

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОБЩЕЙ ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *)****В. Л. Гинзбург**

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	11
§ 1. Движение перигелиев планет и их спутников	12
§ 2. Гравитационное смещение спектральных линий	22
§ 3. Отклонение световых лучей, проходящих вблизи Солнца	32
§ 4. Значение общей теории относительности Эйнштейна для физики и астрономии	35
Заключение	47
Цитированная литература	47

ВВЕДЕНИЕ

Общая теория относительности, являющаяся величайшим научным достижением, созданным гением Альберта Эйнштейна, представляет собой в первую очередь теорию гравитационного поля, обобщающую ньютоновский закон всемирного тяготения. При этом соотношение между ньютоновской теорией тяготения или гравитастатикой и общей теорией относительности в известных пределах аналогично соотношению между электростатикой и электродинамикой. Необходимость подобного обобщения ньютоновского закона тяготения стала совершенно ясной и вместе с тем полностью созрела только после создания и успеха частной (специальной) теории относительности, опирающейся на принцип конечности скорости распространения любых сигналов и не находящейся в соответствии с теорией всемирного тяготения Ньютона с её дальнодействием, эквивалентным бесконечной скорости распространения гравитационных возмущений.

Уже отсюда очевидно, насколько важным для теоретической физики было построение общей теории относительности, даже независимо от вопроса о роли этой теории для понимания отдельных

*) Расширенное изложение доклада, сделанного 30 ноября 1955 г. на сессии ОФМН АН СССР.

физических и астрономических явлений. Вместе с тем общая теория относительности, как и всякая другая научная теория, с одной стороны, опирается на определённые опытные факты и, с другой стороны, строится на основе известных предположений, носящих в той или иной мере гипотетический характер. Поэтому подлинное торжество общей теории относительности не может не быть связано с обнаружением на опыте новых эффектов, предсказываемых теорией. В этом плане вполне естественно, что вопрос об экспериментальной проверке общей теории относительности привлекает к себе внимание с самого времени её создания, т. е. уже около 40 лет. Проблема эта, в связи с малостью соответствующих эффектов, допускающих количественное сравнение теории с опытом, до последнего времени не потеряла своей актуальности, хотя и оказалась в тени в связи с бурными успехами атомной и ядерной физики.

Целью настоящей статьи является относительно краткое освещение современного состояния вопроса об экспериментальной проверке общей теории относительности, причём речь, в основном, будет идти о трёх указанных Эйнштейном эффектах: движении перигелиев планет, отклонении световых лучей, проходящих вблизи Солнца, и гравитационном смещении спектральных линий (последний эффект называют обычно гравитационным красным смещением). Кроме того, имея в виду читателей, мало знакомых с этой областью, мы коснёмся некоторых близких вопросов с целью сделать более ясным значение общей теории относительности для физики и астрономии.

§ 1. ДВИЖЕНИЕ ПЕРИГЕЛИЕВ ПЛАНЕТ И ИХ СПУТНИКОВ

Содержание одного из известных законов Кеплера состоит в том, что планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце. Этот результат, установленный с весьма высокой точностью путём наблюдений, следует из законов ньютоновской механики при движении планеты в поле с потенциалом $\varphi = -\frac{\text{const}}{r}$ или, конкретно для Солнца, с потенциалом:

$$\varphi_{\odot}(r) = -\frac{\chi M_{\odot}}{r}, \quad (1)$$

где r — расстояние от центра Солнца, гравитационная постоянная $\chi = 6,670 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{г}^{-2}$ и масса Солнца $M_{\odot} = 1,991 \cdot 10^{33} \text{ г}$.

В общей теории относительности движение частицы (планеты) даже в заданном центрально-симметричном поле является, вообще говоря, довольно сложным. Однако в случае солнечной системы положение существенно упрощается, так как гравитационное поле может считаться слабым и эффекты общей теории от-

носительности весьма малы. Действительно, из основ теории следует*), что гравитационное поле является слабым, если

$$\frac{|\varphi|}{c^2} \ll 1. \quad (2)$$

В то же время на поверхности Солнца (радиус $r_{\odot} = 6,963 \cdot 10^{10}$ см)

$$\frac{|\varphi|}{c^2} = \frac{\kappa M_{\odot}}{r_{\odot} c^2} = \frac{\rho_{\odot}}{r_{\odot}} = 2,12 \cdot 10^{-6}, \quad \rho_{\odot} = 1,47 \cdot 10^8 \text{ см}, \quad (3)$$

где $\rho = \frac{\kappa M}{c^2}$ — гравитационный радиус тела с массой M ; на земной орбите $\frac{|\varphi|}{c^2} = 2 \cdot 10^{-8}$. Для Земли $M_{\oplus} = 5,98 \cdot 10^{27}$ г, средний радиус $r_{\oplus} = 6,37 \cdot 10^8$ см, $\rho_{\oplus} = 0,43$ см и при учёте только земного поля на поверхности Земли $\frac{|\varphi|}{c^2} = \frac{\kappa M_{\oplus}}{r_{\oplus} c^2} = 7 \cdot 10^{-10}$.

