовать такие явления, в которых основную роль играет электромагнитное взаимодействие частиц и где достаточно отчётливо сказывается влияние конечного размера ядра.

К этой группе явлений относятся:

- 1) рассеяние электронов с энергией, значительно превышающей энергию покоя электрона,
- 2) кулоновская энергия тяжёлых ядер,
- 3) эффекты тонкой структуры рентгеновских термов,
- 4) изотопический сдвиг в атомных спектрах,
- 5) спектр рентгеновских лучей, испускаемых отрицательными μ -мезонами при переходах между стационарными состояниями в тяжёлых мезоатомах.

В опытах по рассеянию электронов различают две области энергий: малые энергии, когда длина волны Де-Бройля больше размеров ядра, и большие энергии, когда длина волны меньше или порядка размеров ядра. Для теоретической интерпретации эксперимента выбирается какое-либо аналитическое выражение плотности заряда ρ , обычно сферически-симметричное, зависящее от одного или нескольких параметров, и производится подбор параметров, при которых достигается наилучшее согласие теоретических расчётов с опытами. В теоретическую интерпретацию входит также оценка роли таких факторов, как электрический квадрупольный и магнитный дипольный моменты ядра, радиационные эффекты и др.

Данные по рассеянию электронов малых энергий позволяют определить один параметр, характеризующий радиус ядра. Данные

по рассеянию электронов большой энергии в настоящее время позволяют определить два параметра: радиус ядра и толщину поверхностного слоя.

Кулоновская энергия тяжёлых ядер сравнительно слабо зависит от формы $\rho(r)$. Поэтому данные по кулоновской энергии позволяют определить лишь радиус ядра.

Эффекты в атомных спектрах, как оказывается, в настоящее время не могут быть использованы для определения радиуса ядра. В тонкой структуре рентгеновских термов большую роль играют радиационные эффекты, точной оценки которых для тяжёлых элементов пока не имеется. В изотопическом сдвиге большую роль играет сжимаемость ядра, для которой также нет надёжных оценок.

Исследование рентгеновских спектров мезоатомов в принципе может дать сведения как о радиусе ядра, так и о форме ρ . Однако пока известны из опыта энергия только одного перехода $2P - 1S$ и сравнительно неточно величина дублетного расщепления. Из этих данных можно получить сведения только о радиусе ядра.

Ниже излагаются результаты некоторых исследований последних лет по перечисленным эффектам.

2. ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ЯДРОМ

Приведём сначала некоторые сведения из теории рассеяния электронов точечным зарядом Ze . Будем пользоваться системой единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

Представим дифференциальное эффективное сечение в виде

$$d\sigma = \sigma(\theta) d\Omega. \quad (2.1)$$

Для $\sigma(\theta)$ в борновском приближении можно получить простое аналитическое выражение.

В интересующей нас области энергий $E \gg m$ сечение σ имеет вид

$$\sigma_0 = \frac{Z^2 e^4 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}; \quad (2.2)$$

σ_0 имеет наименьшее значение при $\theta = \pi$ и монотонно возрастает при уменьшении θ .

Борновское приближение справедливо лишь для малых Z . Для больших Z оно приводит к большой погрешности. Специфической особенностью рассматриваемого крайне релятивистского случая¹ является то, что если борновское приближение оказывается неприемлемым при какой-либо энергии, то оно не будет применимо и при всех более высоких энергиях.

При точном рассмотрении рассеяния быстрых электронов σ определяется в виде (см., например, ³)

$$\sigma(\theta) = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}\right) |f(\theta)|^2 \quad (E \gg m), \quad (2.3)$$

где $f(\theta)$ выражается рядом

$$f = \frac{1}{2ip} \sum_{j=-\frac{1}{2}}^{\infty} \left(j + \frac{1}{2}\right) (e^{2i\delta_j} - 1) \times \\ \times \left(P_{j+\frac{1}{2}}(\cos \theta) + P_{j-\frac{1}{2}}(\cos \theta)\right); \quad (2.4)$$

p — импульс электрона, δ_j — фаза, которая определяется из решения уравнения Дирака. В сферически-симметричном поле $V(r)$ уравнение Дирака сводится к системе двух уравнений для радиальных функций, f_j и g_j .

В предельном случае $E \gg m$ эти уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg_j}{dr} + \frac{\kappa}{r} g_j - (E - V) f_j &= 0, \\ \frac{df_j}{dr} - \frac{\kappa}{r} f_j + (E - V) g_j &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

где

$$\kappa = \mp \left(j + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} -(l+1) & \text{при } j = l + \frac{1}{2}, \\ l & \text{при } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.6)$$

В том случае, когда происходит рассеяние точечным зарядом,

$$V = -\frac{Ze^2}{r}.$$

Асимптотические выражения g_j и f_j имеют вид

$$\left. \begin{aligned} g_j &\sim \cos \left(pr + Ze^2 \ln 2pr - \frac{l+1}{2} \pi + \delta_j^{(0)}\right), \\ f_j &\sim \sin \left(pr + Ze^2 \ln 2pr - \frac{l+1}{2} \pi + \delta_j^{(0)}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Для фазы $\delta_j^{(0)}$ в этом случае существует аналитическое выражение. Таким образом, определение $\sigma(\theta)$ сводится к суммированию (2.4).

Отметим, что непосредственное суммирование ряда (2.4) осложняется некоторыми специфическими особенностями фаз кулоновского поля. В работе Йенни, Ревенхолла и Вильсона³ предложен метод

вычисления $f(\theta)$, позволяющий обойти эти трудности. В настоящее время существуют таблицы (Фишбах⁴) и приближённые формулы, дающие возможность представить табличные данные в аналитической форме (Парзен и Вейнрайт⁵).

Выясним, каких изменений следует ожидать в картине рассеяния протяжённым ядром по сравнению с рассеянием точечным зарядом. Очевидно, наибольшие изменения будут в угловом распределении рассеянных электронов в области больших углов. Это следует из того, что область больших углов соответствует малым прицельным расстояниям, на которых только и сказывается отличие протяжённого ядра от точечного. Можно в общих чертах составить представление о характере изменения углового распределения, пользуясь аналогией между рассеянием частиц и дифракцией волн.

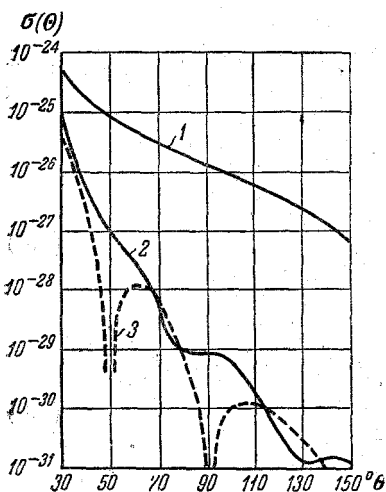


Рис. 1. Угловое распределение для $Z = 79$ и энергии 150 МэВ . 1 — точечный заряд, 2 — равномерно заряженная сфера (точный расчёт), 3 — равномерно заряженная сфера (борновское приближение).

