

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**О РАБОТАХ ПЬЕРА КЮРИ В ОБЛАСТИ СИММЕТРИИ****А. В. Шубников**

Пьер Кюри известен в широких кругах научных работников как автор замечательных работ в области радиоактивности и почти совсем не известен как автор глубоких исследований в области симметрии и её приложений в физике. Между тем эти исследования, если бы они были продолжены Пьером Кюри, могли бы, вероятно, иметь для развития естествознания в целом немногим меньшее значение, чем работы по радиоактивности для развития физики и химии. По свидетельству Марии Кюри сам Пьер Кюри неоднократно высказывал сожаление о том, что исследования по радиоактивности увели его в сторону от исследований в области симметрии.

Для работ Пьера Кюри по симметрии, как, впрочем, и для всех его работ, характерна чрезвычайная краткость их изложения. В полном собрании сочинений Пьера Кюри, куда входит 61 его работа и довольно большая вводная статья Марии Кюри, содержится около 610 страниц. Это означает, что, в среднем, на одну работу Пьера Кюри приходится менее десяти страниц. Следует отметить, однако, что если указанная сжатость изложения несколько не затрудняет чтения большинства работ Пьера Кюри, этого нельзя сказать об его исследованиях по симметрии. Возможно, что именно это обстоятельство было причиной того, что они не были достаточно поняты и оценены физиками.

В одной из своих работ по симметрии Пьер Кюри пишет: «Я думаю, что в изучение физических явлений представляло бы интерес ввести соображения симметрии, столь привычные для кристаллографов». «Физики часто пользуются условиями, вытекающими из симметрии, но обычно пренебрегают точным определением симметрии явления, потому что достаточно часто эти условия оказываются простыми и а priori почти очевидными».

Это замечание Пьера Кюри, сделанное им 62 года тому назад полностью сохраняет свою силу и до сих пор. Об этом свидетельствует хотя бы то, что почти во всех современных учебниках физики мы встречаем термин «осевая симметрия», который считается

не требующим никаких разъяснений; между тем «осевых симметрий», т. е. групп симметрии, содержащих единственную ось бесконечного порядка, существует не одна, а пять различных. Мы должны остановиться на этом вопросе более подробно.

Пьер Кюри был первым, кто выделил как особо важные для физики те группы симметрии, которые мы теперь называем предельными точечными группами симметрии. Всего таких групп существует семь. Они легко запоминаются по простейшим образцовым фигурам, обладающим соответствующей симметрией (рис. 1). Первая

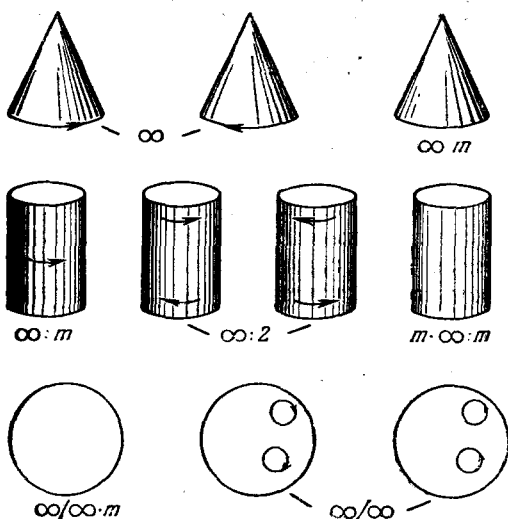


Рис. 1. Семь точечных предельных групп симметрии, представленных образцовыми фигурами.

группа (∞) не имеет никаких элементов симметрии, кроме оси бесконечного порядка; это — группа вращающегося конуса. Она допускает существование энантиоморфных (правых и левых) форм: конус, вращающийся вправо, и конус, вращающийся влево. Вторая группа ($\infty \cdot m$), кроме оси бесконечного порядка, имеет только бесконечное множество продольных плоскостей симметрии. Это — группа покоящегося конуса, не допускающая существования энантиоморфных форм. Третья группа ($\infty : m$) имеет только следующие элементы симметрии: ось бесконечного порядка, одну поперечную плоскость симметрии и центр симметрии. Это — группа вращающегося цилиндра. Важно отметить, что эта группа, как и предыдущая, не допускает существования энантиоморфных форм. Это означает, что цилиндр, вращающийся вправо, не отличается от цилиндра, вращающегося влево, в отношении правизны и левизны: один может быть