Условие (2) можно записать также в виде

$$\frac{v^2}{c^2} \ll 1, \quad (4)$$

где v — скорость движения тела в гравитационном поле; переход от (2) к (4) осуществляется в силу того, что по теореме вириала на орбите в среднем по времени $|\varphi| = v^2$.

Указанная выше возможность рассматривать влияние эффектов общей теории относительности на движение планет в качестве малого возмущения связана как раз с тем, что эти эффекты определяются параметром $\frac{v^2}{c^2} \sim \frac{|\varphi|}{c^2}$, который очень мал. При этом, как было выяснено Эйнштейном в 1915 г.^{4, 5}, изменение движения планеты по сравнению с классическим состоит в том, что эллиптическая орбита очень медленно вращается в своей плоскости в направлении движения (вращения) самой планеты**). В результате

*) См., например, книги^{1, 2, 3}; ниже в отношении результатов, имеющих в^{1, 2, 3} и других курсах теории относительности, мы ссылок на литературу давать, обычно, не будем.

**) Речь идёт о так называемых вековых возмущениях, т. е. возмущениях, накапливающихся со временем. Кроме того, могут существовать периодические возмущения элементов орбиты, которые, однако, столь малы, что не представляют интереса. Заметим, кроме того, что в случае двух тел сравнимой массы (двойные звёзды) также остаётся справедливой¹⁰ формула (5), полученная^{4, 5} для тела (планеты) с массой, пренебрежимо малой по сравнению с массой Солнца. При этом под M нужно понимать сумму масс обеих звёзд, а параметры a и e относятся к классической орбите, отвечающей относительному движению обоих тел. Релятивистские поправки для двойных звёзд или такой системы, как Земля и Луна, не представляют, однако, интереса (в последнем случае поправки очень малы, как это ясно из табл. II; в случае же двойных звёзд релятивистский эффект очень трудно выделить, поскольку имеются также возмущения, связанные с приливными явлениями на обеих звёздах, которые нельзя считать ни твёрдыми, ни сферическими).

перигелий планеты (ближайшая к Солнцу вершина эллипса) перемещается, причём за один оборот угловое смещение перигелия в радианах равно:

$$\varepsilon = \frac{24 \cdot \pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)} = \frac{6\pi \kappa M_{\odot}}{c^2 a (1 - e^2)}, \quad (5)$$

где a — большая полуось эллипса (орбиты), $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет орбиты (b — малая полуось), T — период обращения планеты; при переходе ко второму выражению использован третий закон Кеплера $a^3 = \frac{\kappa M_{\odot}}{4\pi^2} T^2$.

Выражение (5) находится, разумеется, в согласии со сделанным выше утверждением о том, что речь идёт об эффекте порядка $\frac{v^2}{c^2} \sim \frac{|\varphi|}{c^2} \sim \frac{\kappa M_{\odot}}{ac^2}$ (поскольку для планет солнечной системы $e \ll 1$, а эффект общей теории относительности правильнее характеризовать величиной $\frac{\varepsilon}{2\pi}$, т. е. отношение ^муглового смещения к углу, описываемому планетой за оборот, мы видим из (5), что эффект примерно равен $\frac{3v^2}{c^2}$). Заметим также, что движение перигелия планетной орбиты имеет место не только с точки зрения общей теории относительности, но и в рамках частной теории относительности. В последнем случае движение планеты определяется ² уравнением $\frac{d}{dt} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -m_0 \text{grad } \varphi = -\frac{\kappa m_0 M_{\odot}}{r^3} \mathbf{r}$. Из это-

го уравнения сразу же ясно, что отличие движения от классического определяется параметром $\frac{v^2}{c^2}$. В результате расчёта ² оказывается при этом, что движение планеты носит такой же характер, как и в общей теории относительности, но поворот перигелия в 6 раз меньше, чем по формуле (5). Частная теория относительности приводит к неправильному результату потому, что зависимость инертной массы от скорости в ней учитывается, но гравитационное поле вместо тензора g_{ik} описывается, как и в классической теории, потенциалом φ (кроме того, в выписанном выше уравнении движения тяжёлая масса считается равной массе покоя m_0 *).

*) Как показал расчёт, произведённый В. В. Жуковым, если в уравнении движения считать тяжёлую массу равной $\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, то поворот пе-

ригелия в ^{такой же} специальной теории относительности оказывается в три раза меньшим, чем по формуле (5).