нии рассеянных электронов будут наблюдаться минимумы при определённых углах (рис. 1). В том случае, когда длина волны электронов велика по сравнению с размерами ядра, минимумы практически не будут заметны.

Кроме того, можно ожидать общего уменьшения числа рассеянных электронов в данном телесном угле по сравнению со случаем рассеяния на точечном заряде, поскольку величина потенциала в центральной части размазанного заряда меньше, чем величина потенциала вблизи точечного заряда (рис. 1).

Если происходит, например, диффракция света на капле жидкости, то диффрагированная волна может быть представлена как результат интерференции волн, исходящих из различных участков капли. В том случае, когда размеры капли сравнимы с длиной волны, интенсивность диффрагированной волны очень резко меняется при изменении направления. В некоторых определённых направлениях волны, исходящие из различных участков капли, будут в результате интерференции ослабляться. В этих направлениях, следовательно, интенсивность диффрагированной волны будет уменьшена.

Аналогичную картину можно ожидать и при рассеянии электронов в том случае, когда длина волны электронов сравнима с размерами ядра; в угловом распределе-

Математически влияние размазанности заряда выражается в изменении выражения $\sigma(\theta)$. В борновском приближении это изменение сводится к умножению $\sigma_0(\theta)$, определяемого (2.1) на некоторый множитель

$$\sigma = \sigma_0 \cdot |F^2|, \quad (2.8)$$

где F — ядерный формфактор. Он связан с плотностью заряда ρ соотношением

$$F = \frac{\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \rho d\mathbf{r}}{\int \rho d\mathbf{r}}. \quad (2.9)$$

Здесь $\mathbf{q}$ — импульс, переданный ядру при рассеянии, причём

$$|\mathbf{q}| = 2p \sin \frac{\theta}{2}. \quad (2.10)$$

При малых энергиях в случае сферически-симметричного ρ с достаточной точностью можно принять, что

$$F = 1 - \frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle, \quad (2.11)$$

где

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int r^2 \rho d\mathbf{r}}{\int \rho d\mathbf{r}}. \quad (2.12)$$

Картина рассеяния в этом случае определяется только одним параметром $\langle r^2 \rangle$.

При высоких энергиях формфактор определяется уже не одним параметром, а существенно зависит от вида ρ . Для равномерного распределения $\rho = \text{const}$ при $r \leq R$ величина $\sigma(\theta)$ имеет резкие дифракционные минимумы при определённых значениях qR . Если же ρ изображается функцией с максимумом в центре ядра и резким спадом к краям, то дифракционные минимумы сглаживаются и делаются слабо выраженными.

В точной теории не существует какого-либо аналитического выражения для формфактора. Можно по аналогии с (2.8) ввести величину $|F|^2$ как отношение сечения рассеяния протяжённым зарядом к сечению рассеяния точечным зарядом. Однако тогда $|F|^2$ приходится определять путём численной интеграции уравнения Дирака.

Задача сводится к интеграции (2.5), причём $V(r)$ даётся при $r \gg R$ выражением

$$V = -\frac{Ze^2}{r},$$

а при $r \leq R$ связано с ρ уравнением Пуассона

$$\Delta V = 4\pi e\rho(r). \quad (2.13)$$

Вследствие того, что поле не является кулоновским в области $r \leq R$, появляется дополнительный сдвиг фазы по сравнению с фазой кулоновского поля, так что

$$\delta_j = \delta_j^{(0)} + \delta'_j. \quad (2.14)$$

Величина δ'_j находится путём сшивания решений уравнений (2.5) на границе ядра при $r = R$.

Для электронов малых энергий из всех δ'_j играет роль практически лишь $\delta'_{1/2}$. Дополнительный сдвиг фазы $\delta'_{1/2}$ при малых энергиях определяется, как можно показать (см., например, ²²) величиной $\langle r^2 \rangle$. Таким образом, картина рассеяния электронов в точной теории, так же как и по борновскому приближению, определяется лишь одним параметром $\langle r^2 \rangle$.

При высоких энергиях играет роль несколько фаз δ'_j . Большое количество численных расчётов, выполненных в последние годы ^{3, 6, 7}, позволяет установить некоторые характерные особенности углового распределения $\sigma(\theta)$. Так, для случая равномерного распределения заряда, или почти равномерного с закруглённым краем, $\sigma(\theta)$ имеет диффракционные минимумы при некоторых определённых значениях qR . В этом отношении имеется сходство с выводами, сделанными на основании борновского приближения. Однако имеется и существенное отличие. Глубина диффракционных минимумов при рассеянии на тяжёлых ядрах по точным расчётам значительно меньше, чем по борновскому приближению (см. рис. 1). Именно здесь борновское приближение нуждается в наибольшей поправке. Поскольку глубина минимумов зависит от характера распределения заряда внутри ядра, нельзя пользоваться борновским приближением для интерпретации данных по рассеянию быстрых электронов тяжёлыми ядрами.

Остановимся теперь на тех причинах, которые вызывают различие рассмотренного выше упругого рассеяния электронов сферически-симметричным зарядом от наблюдаемого в эксперименте рассеяния электронов ядрами. К ним относится наличие электронного квадрупольного и магнитного дипольного момента у ядра. Кроме того, вследствие конечной разрешающей способности по энергиям измеряется в действительности сечение не только упругого, но и «почти упругого» рассеяния, при котором электроны теряют энергию в пределах разрешающей способности приборов. Следовательно, при сравнении теории с опытом необходимо учитывать возбуждение ядра электронами в пределах разрешающей способности и, кроме того, радиационные эффекты. Относительная роль перечисленных эффектов оценена в борновском приближении рядом авторов.

Влияние квадрупольного момента оценено Шиффом⁸. Он приводит к заключению, что усреднённый по всем ориентациям ядра квадрат формфактора $(|F|^2)_{\text{ср}}$ даже для такого сильно деформированного ядра, как Ta¹⁸¹, не меняется вблизи диффракционных минимумов сколько-нибудь существенно.

Результаты некоторых ещё не опубликованных оценок, относящихся к влиянию квадрупольного момента, приведены также в обзоре Форда и Хилла¹.