совмещён (при перевёртывании) с другим простым наложением без отражения в плоскости. Четвёртая группа ($\infty:2$) имеет только ось бесконечного порядка и бесконечное множество поперечных осей симметрии второго порядка. Это — группа скрученного цилиндра. Она допускает существование энантиоморфных форм (правый и левый винты). Пятая группа ($m \cdot \infty : m$) содержит только ось бесконечного порядка, бесконечное множество продольных и одну поперечную плоскости симметрии, а также бесконечное множество поперечных осей второго порядка и центр симметрии. Это — группа покоящегося цилиндра, не допускающая существования энантиоморфных форм.

Перечисленными группами как раз и исчерпываются те группы симметрии, которые без детального их различения часто именуются «осевой симметрией». Кроме них, существуют ещё две предельные группы — шестая и седьмая. Шестая группа $\infty/\infty \cdot m$ — это группа симметрии обыкновенного шара, содержащая в себе бесконечное множество осей бесконечного порядка, бесконечное множество плоскостей симметрии и центр симметрии. Эта группа не допускает существования энантиоморфных фигур. Седьмая группа ∞/∞ — это группа симметрии шара без плоскостей и центра симметрии, но с бесконечным множеством осей бесконечного порядка. Эта группа допускает существование энантиоморфных — правых и левых — шаров. Можно (формально) считать, что в правом шаре все его диаметры скручены по правому винту, в левом — по левому винту.

Пользуясь предельными группами симметрии, Пьер Кюри впервые установил один из наиболее существенных признаков отличия электрического поля от магнитного и на этой основе до конца разъяснил, почему, в противоположность положительным и отрицательным электрическим зарядам, северный магнетизм не может быть отделён от южного. Суть дела заключается в том, что цилиндрический магнит вместе с окружающим его магнитным полем имеет симметрию ($\infty:m$) вращающегося цилиндра, тогда как электрический аналог магнита — вольтов столб или цилиндрический диэлектрик, поляризованный вдоль своей оси, имеют симметрию ($\infty \cdot m$) покоящегося конуса. Это означает, что магнит, в соответствии с представлением о существовании в нём амперовых токов (вращающихся электронов), имеет поперечную и не имеет продольных плоскостей симметрии, тогда как вольтов столб, наоборот, имеет бесконечное количество продольных плоскостей симметрии и не имеет поперечной. Это означает также, что амперовы токи на северном и южном полюсах магнита текут в одном направлении, которое мы называем либо направлением по часовой стрелке, либо направлением против часовой стрелки в зависимости от того, смотрим ли мы на магнит со стороны южного или северного полюса. Невозможность отделения северного магнетизма («магнитной массы») от южного как раз и означает невозможность раздельного существования правого и левого вращения, поскольку всякое вращение является одновременно и правым и левым.

В учении о симметрии мы называем равными такие части симметричной фигуры, которые преобразуются друг в друга операциями симметрии. При этом нам приходится различать два вида равенства: равенство совместимое и равенство зеркальное. Возможно, конечно, и такое равенство, которое одновременно является и совместимым, и зеркальным. Полюса магнита друг другу равны, поскольку один преобразуется в другой отражением в поперечной плоскости симметрии; но это равенство является чисто зеркальным, так как указанное преобразование осуществляется только операцией второго рода, т. е. операцией, содержащей отражение: в данном случае отражением в поперечной плоскости симметрии или инверсией (отражением в центре). Значит, северный полюс отличается от южного только в отношении правизны и левизны, т. е. не более чем правая рука от левой. Иначе обстоит дело с электрическими полюсами вольтова столба. Они не преобразуются друг в друга никакими операциями симметрии этого объекта; они не равны друг другу. В этом — существенная разница между магнитной и электрической полярностью. Заслугой Пьера Кюри является то, что он эту разницу осознал впервые и до конца.