Согласно формуле (5) перигелий планеты за столетие поворачивается на угол (в угловых секундах):

$$\Psi = \frac{5\pi^2 a^2 Y}{24c^2 T^3 (1-e^2)} = 8,35 \cdot 10^{-19} \frac{a^3}{T^3 (1-e^2)} = \frac{3,34 \cdot 10^{33}}{a^2 (1-e^2)}, \quad (6)$$

где $Y = 365,25$ — число дней в году, период обращения T измеряется в днях и большая полуось a в сантиметрах. Значения Ψ и $e\Psi$ для ряда планет приведены в табл. I.

Таблица I

Угол поворота перигелия планет в угловых секундах за столетие

Планета	Ψ по формуле (6)	$e\Psi$	Ψ из наблюдений
Меркурий	$43'',03 \pm 0'',03$	$8'',847$	$42'',56 \pm 0'',94$
Венера	$8'',63$	$0'',059$	—
Земля	$3'',8 \pm 0'',0$	$0'',064$	$4'',6 \pm 2'',7$
Марс	$1'',35$	$0'',126$	—
Юпитер	$0'',06$	$0'',003$	—

Указанная в таблице точность теоретического значения Ψ для Меркурия определяется точностью, с которой известны входящие в (6) величины. Точность измерения обсуждаемого эффекта не определяется одной лишь величиной Ψ , а зависит также от эксцентриситета орбиты. Последнее ясно уже из того факта, что для строго круговой орбиты вообще нельзя говорить о движении перигелия и о самом перигелии. Поэтому в третьем столбце табл. I проведено значение $e\Psi$ произведения Ψ на эксцентриситет орбиты e , характеризующее точность, с которой можно определить эффект из наблюдений^{*)}.

Даже для Меркурия, для которого по сравнению со всеми планетами, эффект наибольший он составляет только $43''$ в столетие. Кроме того, релятивистский эффект не является единственной причиной движения перигелия планеты: как известно, подобное движение имеет также место под влиянием возмущений со стороны

*) В ⁷ в качестве параметра, характеризующего точность наблюдения эффекта, используется не $e\Psi$, а несколько отличная величина, полнее учитывающая условия наблюдения орбиты. Однако мы не будем здесь касаться этого вопроса детальнее (см., однако, табл. II) и ограничимся приведением параметра $e\Psi$, поскольку для Меркурия и Земли введение иного параметра не особенно существенно.

других планет. При этом для Меркурия возмущающий эффект составляет $532''$, т. е. в 12,5 раза больше релятивистского эффекта; для Земли возмущения от других планет и Луны приводят к смещению перигелия на $154''$, в то время как эффект общей теории относительности составляет всего $3,8''$. Понятно поэтому, что выделение релятивистского эффекта является довольно сложной задачей, которую удаётся решить только в результате тщательных расчётов (в особенности важны расчёты возмущений от отдельных планет; подробнее см.⁶⁾) и использования наблюдений движения Меркурия более чем за 150 лет. В результате оказывается, что учёт всех возмущений не может объяснить наблюдаемого движения перигелия и остающееся смещение перигелия (см. последний столбец табл. I) находится в прекрасном согласии с результатом, который получается в общей теории относительности (последнее относится к Меркурию, так как для Земли, ввиду малости эффекта, можно говорить скорее лишь о том, что теория не противоречит опыту).

Таким образом, можно сказать, что в этом пункте экспериментальные факты самым определённым и при этом количественным образом говорят в пользу общей теории относительности*). Тем не менее дальнейшее изучение релятивистских отклонений от ньютоновской теории движения планет и их спутников представляет несомненный интерес. Достаточно сказать, что релятивистский эффект надёжным образом установлен только для одного объекта (Меркурия), в то время как его выделение на фоне других возмущений хотя и производится вполне надёжно, но является довольно сложной операцией. В этом плане представляют интерес две возможности. Первая из них⁷ состоит в наблюдениях движения перигелия малой планеты Икара, для которой среднее расстояние от Солнца является наименьшим, а эксцентриситет наибольшим среди других малых планет (для Икара $a = 1,077$ астр. ед. $\approx 1,6 \cdot 10^{13}$ см, $e = 0,8265$ и $T = 408,67$ дня). В этом случае $\Psi = 10'',05$ и $e\Psi = 8'',3$, но более подробный анализ показывает⁷, что возможная точность определения Ψ в $4 \div 5$ раз выше, чем для Меркурия. Однако для измерения Ψ понадобятся десятилетия астрономических наблюдений и должен быть с достаточной точностью проведён учёт возмущений орбиты Икара, вызванных планетами (согласно⁷ подобный учёт представляется возможным). Поэтому больший интерес представляет изучение релятивистских возмущений в случае спутников планет и в особенности искусственных спутников Земли^{8, 11}.