Поправка, связанная с наличием магнитного момента, играет роль при рассматриваемых энергиях лишь для лёгких ядер. Для тяжёлых ядер влиянием магнитного момента можно пренебречь.

Неупругое рассеяние электронов, сопровождаемое возбуждением ядра, исследовалось в борновском приближении Смитом⁹ на некоторых простых моделях ядра. Для тяжёлых ядер его расчёты имеют лишь иллюстративное значение. Косвенное заключение об относительно малой роли эффекта возбуждения ядра электронами в некоторых случаях можно сделать на основании экспериментальных данных.

Так, например, в одной из работ Хофштедтера с сотрудниками¹⁵ сравнивалось рассеяние ядрами Rb²⁰⁸ и Au¹⁹⁷. Первый возбуждённый уровень в ядре Rb²⁰⁸ имеет энергию 2,6 Мэв; при той разрешающей силе анализатора, которая была в опыте, можно было выделить упругое рассеяние. В ядре Au¹⁹⁷ энергия первого уровня менее 100 кэв и анализатор не мог отделить упруго-рассеянные электроны от тех, которые рассеялись неупруго, возбудив ядро. Однако кривые углового распределения для Au¹⁹⁷ и Rb²⁰⁸ почти не отличаются. Отсюда авторы заключили, что влияние неупругих процессов несущественно. Однако имеются случаи, когда процессы возбуждения ядра при рассеянии электронов играют сравнительно большую роль. Это — случаи ядер, в которых существуют ротационные уровни, связанные с коллективным движением нуклонов. Как показывают последние эксперименты Хофштедтера¹⁶, а также не опубликованные ещё теоретические оценки, упоминаемые в работе¹, при рассеянии на ядрах Ta, W, Th и U угловое распределение сильно сглажено и диффракционная структура почти не заметна.

Радикационная поправка в рассматриваемой области энергий и при высокой разрешающей силе, достигнутой в эксперименте, является несущественной. Она почти одинакова при всех углах и меняет лишь на несколько процентов величину σ (9).

Существует ещё ряд эффектов, влияние которых в рассматриваемых условиях пренебрежимо мало. К ним относятся, например, дисперсионное рассеяние электронов ядром, которое, строго говоря, должно учитываться совместно с потенциальным (эффект дисперсионного рассеяния в борновском приближении оценён Шиффом¹⁰); β — взаимодействие и др.

3. ОПЫТЫ ПО РАССЕЯНИЮ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ И ИХ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Рассеяние электронов малых энергий исследовалось в экспериментальных работах Лаймана, Хансона и Скотта¹² (энергия 15,7 Мэв, рассеяние в Cu, Ag и Au), Хаммера, Рака и Пидда¹³ (энергии 33 и 43 Мэв, рассеяние в Sn и W), а также в работе Хофштедтера, Фихтера и Мак-Интайра¹⁴ (энергия 25 Мэв, рассеяние в Au), посвящённой в основном электронам большой энергии. Интерпретация результатов первой работы дана Фишбахом и Биттером¹¹. Анализ сводится к определению дополнительного сдвига фазы $\delta''_{1/2}$ и подбору соответствующего $\langle r^2 \rangle$. Расчёты проводятся в предположении равномерно заряженного ядра с радиусом R . Из определения величины $\langle r^2 \rangle$ следует соотношение

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2. \quad (3.1)$$

R может быть названо эквивалентным радиусом. Это есть радиус такого равномерно распределённого заряда, который даёт ту же величину $\langle r^2 \rangle$, что и истинное распределение.

В таблице I приведены величины эквивалентных радиусов, полученных из анализа опытов¹² и ¹³.

Таблица I

Z	$\frac{R}{A^{1/3}} \cdot 10^{13} \text{ см}$	Z	$\frac{R}{A^{1/3}} \cdot 10^{13} \text{ см}$
29	1,0	74	1,18*)
47	1,1	79	1,2
50	1,1		
*) Неопубликованные данные, приведённые в 1.			

Рассмотрим теперь работы по рассеянию электронов большой энергии, опубликованные Хофштедтером с сотрудниками в 1953 г.¹⁴, 1954 г.¹⁵ и 1956 г.¹⁶.

В работе 1953 г. исследовалось рассеяние электронов с энергиями 125 Мэв и 150 Мэв. Разрешающая сила по энергиям составляла 1,5%. Измерялось угловое распределение (в произвольных единицах) при рассеянии ядрами Ta, Au и Pb.

Теоретическая интерпретация этих экспериментов была дана на основе борновского приближения авторами, а также Шиффом. Из факта отсутствия резких дифракционных минимумов, ожидаемых в борновском приближении для равномерного или почти равномерного распределения заряда, было выведено заключение, что плотность заряда сильно стянута к центру примерно по экспоненциальному закону.

Однако после того как в основу интерпретации был положен точный расчёт, выяснилось, что это заключение было неправильным.

В работе 1954 г. авторы внесли в установку несколько усовершенствований и улучшили разрешающую силу по энергиям. Измерялось угловое распределение при нескольких энергиях для Au^{197} и Pb^{208} . Опыты были проделаны для Au^{197} при 84, 126, 154 и 183 Мэв. Типичная кривая $\sigma(\theta)$ изображена на рис. 2. На кривой видны следы дифракционной структуры. Стрелками указаны точки, положение которых соответствует сглаженным дифракционным минимумам. Положение первых сглаженных минимумов на всех кривых приблизительно удовлетворяет соотношению

$$E \sin \frac{\theta}{2} \sim 57 \quad (E — \text{в Мэв}).$$

Для вторых сглаженных минимумов $E \sin \frac{\theta}{2} \sim 106$.

Анализ новых экспериментальных данных был проведён на основе точных расчётов Йенни и др.³. Были вычислены сечения для следующих форм распределения плотности:

экспоненциальная $\rho = \rho_0 e^{-\frac{r}{a}}$;

гауссова $\rho = \rho_0 e^{-\left(\frac{r}{b}\right)^2}$; равномерное распределение $\rho = \text{const}$; $r \leq R$;

фермиевская

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{1 + e^{K(r-B)}},$$

названная так вследствие аналогии с распределением Ферми, и некоторые другие. Расчёты проведены для энергии 125 Мэв для ядра Au^{197} при определённых значениях параметров a , b , K , B . С помощью некоторых интерполяций произведён пересчёт на другие энергии и другие значения параметров. Сравнение с экспериментом определённо указывает, что экспоненциальное и гауссово распределение не подходят. Наиболее близкое соответствие расчёта и эксперимента получается для почти равномерного распределения заряда с закруглённым краем типа, изображённого на рис. 3. Закруглённый край соответствует поверхностному слою, в котором плотность заряда спадает до нуля.