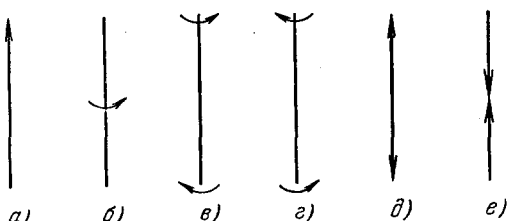


Рис. 2. Примеры направленных величин: *a* — полярный вектор (напряжённость электрического поля); *б* — аксиальный вектор (напряжённость магнитного поля); *в*, *г* — аксиальный тензор (величина левого и правого удельного вращения плоскости поляризации); *д*, *е* — полярный тензор (растягивающее и сжимающее напряжение).

Здесь уместно было бы сделать следующее отступление. Нам кажется, что одной из основных задач всякой науки является, коротко говоря, сравнивать несравнимое и различать неразличимое, т. е. находить существенные признаки сходства и различия там, где ранее они не были заметны. До Пьера Кюри физики интересовались больше признаками сходства нежели признаками отличия между электрическим и магнитным полями, находя себе в этом деле поддержку со стороны математиков. Это можно видеть хотя бы из того, что векторы напряжённости электрического и магнитного полей изображались и, странным образом, продолжают изображаться до сих пор одинаковым способом — прямолинейной стрелкой (рис. 2, *a*), несмотря на то, что электрический вектор является полярным — и для него

такое изображение правильно отображает его симметрию, — а магнитный вектор является аксиальным — и для него такое изображение неправильно отображает его симметрию: прямолинейная стрелка не имеет той поперечной плоскости симметрии, которую имеет всякий аксиальный вектор. Изображением аксиального вектора, правильно отображающим его симметрию, очевидно, мог бы быть отрезок прямой, имеющий длину, пропорциональную величине вектора, и круговую стрелку, указывающую направление вращения, приписываемое этому вектору (рис. 2,б). Как видим, Пьер Кюри действительно опередил своих современников, обнаружив в магнитном и электрическом полях такой существенный признак их различия, как различие в отношении симметрии, другими не замеченное.

В развитии разных наук мы часто наблюдаем возврат к старым идеям на новой основе и зарождение новых идей на старой основе. Это имеет прямое отношение к рассматриваемому нами вопросу о симметрии полярных и аксиальных векторов. Обнаруженная Пьером Кюри разница между полярным и аксиальным векторами, заключающаяся в том, что аксиальный вектор имеет, а полярный не имеет поперечной плоскости симметрии, в настоящее время смягчается введением в учение о симметрии понятия противоположного равенства и, соответственно, понятия антисимметрических преобразований и элементов антисимметрии. Используя эти понятия, мы приходим к заключению, что полярный вектор, изображаемый прямолинейной стрелкой, имеет поперечную плоскость антисимметрии, которая обладает тем свойством, что прямолинейная стрелка после отражения в этой плоскости, сопутствуемого переменной знака фигуры (замены положительного знака конца вектора на отрицательный и отрицательного на положительный), преобразуется в себя (совмещается с собой).

Когда студент-физик впервые знакомится с предельными группами симметрии, наибольшее недоумение с его стороны встречает группа симметрии шара без плоскостей симметрии, обозначаемая нами символом ∞/∞ . Совершенно невероятным кажется, что такие шары могут где-то встретиться. Наш обзор результатов работ Пьера Кюри в области учения о симметрии не достиг бы цели, если бы мы не воспользовались здесь случаем, чтобы ответить на этот вопрос. Для этого нам необходимо вспомнить, что представляет собою хорошо известная величина удельного вращения плоскости поляризации. Прежде всего должно отметить, что эта величина является величиной направленной; в кристаллах она изменяет своё значение с изменением направления. Так как с этой величиной мы связываем представление о некотором вращении, то сначала естественно возникает мысль причислить её к аксиальным векторам, имеющим симметрию $(\infty:m)$ вращающегося цилиндра. Нетрудно видеть, однако, что такое решение вопроса было бы неправильным. Это следует из того, что величина удельного вращения не изменяет своего «знака» при