*) Нужно отметить, что некоторое, необъяснимое возмущением планет смещение перигелия Меркурия было выявлено ещё Лавуазье в середине прошлого века. В работе Эйнштейна⁴, в которой была выведена формула (5), указывается, что оставшееся необъяснённым смещение перигелия Меркурия по астрономическим данным составляет $45'' \pm 5''$. Из табл. I видно, насколько большая точность достигнута в настоящее время.

Релятивистские возмущения в движении спутника планеты складываются из возмущений, вызванных самой планетой и Солнцем. Первое из этих возмущений Ψ_1 определяется формулами (5) и (6), где нужно, разумеется, под a , e и T понимать параметры орбиты спутника, а массу M_0 заменить на массу планеты. Эффект общей теории относительности, связанный с полем Солнца, состоит в движении перигелия (перигея) спутника, а также в движении узлов орбиты спутника. При этом соответствующее смещение перигелия Ψ_2 определяется⁹ выражениями (5) и (6), умноженными на 2 (в этом случае, конечно, в формулах (5) и (6) никакой замены величин производить не нужно и в них фигурируют параметры орбиты рассматриваемой планеты); что касается смещения узлов, то оно описывается выражениями (5) и (6), делёнными на 2.

Для спутников Земли (в угловых секундах в столетие)

$$\Psi_1 = 8,35 \cdot 10^{-19} \frac{a^2}{T^3 (1 - e^2)} = \frac{1,74 \cdot 10^{25}}{\frac{5}{a^2} (1 - e^2)}, \quad (7)$$

где период обращения спутника T измеряется в днях (сутках) и большая полуось его орбиты a — в сантиметрах (в (7) конкретно к Земле относится, конечно, только последнее выражение). Величина Ψ_2 , т. е. смещение перигелия спутника, связанное с полем Солнца, для спутников Земли равно $7'',6$ в столетие.

Для Луны (среднее расстояние от Земли $r = 3,844 \cdot 10^{10}$ см) $\Psi_1 = 0'',06$, но для близких к Земле спутников значение Ψ_1 может уже быть относительно очень большим. В то же время не исключено обнаружение подсобных небольших естественных спутников*), а главное в ближайшие годы, по сообщениям печати, будут созданы искусственные спутники Земли. Спутник, движущийся у самой Земли (это, конечно, нереальный случай из-за сопротивления воздуха), должен обращаться вокруг неё за 1,41 часа $= 5,88 \cdot 10^{-2}$ суток, а спутник на высоте, например, 400 км над Землёй обращается за 1,54 часа. Смещения Ψ_1 для этих, а также некоторых других спутников⁸ приведены в табл. II на стр. 18 (смещение $\Psi_2 = 7'',6$ не учитывается; для сравнения приведены также значения Ψ для Меркурия из табл. I).

Из таблицы II явствует, что значения Ψ_1 и $e\Psi_1$ для искусственных спутников Земли могут в десятки раз превосходить соответствующие значения для Меркурия, не говоря уже о других планетах. Достижимая точность измерения эффекта для спутников, повидимому, еще относительно больше, чем это следует из значений параметра $e\Psi$. Это видно из последнего столбца табл. II,

*) Заметим, что уже для известных спутников ряда планет смещение Ψ_1 весьма велико; так, например, для спутника V Юпитера оно составляет около $2200''$ в столетие.

Таблица II

Смещения перигелиев спутников Земли (в угловых секундах в столетие)

Спутник	Среднее расстояние до центра Земли (в см)	e	Ψ_1	$e\Psi_1$	α
C1	$r_{\text{с}} = 6,367 \cdot 10^8$	0	1700"	—	—
C2	$r_{\text{с}} + 4 \cdot 10^7 = 6,77 \cdot 10^8$	0,01	1450"	14",5	—
C3	$17 \cdot 10^8$	0,06	146",0	8",75	$\geq 2",6$
C4	$17 \cdot 10^8$	0,40	194",6	77",7	$\geq 30"$
C5	$7,2 \cdot 10^8$	0,02	1250",5	25",0	$\geq 75"$
C6	$10 \cdot 10^8$	0,25	586",6	146",6	$\geq 485"$
Луна	$3,844 \cdot 10^{10}$	0,06	0",06	$3,6 \cdot 10^{-3}$	—
Меркурий	—	0,2	43",03	8",847	3",1

где приведено значение параметра α , используемого в ^{7,8} вместо параметра $e\Psi$ для характеристики возможной точности измерений смещения перигелиев (перигеев) спутников и планет. Если использовать параметр α , то становится ясным, что для спутника C6 за год наблюдений может быть достигнута точность, большая, чем для Меркурия за столетие. Быть может, использование радиометодов, пригодных в случае искусственных спутников, приведёт к ещё более благоприятным результатам*).