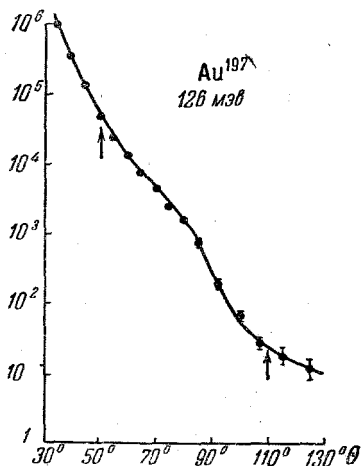


Рис. 2. Угловое распределение при рассеянии ядром ^{197}Au электронов энергии 126 Мэв. По оси ординат — произвольные единицы. Стрелки отмечают положение сглаженных минимумов.

Как показывают расчёты, в рассматриваемой области энергий точная форма края (т. е. закон спадения плотности в поверхностном слое) оказывается несущественной: важна лишь толщина поверхностного слоя.

В работе Ревенхолла и Йенни⁶ специально рассмотрено равномерное распределение заряда с закруглённым краем. Авторы вводят два параметра, характеризующих такое распределение, именно радиус

$$c = \frac{1}{\rho(0)} \int_0^{\infty} \rho(r) dr \quad (3.2)$$

и толщину поверхностного слоя s

$$s^2 = - \frac{4}{\rho(0)} \int_0^{\infty} (r - c)^2 \frac{d\rho}{dr} dr. \quad (3.3)$$

Для распределения фермиевского типа

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1 + e^{K(r-B)}} \quad (3.4)$$

величина c есть расстояние от центра ядра до середины поверхностного слоя, а s^2 пропорционально средней квадратичной толщине поверхностного слоя. С точностью до членов $\left(\frac{s}{c}\right)^4$ средний квадратичный радиус $\langle r^2 \rangle$ выражается через параметры s и c следующим образом:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} c^2 \left[\frac{1 + \frac{5}{2} \left(\frac{s}{c}\right)^2}{1 + \frac{3}{4} \left(\frac{s}{c}\right)^2} \right]. \quad (3.5)$$

Если $s/c \ll 1$, то приближённо

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} c^2. \quad (3.6)$$

В этом случае c совпадает с эквивалентным радиусом (см. (3.1)).

Оказывается, что в рассматриваемой области энергий сечение рассеяния практически полностью определяется параметрами s и c . Авторы проверили это на распределениях с различной формой закругления для ядра золота. Вплоть до углов $\sim 105^\circ$ угловые распределения для различных форм при одних и тех же s и c различаются не более чем на несколько процентов. Наилучшее согласие с экспериментом получено при значениях параметров

$$s = 1,65 \cdot 10^{-13} \text{ см}; \quad c = 6,63 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Соответствующее значение эквивалентного радиуса равно

$$R = 1,20 \cdot 10^{-13} \text{ А}^{1/3}.$$

В работе Ханна и др.¹⁶ были подвергнуты анализу угловые распределения при рассеянии ядрами Ca, V, Co, In, Sb, Au, Bi

при 153 и 183 Мэв. Анализ произведён, исходя из фермиевского распределения заряда (3.4). Для ядра золота рассмотрены также некоторые другие распределения, имеющие вид почти равномерного с закруглённым краем:

а) модифицированное гауссовское

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{(r-C)^2}{z_2}}}, \quad (3.7)$$

б) трапециoidalное

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_3; & 0 < r < C - z_3, \\ \rho &= \rho_3 \cdot \frac{C + z_3 - r}{2z_3}; & C - z_3 < r < C + z_3, \\ \rho &= 0; & r > C + z_3, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

где ρ_2 , ρ_3 , C , z_2 и z_3 — параметры, подлежащие подбору. Наилучшее соответствие рассчитанного углового распределения и экспери-

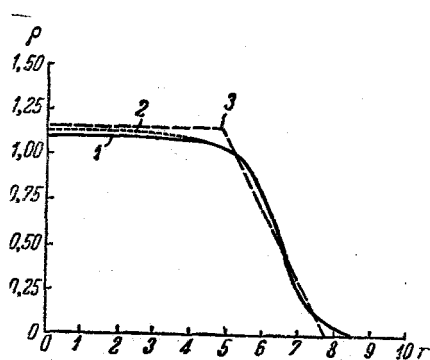


Рис. 3. Распределение заряда в ядре ${}^{197}_{79}\text{Au}$, соответствующее оптимальным параметрам. Ординаты — плотность заряда в единицах 10^{19} кулон/см³. Абсциссы — расстояние от центра в единицах 10^{-13} см.

1 — распределение Ферми, 2 — модифицированное гауссовское, 3 — трапециoidalное.

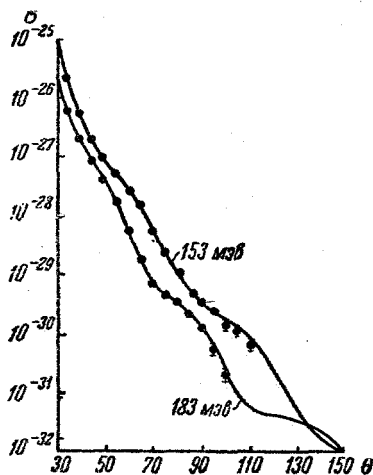


Рис. 4. Угловое распределение при рассеянии ядром ${}^{197}_{79}\text{Au}$. Сплошные кривые — расчёт при оптимальных параметрах, точки — средние из пяти измерений.

ментального для ядра Au^{197} при 183 Мэв достигается при формах распределения заряда, приведённых на рис. 3. Как видно из рисунка, распределения близки друг к другу. На рис. 4. показаны распределения для 153 и 183 Мэв при оптимальных параметрах фермиевского распределения и нанесены экспериментальные точки.

Результаты анализа для Au и других ядер представлены в виде таблицы оптимальных параметров. При этом для характеристики толщины поверхностного слоя авторы пользуются вместо s другим параметром t . Этот параметр представляет собой расстояние, на котором ρ падает от $0,9\rho(0)$ до $0,1\rho(0)$.

Оптимальные значения параметров s , t , а также эквивалентного радиуса R приведены в таблице II. Ошибка в радиальных параметрах оценена в $\pm 2\%$, в толщине слоя $\pm 10\%$.