изменении направления вперёд на направление назад, т. е. правое вращение остаётся правым, левое левым (это не относится к магнитному вращению плоскости поляризации). Это означает, что удельное вращение является не вектором, а тензором и притом аксиальным тензором, имеющим симметрию ($\infty:2$) цилиндра, закрученного по правому или левому винту. Такую величину удобно изображать отрезком прямой с двумя круговыми стрелками (рис. 2, в, г), направленными в одну сторону с точки зрения наблюдателя, смотрящего на эти стрелки по очереди с одного и другого конца отрезка, т. е. так, как фактически изучается явление вращения плоскости поляризации. В изотропных средах, вращающих плоскость поляризации, например, в водном растворе сахара, удельное вращение по всем направлениям одинаково, т. е. индикатриса вращения (гирационная поверхность) таких сред является шаром, который, очевидно, не имеет плоскостей симметрии и может быть то правым, то левым в зависимости от характера вращения.

Пьер Кюри не был единственным из учёных, понимавших, что свойством симметрии могут обладать не только кристаллы и другие вещественные объекты, но и физические поля, а также и физические явления. Важно то, что это понимание было у Пьера Кюри более глубоким, чем у кого бы то ни было из его современников, и что размышления Пьера Кюри о симметрии кристаллов и происходящих в них явлений привели его к важным обобщениям, о которых речь будет далее. Касаясь этого вопроса, Мария Кюри пишет в своих воспоминаниях о Пьере Кюри, что открытие братьями Кюри пьезоэлектрической поляризации «отноюдь не является случайным. Оно возникло в результате размышления о симметрии окристаллизованной материи, которое позволило братьям предвидеть возможность этой поляризации».

Переходим к общим принципам симметрии, изложенным Пьером Кюри в его замечательной работе «О симметрии в физических явлениях».

Эта работа начинается со следующих выделенных курсивом строк.

«Характеристическая для того или иного явления симметрия есть максимальная симметрия среды, совместимая с существованием явления».

«Явление может существовать в среде, которая обладает либо характеристической симметрией, либо одной из её подгрупп».

«Иначе говоря, некоторые элементы симметрии среды могут существовать с явлением, но они не являются обязательными. Обязательным является лишь отсутствие некоторых элементов симметрии. Это она — диссимметрия — творит явления».

Приведём несколько примеров из кристаллофизики, разъясняющих смысл этих положений Пьера Кюри.

Возьмём кристалл турмалина, который, как известно, обладает симметрией ($3 \cdot m$) (одна ось третьего порядка и три пересекающиеся

по ней, продольные, плоскости симметрии). Известно также, что турмалин при равномерном нагревании электрически поляризуется, т. е. в нём возникает однородное электрическое поле, направленное вдоль оси (пироэлектрический эффект). Мы уже видели выше, что однородное электрическое поле в каждой своей точке обладает симметрией ($\infty \cdot m$). В рассматриваемом примере «средой», в которой возникает пироэффект, является турмалин. Однако турмалин не является единственной средой, обладающей этим свойством: пироэффект возможен также и в других средах (кристаллах и текстурах), если по симметрии они принадлежат либо к группе $\infty \cdot m$, либо к одной из подгрупп ($1, 2, 3 \dots m, 2 \cdot m, 3 \cdot m, \dots$), этой группы «максимальной симметрии». Общим свойством всех этих групп является то, что в них «отсутствуют» определённые элементы симметрии: центр симметрии, поперечная плоскость симметрии и бесконечное множество осей симметрии (простых и зеркальных), расположенных перпендикулярно и косо по отношению к существующей оси. Совокупность этих отсутствующих элементов симметрии и составляет то, что Пьер Кюри называет «диссимметрией». Подводя итог, мы можем поэтому сказать, что пироэффект возможен во всех средах, обладающих указанной диссимметрией. Она и «творит явление».