Но изучение движения спутников планет и в особенности искусственных спутников Земли представляет интерес с точки зрения общей теории относительности отнюдь не только для целей проверки формулы (5). Дело в том, что использование спутников открывает принципиальную возможность проверить ещё один эффект общей теории относительности, оставшийся до сих пор совершенно не подтверждённым на эксперименте. Мы имеем в виду влияние на движение спутника вращения планеты вокруг своей оси**). Как хорошо известно, в ньютоновской теории гравитационное поле тела вращения совершенно одинаково вне зависимости от того, покоится это тело или вращается вокруг своей оси.

*) Здесь и ниже мы совершенно отвлекаемся от ряда трудностей технического характера, с которыми связано использование спутников. Кроме того, для выделения релятивистских возмущений орбиты нужно, конечно, учесть с достаточной точностью другие возмущения (влияние Луны и несферичности Земли, влияние сопротивления газа в ионосфере).

**) Кроме того, использование спутников открывает известные возможности для проверки эффекта гравитационного смещения спектральных линий, о чём будет речь в § 2.

В общей же теории относительности это уже не так, и вращение, например, шара вокруг его оси меняет создаваемое им гравитационное поле. Сущность этого эффекта становится понятной, если вспомнить, что общая теория относительности является таким обобщением ньютоновской теории тяготения, которое в известном отношении аналогично переходу от электростатики к электродинамике (об этом уже была речь во введении). В электростатике покоящийся заряженный шар создаёт только кулоновское электрическое поле, но при вращении шара вокруг оси появляется также магнитное поле, создаваемое соответствующим током. Точно так же вращение гравитирующего шара создаёт дополнительное гравитационное поле, аналогичное магнитному полю токов. В представляющем для нас интерес случае, когда гравитационное поле является слабым, это дополнительное поле шара в квазиевклидовой системе координат*) равно

$$\mathbf{g} = -\frac{2\kappa}{c^3 r^3} [\mathbf{I}r], \quad \mathbf{I} = \int [\mathbf{r}', \mu \mathbf{v}'] dV, \quad (8)$$

где $g_{\alpha} = -\frac{g_{\alpha 0}}{g_{00}} \approx g_{\alpha 0}$, μ — плотность массы в точке $\mathbf{r}'$, движущейся со скоростью $\mathbf{v}'$, r — расстояние от центра шара до точки наблюдения и r' — расстояния от центра шара до его точек. Если $\mu = \text{const}$, то направленный по оси вращения вектор $\mathbf{I}$ по абсолютной величине равен $I = \frac{2}{5} M r_0^2 \omega$, где M — масса шара, r_0 — его радиус и ω — угловая скорость вращения. В случае тел нешаровой формы формула (8) пригодна вне тела не везде, а только на расстояниях $r \gg r_0$ (см. § 100). Максимальное значение $|\mathbf{g}|$ достигается на экваторе и равно $|\mathbf{g}| = \frac{4\kappa M r_0 \omega}{5 r_0 c^3} \sim \frac{|\varphi_0|}{c^3} \cdot \frac{v_0}{c}$, где φ_0 — ньютоновский гравитационный потенциал и v_0 — скорость вращения на поверхности шара (на экваторе). В то же время в слабом поле $g_{00} = -1 - \frac{2\varphi}{c^2}$.

Влияние эффектов общей теории относительности на движение тел в слабом гравитационном поле можно отразить введением в классическое уравнение движения в поле с потенциалом тяготения φ , т. е. в уравнение $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m \text{grad } \varphi = \mathbf{f}_{\text{кл}}$ некоторой дополнительной силы $\mathbf{f}'$.

В случае статического гравитационного поля, когда $g_{\alpha 0} = 0$, $f' = f'_1 \sim \frac{\varphi}{c^2} f_{\text{кл}} \sim \frac{\kappa m M}{r^2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \sim \frac{\kappa m M}{r^2} \cdot \frac{\kappa M}{c^2 r}$ (имеется в виду поле

*) Имеется в виду система координат, в которой отклонения метрического тензора g_{ik} от галилеевских значений $g_{00} = -1$, $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ и $g_{0\alpha} = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$) везде малы.