Таблица II

Ядро	$s \cdot 10^{13}$ см	$\frac{s}{A^{1/3}} 10^{13}$ см	$\frac{R}{A^{1/3}} 10^{13}$ см	$t \cdot 10^{13}$ см
Ca ⁴⁰	3,64	1,06	1,32	2,5
V ⁵¹	3,98	1,07	1,25	2,2
Co ⁵⁹	4,09	1,05	1,27	2,5
In ¹¹⁵	5,24	1,08	1,19	2,3
Sb ¹²²	5,32	1,07	1,20	2,5
Au ¹⁹⁷	6,38	1,096	1,18	2,3
Bi ²⁰⁹	6,47	1,09	1,20	2,7

4. КУЛОНОВСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТЯЖЕЛЫХ ЯДЕР

Кулоновская энергия тяжелых ядер может быть определена, исходя из анализа масс ядер, основанного на полуэмпирической формуле для энергии ядра. Эту формулу можно представить в виде

$$E = -a_1 A + a_2 A^{2/3} + a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_4 \frac{(N-Z)^2}{4A}. \quad (4.1)$$

Третий член в правой части (4.1) представляет собой кулоновскую энергию. Постоянная a_3 зависит от вида распределения заряда в ядре ρ и от радиуса ядра. Для равномерно заряженного ядра имеет место соотношение

$$a_3 = \frac{3e^2}{5R}. \quad (4.2)$$

Вопросу об определении коэффициентов a_i , дающих наилучшее приближение (4.1) к экспериментальным данным, посвящено много работ. Последние работы, относящиеся к интересующей нас области тяжелых ядер, выполнены Гринном и Энглером¹⁷ и Гринном¹⁸.

В работе Грина и Энглера дефект массы $\Delta = M - A$ представляется в виде функции

$$\Delta = \Delta_m + J \cdot (D - D_m)^2, \quad (4.3)$$

где $D = N - Z$ — нейтронный избыток, Δ_m , D_m и J — некоторые

функции массового числа, и ставится задача определения оптимальных Δ_m , J и D_m , при которых достигается наилучшее согласие (4.3) с опытными данными.

В качестве первого, и довольно хорошего, приближения, пригодного при $A > 10$, используются функции

$$\left. \begin{aligned} \Delta_m^{(r)} &= \frac{(A-100)^2}{100} - 64 \text{ тысячных единицы массы,} \\ J^{(r)} &= \frac{25}{A}, \\ D_m^{(r)} &= \frac{0,4A^2}{A+200}, \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

затем к ним подбираются поправки и находятся оптимальные $\Delta_m^{(0)}$, $D_m^{(0)}$, $J^{(0)}$.

С другой стороны, оказывается возможным выразить Δ_m , J и D_m через коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 и a_4 в (4.1). Для этого из (4.1) определяется дефект массы, который авторы обозначают Δ^w , представив его в виде

$$\Delta^w = \frac{1}{2} (A + D) \Delta_n + \frac{1}{2} (A - D) \Delta_H - a_1 A + a_2 A^{2/3} + a_3 \frac{(A - D)^2}{4A^{1/3}} + a_4 \frac{D^2}{4A}, \quad (4.5)$$

где Δ_n и Δ_H — дефекты масс протона и нейтрона, и находится то значение D , которое удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\partial \Delta^w}{\partial D} \right)_{A = \text{const}} = 0. \quad (4.6)$$

Получается:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_m^w &= - \left[a_1 - \frac{(3\Delta_n + \Delta_H)}{4} \right] A + \frac{(a_4 + \Delta_n - \Delta_H)}{4} D_m + a_2 A^{2/3}, \\ D_m^w &= A \left[\frac{a_3}{a_4} A^{2/3} - \frac{\Delta_n - \Delta_H}{a_4} \right] \left[1 + \frac{a_3}{a_4} A^{2/3} \right], \\ J^w &= \frac{a_4}{4A} \left(1 + \frac{a_3}{a_4} A^{2/3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Процедура определения a_1 , a_2 , a_3 , a_4 сводится к подбору значений этих коэффициентов так, чтобы Δ^w , D_m^w и J^w из (4.7) были наиболее близкими к оптимальным $\Delta_m^{(0)}$, $D_m^{(0)}$ и $J^{(0)}$.

В работе Грина¹⁸ для подбора величин a_i был применен метод наименьших квадратов и найдены наилучшие статистические значения a_i . Предполагая заряд ядра распределенным равномерно, Грин с помощью формулы (4.2) определил, что $R = 1,216 \cdot A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ см. Вероятная ошибка оценена в 1%.

5. ЭФФЕКТЫ В АТОМНЫХ СПЕКТРАХ

К эффектам в атомных спектрах, связанных с конечными размерами ядра, относятся изменения величины дублетного расщепления рентгеновских термов по сравнению со значением для точечного ядра и изотопический сдвиг. Первый эффект рассмотрен в работах Шоулоу и Таунса^{19, 20}. В дублете $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$ влияние размазанности заряда ядра сказывается в основном на уровне $2P_{1/2}$. Поэтому задача сводится к рассмотрению сдвига ΔE энергии уровня $2P_{1/2}$ в поле размазанного заряда по сравнению с полем точечного.

Теория возмущений позволяет легко получить простое выражение для ΔE (см., например,²²):

$$\Delta E = \frac{4\pi Ze^2 C}{2\sigma(2\sigma + 1)} \langle r^{2\sigma} \rangle. \quad (5.1)$$

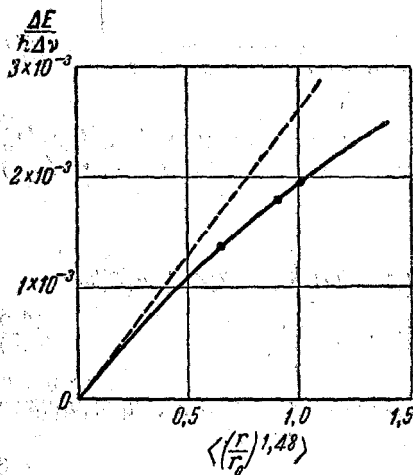
Здесь C — нормировочный коэффициент в волновой функции $2P_{1/2}$ состояния,

$$\sigma = \left[1 - \left(\frac{Z}{137} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (5.2)$$

Для $Z = 92$ имеем $2\sigma \approx 1,48$. Согласно (5.1) ΔE определяется одним ядерным параметром $\langle r^{2\sigma} \rangle$.

Однако для тяжёлых ядер теория возмущений плохо применима. Достаточно аккуратное определение ΔE в тяжёлых элементах требует довольно громоздких расчётов. Методика вычисления ΔE и результаты для некоторых Z приведены в²⁰.

Рис. 5. $\frac{\Delta E}{h\Delta\nu}$ как функция от $\langle r^{1,48} \rangle$ при $Z = 92$. Абсциссы — $\left\langle \left(\frac{r}{r_0} \right)^{1,48} \right\rangle$, где $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-13} (238)^{1/3}$ см.