Термин «диссимметрия» имеет широкое распространение в кристаллографической, химической и физической литературе. Впервые он был, повидимому, введён в науку Л. Пастером, который под диссимметрией разумел свойство определённых фигур не совмещаться простым наложением со своим зеркальным изображением. Примером таких фигур может служить фигура руки человека: известно, что фигура правой руки не может быть совмещена простым наложением со своим зеркальным изображением, т. е. с фигурой левой руки. В настоящее время мы можем определить диссимметрию Л. Пастера как отсутствие в фигуре элементов симметрии второго рода; им отвечают операции симметрии, эквивалентные нечётному числу отражений в плоскостях (простое отражение в одной плоскости, инверсия, зеркальные повороты, скользящее отражение). Понятие диссимметрии у Пьера Кюри шире. Под диссимметрией он понимает просто совокупность всех элементов симметрии, отсутствующих в фигуре. Очень важно отметить следующее существенное различие между симметрией (совокупностью присутствующих элементов симметрии) и диссимметрией (совокупностью отсутствующих элементов симметрии). Известно, что полная совокупность операций симметрий, отвечающих всем присутствующим в фигуре элементам симметрии, образует группу в математическом смысле. Это означает, что произведение любых двух операций группы эквивалентно по результату какой-либо одной операции той же группы. В противоположность этому полная совокупность операций симметрии, отвечающих всем отсутствующим в фигуре элементам симметрии, не образует группы в математическом смысле. По Пьеру Кюри, для предсказания новых явлений,

диссимметрия более существенна чем симметрия. Поскольку, однако, замечает он, число отсутствующих элементов симметрии всегда бесконечно велико, проще перечислять элементы симметрии (присутствующие), чем элементы диссимметрии (отсутствующие элементы симметрии).

В широких научных кругах диссимметрию — идёт ли речь о диссимметрии Л. Пастера или о диссимметрии Пьера Кюри — часто смешивают с асимметрией, т. е. полным отсутствием симметрии. Асимметрия, очевидно, является лишь частным случаем диссимметрии. Диссимметрию смешивают иногда и с а н т и с и м м е т р и е й — противоположной симметрией, описываемой специальными группами четырёхмерной симметрии.

Развивая свои основные положения, цитированные нами выше, Пьер Кюри приходит к следующему чрезвычайно важному выводу:

«Когда несколько различных явлений природы накладываются друг на друга, образуя одну систему, диссимметрии их складываются. В результате остаются лишь те элементы симметрии, которые являются общими для каждого явления, взятого отдельно».

Это положение Пьера Кюри является далеко не тривиальным распространением на физические явления тривиальной для геометрических фигур истины, заключающейся в том, что при соединении двух (или многих) не равных друг другу симметричных составляющих фигур в одну составную, в последней остаются лишь те элементы симметрии, которые являются общими для всех составляющих фигур при заданном способе их размещения в пространстве. Допустим, например, что нам дан куб и конус, расположенные относительно друг друга так, что ось ко-

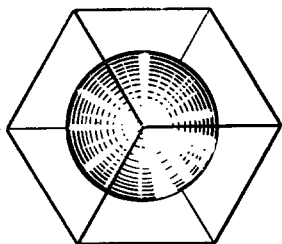


Рис. 3. Сложная фигура, составленная из куба и конуса.

нуса совпадает с диагональю куба (рис. 3). Непосредственно видно, что составная фигура обладает симметрией ($3 \cdot m$) (одна ось третьего порядка и три продольные плоскости симметрии). Легко усмотреть, что эти элементы симметрии содержатся и в кубе, и в конусе. Легко видеть также, что отсутствующие в кубе и в конусе элементы симметрии будут отсутствовать и в составной фигуре: диссимметрия составной фигуры выше; она складывается из диссимметрий составляющих фигур.

Утверждаемая Пьером Кюри возможность перенесения этой геометрической истины на физические явления означает возможность изображения физических явлений фигурам и, в частности, такими материальными фигурами, которыми мы, кроме чисто геометрических, приписываем также и некоторые физические свойства. С примерами таких фигур мы уже встречались; это — вращающийся ци-

линдр, изображающий магнитное поле или магнитную поляризацию вещества, скрученный цилиндр, изображающий вращение плоскости поляризации в кристаллах и т. д.

Приведём несколько простых примеров применения рассматриваемого положения Пьера Кюри.