шара). Если же $g_{\omega 0} \neq 0$, как это имеет место при вращении источника поля, появляется также дополнительная сила (см.³ § 88)

$$\mathbf{f}'_2 = m\mathbf{c} [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{g}], \quad (9)$$

которая аналогична кориолисовой силе, фигурирующей в системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\Omega = \frac{c}{2} \text{ rot } \mathbf{g}$. В силу проведённой выше оценки $|\mathbf{g}|$ ясно, что

$$f'_2 \leq \frac{\kappa M}{r^2} \cdot \frac{vv_0}{c^2} \cdot \frac{r_0}{r} \leq \frac{\kappa M v v_0}{r_0^2 c^2} \text{ и } \frac{f'_2}{f'_1} \leq \frac{v_0 r_0}{vr},$$

где v_0 — скорость вращения поверхности шара (на экваторе) и v — скорость движения рассматриваемого тела, на которое действует гравитационное поле. При $r = r_0$

$$v = v_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{\kappa M}{r_0}} \text{ и } \frac{f'_2}{f'_1} \leq \frac{v_0}{\sqrt{\frac{\kappa M}{r_0}}}.$$

В случае вращения вокруг Солнца скорость тела достигает значения $v_{\text{макс}} = 4,36 \cdot 10^7$ см/сек, а при вращении вокруг Земли $v_{\text{макс}} = 7,9 \cdot 10^5$. В то же время для Солнца период обращения вокруг оси $\tau \approx 28$ дней и $v_0 \approx 2 \cdot 10^5$, а для Земли $\tau = 24$ часа и $v_0 = 4,6 \cdot 10^4$. Отсюда видно, что влияние вращения Солнца и Земли на их спутники может оказаться лишь на один-два порядка меньшим релятивистского эффекта, имеющего место при отсутствии вращения. Количественный учёт эффекта вращения был уже давно проведён в работе⁹; при этом было показано, что соответствующее смещение перигелия планеты (спутника) за столетие в угловых секундах равно*)

$$\Psi_{\text{в}} = - \frac{\pi^2 r_0^2 \gamma}{9c^2 \tau^2 (1 - e^2)^2}, \quad (10)$$

где r_0 — радиус и τ — период обращения (в днях), создающего поле шара, а остальные обозначения такие же, как в случае фор-

*) В⁹ указывается, что формула (10) справедлива лишь при $a \gg r_0$, т. е. когда радиус орбиты значительно больше радиуса шара. Фактически однако для шара эта формула справедлива при любом a (конечно $a \gg r_0$), поскольку формула (8) в случае шара пригодна не только вдали, но и вблизи вращающегося тела. Заметим также, что влияние вращения шара, кроме прецессии (смещения) перигелия, приводит к прецессии узлов орбиты планеты (спутника), причём угол поворота узлов вдвое меньше и имеет обратный знак, чем по формуле (10).

мулы (6). В (10) принято, для простоты, что плоскость орбиты совпадает с плоскостью экватора вращающегося тела, а вращение спутника и шара происходит в одном и том же направлении; в общем же случае, когда угол между этими плоскостями равен i , в (10), согласно⁹, появляется ещё множитель $(1 - 3 \sin^2 \frac{i}{2})$. Эффекты, определяемые формулами (6) и (10), нужно просто сложить, причём отрицательный знак в (10) показывает, что при учёте вращения Солнца (планеты) результирующее релятивистское смещение перигелия планеты (спутника) уменьшается.

Согласно (6) и (10)

$$\Delta = \frac{|\Psi_v|}{\Psi} = \frac{8}{15} \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{T}{\tau (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (11)$$

В случае Меркурия ($a = 0,39$ астр. ед. $= 5,8 \cdot 10^{12}$ см, $T = 0,241$ лет) $\Delta \approx 2,5 \cdot 10^{-4}$ и $\Psi_v = -0'',01$, в то время, как точность измерения поворота перигелия порядка $1''$ (см. табл. I). Для спутника Юпитер V $\Psi_v = -3',46''$ и $\Psi = 36',37''$, но наблюдательные данные не обладают, согласно⁹, достаточной точностью для выделения релятивистских эффектов. Поэтому, насколько нам известно, после работы⁹ не возвращались к обсуждению «эффекта вращения», приводящего к смещению Ψ_v . В то же время этот эффект весьма интересен, что и делает уместным обратить внимание на новые возможности¹¹, открывающиеся при использовании искусственных спутников Земли*). Так, для движущегося у самой Земли спутника C1 (см. табл. II)

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 1,41 \text{ часа, } \Delta = 3,14 \cdot 10^{-2}, \\ \Psi_v &= -53'', \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

т. е. «эффект вращения» больше, чем весь релятивистский эффект для Меркурия (как это подчеркивалось, спутник C1 фактически использован быть не может, но он приводится для примера потому, что для ряда других осуществимых спутников получаются одинаковые по порядку величины значения Δ и Ψ_v ; например, для спутника C2 $\Delta \approx 3 \cdot 10^{-2}$ и $\Psi_v = -43''$). Таким образом, достижение относительной точности определения смещения перигелия

*) Что касается использования для проверки «эффекта вращения» спутников планет (Юпитера, Сатурна)⁹, нужно заметить, что у автора нет данных, позволяющих высказаться по этому вопросу. В то же время проведение астрономами соответствующего анализа на основе современных данных и возможностей было бы весьма желательным.