Для того чтобы оценить ошибку, допускаемую при использовании теории возмущений, Шоулоу и Таунс построили график зависимости $\frac{\Delta E}{h\Delta\nu}$ от $\left\langle \left(\frac{r}{r_0} \right)^{1,48} \right\rangle$ для $Z = 92$, где $h\Delta\nu$ — величина дублетного расщепления, $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ (в данном случае взято $A = 238$) (рис. 5). Пунктиром изображена линейная зависимость, вытекающая из (5.1) по теории возмущений. Точка — значения, получаемые из численного расчёта.

В результате расчётов Шоулоу и Таунс приходят к выводу, что согласие между теорией и экспериментом в предположении равномерного распределения заряда достигается при $R = (2,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-13} A^{1/3}$. Это значение радиуса чересчур велико и указывает на то, что,

кроме эффекта размазанности заряда, играют роль и другие обстоятельства.

В поисках этих обстоятельств Шоулоу и Таунс обратили внимание на то, что величина ΔE очень сильно зависит от Z . (Вычисленные значения ΔE в районе $60 \leq Z \leq 95$ укладываются в эмпирическую формулу

$$\frac{\Delta E}{\hbar \Delta \nu} = D e^b (Z - 60),$$

где b и D — численные коэффициенты.) Такой же характерной особенностью — сильной зависимостью от Z — обладают эффекты поляризации вакуума и радиационные эффекты. Расчёт сдвига ΔE в тяжёлых элементах под действием этих эффектов представляет собой очень трудную задачу. В настоящее время для больших Z проведён лишь расчёт сдвига под действием поляризации вакуума в работе Виченна и Кролля²¹. Найденная ими величина сдвига примерно того же порядка, что и сдвиг вследствие размазанности заряда. Но знак поляризационного сдвига получается противоположный тому, который должен быть для того, чтобы привести в соответствие величину радиуса ядра с данными других опытов. Вопрос о величине сдвига под действием других квантово-электродинамических эффектов остаётся открытым. Важно отметить, однако, что радиационный сдвиг должен быть противоположен по знаку поляризационному.

Обратимся к изотопическому сдвигу. Рассмотрение этого эффекта в связи с возможностью определения радиуса ядра проведено Хиллом и Фордом²² (см. также обзор Стриганова и Донцова²).

Они отмечают, что поправки к формуле теории возмущений (5.1), которые следует сделать на основании более точных расчётов, почти не зависят от формы и радиуса ядра. Поэтому авторы считают, что с хорошей точностью можно положить:

$$\Delta E = \varphi(Z) \langle r^{2\sigma} \rangle, \quad (5.3)$$

где φ — функция только от Z , не зависящая от радиуса ядра, причём (5.3) применима как для P -, так и для S -уровней. Исходя из этой формулы, они получают изменения $\delta \Delta E$ при сравнении двух изотопов:

$$\delta \Delta E = \varphi(Z) \delta \langle r^{2\sigma} \rangle. \quad (5.4)$$

Если ρ имеет вид

$$\rho = \rho_0 f\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (5.5)$$

и f одинаково для всех ядер при данном Z , то

$$\frac{\delta \Delta E}{\Delta E} = 2\sigma \frac{\delta r_0}{r_0}. \quad (5.6)$$

Если, далее, положить, что $r_0 \sim A^{1/3}$, то $\frac{\delta r_0}{r_0} = \frac{\delta A}{3A}$ и, следовательно,

$$\delta \Delta E = \left(\frac{2\sigma}{3A}\right) \varphi(Z) \langle r^{2\sigma} \rangle. \quad (5.7)$$

Однако, как отмечают в связи с этим выводом авторы, предположение об одинаковости $f\left(\frac{r}{r_0}\right)$ для изотопов, строго говоря, не верно вследствие эффекта деформации ядра, а предположение $r_0 \sim A^{1/3}$ не точно вследствие сжимаемости ядра.

Эффект сжимаемости не может быть в настоящее время достаточно точно определён, и поэтому данные об изотопическом сдвиге не могут быть использованы для более или менее точного определения радиуса ядра. Грубые оценки сжимаемости²² приводят к значению R для прямоугольного распределения, равному

$$1,6 \cdot A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Расчёт в пренебрежении сжимаемостью для равномерно заряженного ядра даёт $R = 0,92 \cdot A^{1/3} 10^{-13} \text{ см.}$

6. РЕНТГЕНОВСКИЙ СПЕКТР μ -МЕЗОННЫХ АТОМОВ

Медленный μ -мезон, как известно, может быть захвачен на одну из «орбит» вблизи ядра и образовать на некоторое время μ -мезонный атом. Захват на K -«орбиту» посредством серии радиационных и безрадиационных переходов (эффект Оже) происходит по оценкам Ферми и Теллера²³ за $10^{-13} - 10^{-14}$ сек., тогда как время распада μ -мезона $\sim 21 \cdot 10^{-8}$ сек., а время ядерного захвата при больших $Z \approx 80$ составляет $\sim 7 \cdot 10^{-8}$ сек.

Уиллером²⁴ показано, что переходы μ -мезона при захвате, происходящие между состояниями с большими квантовыми числами, являются в основном безрадиационными, а переходы, относящиеся к состояниям с малыми квантовыми числами, происходят с испусканием рентгеновских лучей.

Поскольку для μ -мезона радиус «орбиты» приблизительно в 200 раз меньше радиуса соответствующей электронной орбиты, то на спектр рентгеновских лучей, испускаемых μ -мезонами, в тяжёлых элементах протяжённость ядерного заряда должна оказывать большое влияние.

Среди экспериментальных исследований рентгеновских лучей, испускаемых μ -мезонами, наиболее точными и систематическими являются опыты Фитча и Рейнуотера²⁵, в которых энергия рентгеновских лучей определялась с точностью 1%.

В таблице III приведены энергии перехода $2P - 1S$ в разных веществах. Там же для сравнения приведены теоретически рассчитанные энергии переходов для точечного ядра.

Теоретическая интерпретация опытов по μ -мезонным рентгеновским лучам дана в работах Фитча и Рейнуотера²⁵, Купера и Хенли²⁶, Уиллера²⁷, Хилла и Форда²⁸.

Как показывают оценки, при больших Z основным эффектом, вызывающим смещение уровней энергии μ -мезона относительно

значений для точечного ядра, является размазанность заряда. Задача сводится, таким образом, к решению уравнения Дирака для μ -мезона в поле ядра с размазанным зарядом.