Представим себе поток воды, текущий по каналу в направлении, указанном на рис. 4 прямолинейной стрелкой. В воду погружён цилиндр, вращающийся вправо (по часовой стрелке) вокруг неподвижной оси, нормальной к поверхности воды. Легко видеть, что в этих условиях половина боковой поверхности цилиндра движется по течению воды, ускоряя его; другая половина движется против течения, замедляя его. В результате уровень воды у одного берега прибывает (+), у другого убывает (—). Эта диссимметрия возникает в результате сложения диссимметрий прямолинейной и

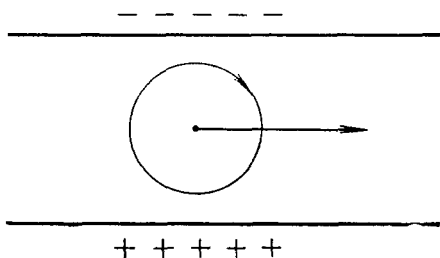


Рис. 4. Чертёж для объяснения явления Холла.

круговой стрелок, вследствие чего остаётся лишь один общий им элемент симметрии — плоскость симметрии, параллельная поверхности воды. В фигурах же, обладающих только одной плоскостью симметрии (таких, как фигура человека), все направления, параллельные плоскости симметрии (такие, как вверх и вниз, вперёд и назад, но не вправо и влево к фигуре человека), полярны, т. е. их концы не одинаковы между собой. Описанное механическое явление в точности отвечает эффекту Холла в электродинамике. Если постоянный электрический ток пропускать по тонкой металлической пластинке, расположенной между полюсами магнита, то на краях пластинки возникает разность потенциалов. Магнитное поле имеет симметрию вращающегося цилиндра, электрическое поле — симметрию прямолинейной стрелки (конуса). Комбинация обеих фигур имеет всего одну плоскость симметрии, общую и круговой, и прямолинейной стрелкам.

В научных кругах большей известностью, нежели только что рассмотренный принцип суперпозиции симметрий, пользуются (без должного их понимания) три принципа симметрии Пьера Кюри, коими устанавливается связь между симметрией причины и следствия. Эту известность они получили, как нам кажется, благодаря тому, что в опубликованных Марией Кюри воспоминаниях о муже они выделены курсивом и занумерованы как наиболее важные. Сам Пьер Кюри, как уже упоминалось выше, курсивом их не выделяет и не нумерует.

Вот эти принципы:

1. «Когда определённые причины порождают известные следствия, элементы симметрии причины должны содержаться в порождённых следствиях».

2. «Когда известные следствия обнаруживают известную диссимметрию, эта последняя должна содержаться и в причинах, породивших эти следствия».

3. «Положения, обратные двум предыдущим, неправильны, по крайней мере, на практике, т. е. следствия могут быть симметричнее вызывающих их причин».

Трудность понимания этих принципов заключается в неясности, что в конкретных случаях следует понимать под «причиной» и «следствием» и что следует разуметь под их «симметрией» и «диссимметрией».

Мы можем дать здесь следующее истолкование этих принципов, сводя их к одному принципу суперпозиции симметрий.

Допустим, что к кубику каменной соли приложено сжимающее напряжение t_{33} , направленное вдоль одной из осей четвёртого порядка этого кристалла (рис. 5). Спрашивается, какую симметрию должен при этих условиях приобрести кристалл?

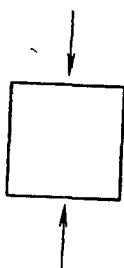


Рис. 5.
Сжатие кубика каменной соли.

Условимся за «причину» принимать все исходные данные, т. е. заданное, но пока ещё никуда не приложенное напряжение t_{33} и заданный, но пока ещё не напряжённый и не деформированный кристалл, а за «следствие» то, что спрашивается, т. е. деформированный и напряжённый кристалл. Тензор сжимающего напряжения мы привыкли изображать противоположно направленными прямолинейными стрелками (рис. 2, e). Такая пара стрелок имеет симметрию покоящегося цилиндра ($m \cdot \infty : m$) (одна ось бесконечного порядка, одна поперечная и множество продольных плоскостей симметрии, множество поперечных осей второго порядка и центр симметрии). Можно доказать, что ту же симметрию имеет и величина тензора

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix},$$

которым описывается указанное напряжение. Это следует из того, что все девять компонент рассматриваемого тензора преобразуются в себя всеми операциями симметрии указанной группы и никакими другими. Мы делаем отсюда заключение, что симметрия напряжения и симметрия тензора напряжения — это одно и то же. Таким образом, при применении принципов Пьера Кюри можно и должно за

симметрию свойств и явлений принимать симметрию тех величин (тензоров различного ранга) или тех фигур, коими они (свойства и явления) описываются.