Заметим в этой связи, что не исключена возможность обнаружения небольших близких естественных спутников Земли (например, захваченных метеоров). Если такие спутники будут обнаружены, то их, конечно, также можно использовать для проверки общей теории относительности.

искусственного спутника всего на порядок, превышающей точность соответствующего определения для Меркурия, позволит всего за год наблюдений обнаружить релятивистский «эффект вращения» для Земли. Решение этой задачи должно привлечь к себе внимание.

§ 2. ГРАВИТАЦИОННОЕ СМЕЩЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Согласно общей теории относительности собственное (истинное) время τ в какой-либо фиксированной точке связано с координатным временем $t = \frac{x_0}{c}$ соотношением

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{-g_{00}} dx_0. \quad (13)$$

В постоянном гравитационном поле частота света, измеренная в координатном (мировом) времени, одинакова вдоль светового луча и, следовательно, определяемая на опыте частота $\nu = \frac{1}{\Delta\tau}$ ($\Delta\tau$ — период колебания, измеренный в собственном времени) в различных точках не одинакова: отношение частот ν_2 и ν_1 в точках 2 и 1 равно $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{g_{00}(1)}{g_{00}(2)}}$. В слабом поле с точностью до членов высшего порядка $g_{00} = -1 - \frac{2\varphi}{c^2}$ и с той же точностью

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_1} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}. \quad (14)$$

Если на Земле наблюдается спектр, испускаемый атомами на Солнце или на звездах, то потенциалом у Земли φ_2 можно пренебречь и

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\varphi_1}{c^2} = -\frac{\chi M}{c^2 r}, \quad (15)$$

где r — радиус излучающего слоя (фотосферы), $\lambda = \frac{c}{\nu}$ — длина волны и, ввиду малости эффекта, под ν можно понимать частоту, излучаемую атомом при отсутствии гравитационного поля (т. е., практически, на Земле). Для Солнца (при $r = r_0$)

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -2,12 \cdot 10^{-6}. \quad (16)$$

В случае (15) — (16) $\Delta\nu < 0$, т. е. спектральные линии смещаются в красную сторону. Поэтому обсуждаемый эффект обычно называют красным смещением спектральных линий. Но, разумеется, смещение может иметь и другой знак. Например, при наблюдении на Земле излучения от очень удаленного источника, находящегося в точке с нулевым потенциалом, смещение линий происходит

в фиолетовую сторону, причём

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\chi M \dot{\delta}}{c^2 r \dot{\delta}} = 7 \cdot 10^{-10}. \quad (17)$$

Поскольку ниже обсуждаются оба случая (16) и (17), будем называть смещение частоты в поле тяготения гравитационным смещением спектральных линий.

Простую формулу (14), которой практически только и приходится пользоваться (если не касаться космологических вопросов), можно получить элементарным путём, исходя из принципа эквивалентности; впервые это было сделано Эйнштейном^{12, 13} в 1907, а затем в 1911 г., ещё до того, как им была создана законченная теория гравитационного поля⁵. Тот же результат получается на базе квантовых представлений, принимая, что квант имеет не только инертную, но и тяжёлую массу $m = \frac{h\nu}{c^2}$. Тогда при движении в поле тяготения квант совершает работу $m(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{h\nu}{c^2}(\varphi_1 - \varphi_2)$, что может произойти только за счёт изменения частоты. Отсюда $h\Delta\nu = \frac{h\nu}{c^2}(\varphi_1 - \varphi_2)$, т. е. получаем формулу (14).

Попытки обнаружения гравитационного смещения спектральных линий в спектрах Солнца и звёзд продолжают уже более 40 лет. Трудность задачи связана с относительной малостью эффекта и наличием доплеровского смещения линий, обусловленного движением как самих звёзд, так и их фотосфер. Значение доплеровского смещения становится особенно ясным, если измерять гравитационное смещение в эффективных скоростях*):

$$v_{\text{эф}} = c \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c}. \quad (18)$$

Тогда для Солнца $v_{\text{эф}} = -0,636$ км/сек и для Земли (см. (17)) $v_{\text{эф}} = 21$ см/сек. В то же время лучевые скорости звёзд достигают десятков км/сек, а скорость потоков в солнечной фотосфере того же порядка как $v_{\text{эф}}$.