Таблица III

Z	Измеренная энергия перехода в Мэв $2P - 1S$	Рассчитанная энергия перехода для точечного ядра	
		$2P_{3/2} - 1S$	$2P_{1/2} - 1S$
13	0,36	0,3631	0,3628
14	0,41	0,4213	0,4209
22	0,955	1,0455	0,0432
29	1,55	1,8277	1,8208
30	1,60	1,9579	1,9500
51	3,50	5,8331	5,7627
80	5,80	15,508	15,011
82	6,02	16,414	15,857
83	6,02	16,880	16,291

Фитч и Рейнуотер определили, исходя из модели равномерного распределения, радиусы некоторых ядер, при которых вычисленное значение энергии $2P - 1S$ перехода совпадает с измеренным. Результаты приведены в таблице IV.

Таблица IV

Z	$\frac{R}{A} 10^{13} \text{ см}$
22	1,17
29	1,21
51	1,22
82	1,17

Подробные расчёты для ядра $\text{Pb } 208$ выполнены Хиллом и Фордом. Они поставили себе задачей рассчитать для различных законов распределения ядерного заряда ρ уровни энергии $1S$, $2S$, $2P$ и $3D$ и подобрать параметры в аналитических выражениях ρ так, чтобы разность уровней $2P_{3/2} - 1S$ соответствовала экспериментально найденной величине 6,02 Мэв. Представив плотность ρ в виде

$$\rho = \rho_0 f(x), \quad (6.1)$$

где $x = \frac{r}{r_0}$, а r_0 — параметр, характеризующий протяжённость заряда, Хилл и Форд рассмотрели много семейств $f(x)$, форма которых менялась от экспоненциальной до прямоугольной.

Численно интегрировалось уравнение Дирака для уровней $1S$, $2S$, $2P_{1/2}$, $2P_{3/2}$. Для уровней $3D_{3/2}$ и $3D_{5/2}$ сдвиг (относительно положений для точечного ядра) был определён по теории возмущений. Кроме того, Хилл и Форд в своих расчётах учли поправки, возникающие за счёт следующих эффектов.

1) Поляризация вакуума. Для легких ядер этот эффект вносит гораздо больший вклад в смещение уровней, чем конечный размер ядра. Для тяжёлых ядер, наоборот, это — малая поправка. Оценка поляризационной поправки для нескольких уровней в поле ядра Pb дана Хиллом и Фордом.

2) Другие радиационные эффекты оцениваются Хиллом и Фордом по аналогии с расчётом радиационного сдвига для водорода.

3) Дискретность ядерного заряда. Этот эффект был рассмотрен Купером и Хенли. Для оценки его они рассчитали взаимодействие μ -мезона с протонной решёткой, в которой протоны расположены симметрично по сферическим слоям. Число протонов в слое и расстояние между слоями выбраны так, что изменение потенциала вдоль радиуса не даёт никакого сдвига уровней энергии по сравнению с положением их для равномерного распределения сплошного заряда. По оценке Купера и Хенли для ядра Pb сдвиг уровней, вызванный дискретностью заряда, в такой модели составляет не более 0,1%.

4) Поляризация ядра μ -мезоном. Этот эффект был также рассмотрен Купером и Хенли. Исходя из модели равномерно заряженного ядра, они оценили добавку к энергии μ -мезона в состоянии $1S$ во втором приближении теории возмущений. Не входя в детали вычислений, приведём результат. Сдвиг $1S$ -уровня за счёт поляризации ядра свинца составляет по максимальной оценке: для Pb^{207} — 3,7% от энергии перехода $2P - 1S$, для Pb^{208} — 2,7%.

5) Неточность определения массы μ -мезона. Соответствующая поправка оценивалась Хиллом и Фордом, а также Купером и Хенли. Последние указывают, что увеличение массы μ -мезона на 5% увеличивает вычисленную энергию перехода $2P - 1S$ в свинце на 0,2%.

Сводка поправок с указанием верхнего предела возможных ошибок для перехода $2P - 1S$ дана в таблице V.

Таблица V

	Эффект	Поправка в кэВ для перехода $2P - 1S$
1	Поляризация вакуума	32 ± 8
2	Другие радиационные эффекты	$- 2 \pm 3$
3	Поляризация ядра	45 ± 40
4	Неточность определения массы μ -мезона $\pm 1 m$	0 ± 5
5	Дискретность ядерного заряда	0 ± 10
	Полная поправка . . .	75 ± 65

Как видно из таблицы V, наблюдаемому значению энергии перехода $2P - 1S$, равному $6,02 \text{ Мэв}$, соответствует величина $5,95 \pm 0,7 \text{ Мэв}$, связанная собственно с эффектом конечности. Кроме этих поправок, существует также ряд других, которые не принимались во внимание в расчётах Хилла и Форда либо потому, что они вообще слишком малы, либо потому, что отсутствуют в силу особенностей ядра Pb^{208} . К первым относятся: экранировка атомными электронами; неэлектромагнитное взаимодействие μ -мезона с ядром и т. п. Ко вторым относится поправка, связанная с квадрупольным моментом ядра.

Рассмотрим теперь некоторые результаты расчётов Хилла и Форда. На рис. 6 приведена зависимость энергий от радиуса ядра для равномерного распределения. Как и следовало ожидать, сильнее всего зависит от радиуса ядра энергия уровня $1S$.

На рис. 7 изображены зависимость от радиуса ядра (для равномерного распределения) энергий переходов $2P_{3/2} - 1S$, $2P_{3/2} - 1S$, $2S - 2P_{3/2}$ и $2S - 2P_{3/2}$ и дублетное расщепление $2P_{3/2} - 2P_{1/2}$.

Энергии перехода $2P_{3/2} - 1S$, равной 6 Мэв , соответствует для равномерно заряженного ядра $R = 1,17 A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ см}$.

Существенно отметить, что при фиксированной энергии перехода $2P_{3/2} - 1S$ энергии других переходов довольно заметно меняются в зависимости от изменения формы $f(x)$.

В качестве одного из примеров рассмотрено семейство $f(x)$ вида

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x}. \quad (6.2)$$

При изменении n от 0 до ∞ семейство f_n меняется от экспоненциального до прямоугольного. Выбирая параметры r_0 и ρ так, чтобы энергия перехода $2P_{3/2} - 1S$ была фиксированной, и меняя n , можно изучить зависимость энергий других переходов от формы f .

На рис. 8 изображено изменение энергий переходов $2S - 2P_{3/2}$, $2S - 2P_{3/2}$ и дублетного расщепления $2P_{3/2} - 2P_{1/2}$ при неизменной энергии $2P_{3/2} - 1S$. Энергия $2P_{3/2} - 1S$ меняется на 15% при изменении от 0 до ∞ .