В нашем случае симметрия причины складывается из симметрии ($m \cdot \infty : m$) напряжения и симметрии (6/4) каменной соли (симметрии простого куба). Высшей подгруппой обеих этих групп (в предположении, что все элементы симметрии их пересекаются в одной точке) является группа ($m \cdot 4 : m$) (одна ось четвертого порядка, одна поперечная и четыре продольные плоскости симметрии, четыре двойные оси и центр симметрии), присущая тетрагональным кристаллам. Ту же симметрию должен, очевидно, приобрести и деформированный кристалл, что на самом деле и наблюдается.

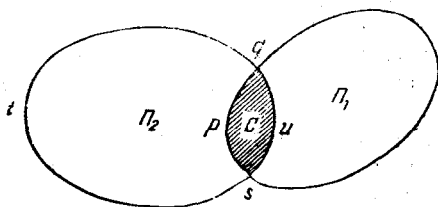


Рис. 6. Схема для объяснения принципа суперпозиции симметрий: группы симметрии Π_1 и Π_2 порождают группу C .

Изложенному можно дать следующее наглядное толкование (рис. 6). Обозначим одну из групп симметрии причины, т. е., говоря точнее, совокупность всех её операций симметрии, фигурой $\Pi_1 = pqrsp$, а другую группу симметрии причины фигурой $\Pi_2 = tsuqt$ (рис. 6). Тогда симметрия следствия однозначно представится заштрихованной фигурой C , которую можно рассматривать как своеобразное «произведение» $\Pi_1 \Pi_2 = C$

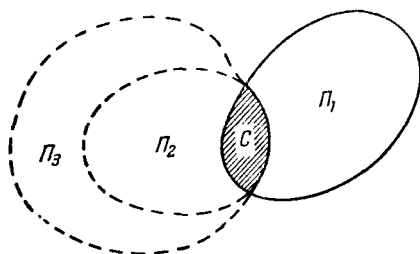


Рис. 7. Вторая схема для объяснения принципа суперпозиции симметрий: группы Π_1 и C порождают какую-то одну из многих групп $\Pi_2, \Pi_3 \dots$

групп Π_1 и Π_2 при заданном расположении их элементов симметрии. Ясно, что одновременно однозначно определится диссимметрия следствия C по отношению к Π_1 (те из присутствующих в Π_1 элементов симметрии, которые отсутствуют в C), т. е. $D_1 = \Pi_1 - C = suqrs$, и диссимметрия C по отношению к Π_2 , т. е. $D_2 = \Pi_2 - C = tspqt$.

Если представить себе, что заданными группами, т. е. «причиной» будут две группы Π_1 и C (рис. 7), то третья группа Π_2 , как видно из рисунка, по ним однозначно определена быть не может. Применительно к рассмотренному нами примеру это означает следующее: если нам известна симметрия деформированного кристалла и симметрия деформирующего напряжения, то по этим данным мы не можем решить, какую симметрию имел кристалл до деформации.

Из изложенного видно, что все три принципа Пьера Кюри, связывающие симметрию причины и симметрию следствия, в конечном счёте могут быть действительно сведены к им же сформулированному принципу суперпозиции симметрий.

Свои размышления о симметрии Пьер Кюри завершает замечанием, в котором говорится, что выводы из рассмотрения симметрии могут быть двух родов: 1) неоспоримые, но отрицательные выводы, которые отвечают положению — нет следствий без причины, и 2) положительные выводы, которые, однако, не дают той уверенности, как отрицательные; они отвечают положению — нет причины без следствия.

К неоспоримым отрицательным относится, например, утверждение, что в кристаллах, обладающих центром симметрии, невозможны пьезоэлектрические явления. К неуверенным положительным выводам можно отнести обратное положение: пьезоэлектричество возможно только в кристаллах без центра симметрии, но оно не является обязательным.

В заключение отметим, что идеи Пьера Кюри в области учения о симметрии нельзя считать до конца оформленными. Это сделают будущие поколения.