Следовательно, на основании данных об энергиях других переходов, кроме $2P_{3/2} - 1S$, можно сделать заключение не только о величине радиуса ядра, но и о форме распределения заряда. Однако таких данных в настоящее время ещё нет.

В заключение в таблице VI на стр. 411 мы приведём сводку значений радиуса тяжёлых ядер в районе Pb , определённых из различных источников.

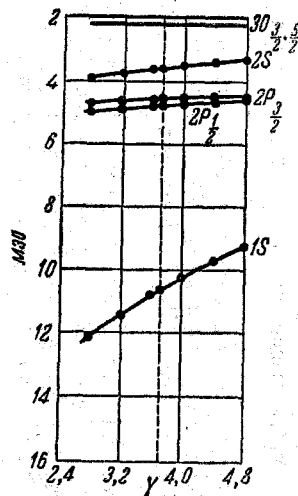


Рис. 6. Зависимость уровней энергии μ -мезона в поле равномерно заряженного ядра Rb от радиуса ядра. Ординаты — энергия в Мэв. Абсциссы — радиус в единицах $\pi = 1,87 \cdot 10^{-13}$ см.

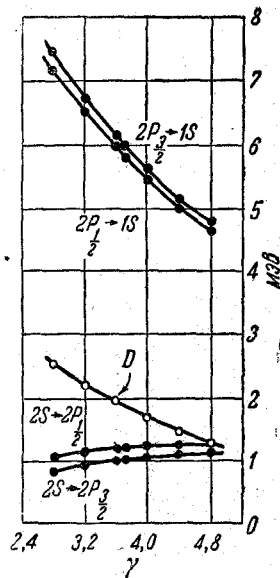


Рис. 7. Зависимость энергий переходов $2P-1S$, $2P-2S$ и дублетного расщепления от радиуса равномерно заряженного ядра. Ординаты — энергия в Мэв. Абсциссы — радиус в единицах $\lambda = 1,87 \cdot 10^{-13}$ см, D — дублетное расщепление $2P_{3/2} - 2P_{1/2}$, увеличенное в 10 раз.

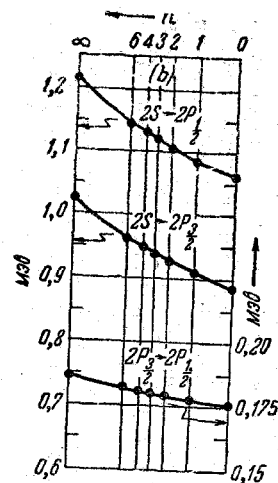


Рис. 8. Зависимость энергий переходов $2S-2P_{1/2}$, $2S-2P_{3/2}$ и дублетного расщепления $2P_{3/2}-2P_{1/2}$ от формы плотности заряда $f(x)$ при фиксированной энергии перехода $2P_{3/2}-1S$ 6,00 Мэв. Ординаты — энергия в Мэв. Левая шкала — для переходов $2S-1P$. Правая шкала — для дублетного расщепления. Абсциссы — параметр n . $n = \infty$ соответствует прямоугольному распределению, $n = 1$ — экспоненциальному.

Таблица VI

Эффект	Величина	$\frac{R}{A^{1/3}} 10^{12} \text{ см}$
Рассеяние электронов малой энергии	$R = \left(\frac{5}{3} \langle r^2 \rangle \right)^{1/2}$	1,18—1,20
Рассеяние электронов большой энергии	$R = \left(\frac{5}{3} \langle r^2 \rangle \right)^{1/2}$	1,20
Кулоновская энергия	R в предположении равномерного распределения заряда	1,216
μ -мезонные рентгеновские лучи	R в предположении равномерного распределения заряда	1,17

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. ОБЗОРЫ

1. D. Hill a. K. Ford, Ann. Rev. of Nuclear Sci. 3, 25 (1955).
2. Стриганов и Донцов, УФН 55, 315 (1955).

II. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ

а) Теория и расчеты

3. D. Jennie, D. Ravenhall, R. Wilson. Phys. Rev. 95 291 (1954).
(Там же ссылки на некоторые более ранние работы, не упомянутые здесь.)
4. H. Feshbach, Phys. Rev. 88, 295 (1953).
5. G. Parzen, T. Wainwright, Phys. Rev. 96, 188 (1954).
6. D. Ravenhall, D. Jennie, Phys. Rev. 93, 239 (1954).
7. G. Brown, L. Elton, Phil. Mag. 46, 164 (1955).
8. L. Schiff, Phys. Rev. 92, 987 (1953).
9. I. Smith, Phys. Rev. 95, 271 (1954).
10. L. Schiff, Phys. Rev. 93, 756 (1955).
11. F. Bitter, H. Feshbach, Phys. Rev. 92, 837 (1953).

б) Эксперимент

12. Lyman, Hanson a. Scott, Phys. Rev. 84, 626 (1951).
13. Hammer, Raka, Pidd, Phys. Rev. 90, 341 (1953).
14. R. Hofstadter, H. Fechter, I. McIntyre, Phys. Rev. 92, 978 (1953).
15. R. Hofstadter, B. Hahn, A. Knudsen, I. McIntyre, Phys. Rev. 95, 512 (1954).
16. B. Hahn, D. Ravenhall, R. Hofstadter, Phys. Rev. 101, 1131 (1956).

III. КУЛОНОВСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТЯЖЁЛЫХ ЯДЕР

17. A. Green, N. Engler, Phys. Rev. **91**, 40 (1953).
18. A. Green, Phys. Rev. **95**, 1006 (1954).

IV. ЭФФЕКТЫ В АТОМНЫХ СПЕКТРАХ

19. A. Schawlow, G. Townes, Science **115**, 284 (1952).
20. A. Schawlow, G. Townes, Phys. Rev. **100**, 1273 (1955).
21. Whichmann, Kroll, Phys. Rev. **101**, 843 (1956).
22. D. Hill, K. Ford, Phys. Rev. **94**, 1630 (1954).

V. μ -МЕЗОННЫЕ РЕНТГЕНОВСКИЕ ЛУЧИ

23. E. Fermi, E. Teller, Phys. Rev. **72**, 399 (1947).
 24. J. Wheeler, Rev. Mod. Phys. **21**, 133 (1949).
 25. V. Fitch, I. Rainwater, Phys. Rev. **92**, 789 (1953).
 26. L. Cooper, E. Henley, Phys. Rev. **92**, 801 (1953).
 27. Wheeler, Phys. Rev. **92**, 812 (1953).
 28. D. Hill, K. Ford, Phys. Rev. **94**, 1630 (1954).
-