Не останавливаясь на отдельных работах и, в особенности, на ранних исследованиях гравитационного смещения (см.¹⁴), кратко характеризуем положение дела в настоящее время. Гравитационное смещение с неоспоримостью установлено у белых карликов, когда $v_{\text{эф}}$ достигает нескольких десятков км/сек (это объясняется тем, что при массе $M \sim M_{\odot}$ радиус белых карликов $r \sim 10^{-2} r_{\odot}$). В то же время недостаточно точное знание радиуса этих звёзд

*) Очевидно, что $v_{\text{эф}}$ есть радиальная скорость источника (относительно Земли), приходящая к такому же доплеровскому смещению спектральных линий, какой вызывается гравитационным эффектом.

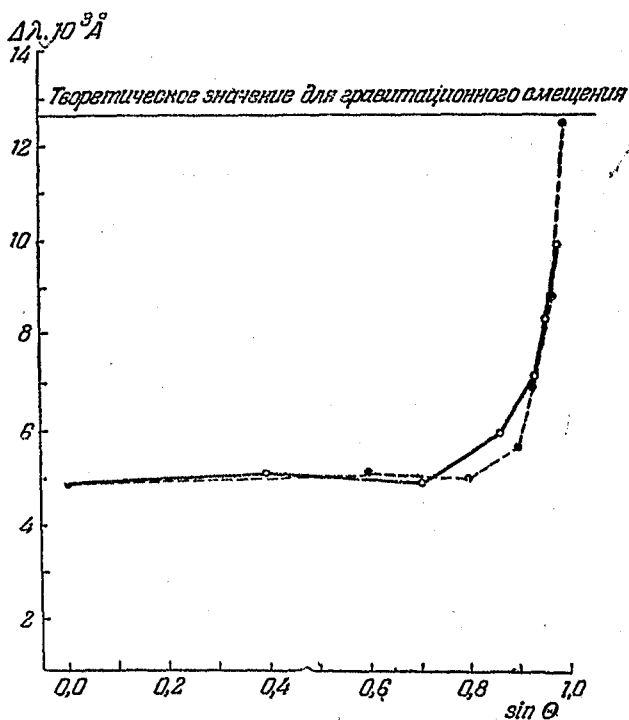
препятствует надёжному количественному сравнению теории с опытом. Если всё же использовать лучшие имеющиеся данные, обрабатывая их самым естественным образом, то, по любезному сообщению П. П. Паренаго, для белых карликов Сириус В ($v_{\text{эф}} \approx -20$ км/сек) и α^2 Эридани экспериментальное значение хорошо согласуется с теоретическим. К такому же выводу приводит статистический анализ красного смещения для ряда горячих звёзд (речь идёт о так называемом К-эффекте)¹⁵. Предпринятая недавно попытка ревизовать эти выводы¹⁶ встречает решительные возражения (см., например,^{17, 18}) и не будет здесь обсуждаться подробнее.

Несмотря на то, что данные, касающиеся звёздных спектров, являются благоприятными для теории, они, как сказано, не могут считаться вполне доказательными в количественном отношении. В этой связи большое значение имеет обнаружение красного смещения в спектре Солнца. В этом случае эффект весьма мал (так, при $\lambda = 6100 \text{ \AA}$ $\Delta\lambda = 1,29 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}$), но этот отрицательный момент с избытком компенсируется возможностью проведения наблюдения на очень совершенных солнечных установках, обладающих высокой разрешающей силой. В результате точность определения центра линий в солнечном спектре оказывается вполне достаточной для обнаружения гравитационного эффекта. Это ясно видно из рисунка, на котором проведены данные о смещении линий в спектре Солнца (речь идёт о линиях поглощения) в области $\lambda = 6100 \text{ \AA}$ в зависимости от положения излучающей точки на солнечном диске

(θ — угол между направлением наблюдения и солнечным радиусом, направленным в точку, в которой линия наблюдения пересекает солнечную поверхность; для центра солнечного диска, очевидно, $\theta = 0$ и для края диска $\theta = \frac{\pi}{2}$). На рисунке, заимствованном

из¹⁶, чёрные точки отвечают наблюдениям Адам¹⁹ и кружки — наблюдениям Фрейндлиха и др.²⁰. Измерения приводят к парадоксальному, на первый взгляд, результату: смещение линий не одинаково для разных точек диска и только на самом его краю, по лучшим из имеющихся данных¹⁹, смещение почти в точности равно предсказанному общей теорией относительности. Такая картина не покажется, однако, столь странной, если вспомнить, что ответственные за образование спектральных линий слои солнечной атмосферы (обращающий слой) находятся в непрерывном движении, носящем конвективный характер. Именно этими движениями объясняется солнечная грануляция и, как легко видеть, они должны приводить к некоторому дополнительному фиолетовому смещению спектральных линий. В самом деле, более горячие массы газа движутся в обращающем слое по радиусу от Солнца, а более холодные — к Солнцу. Поэтому, если, исключительно для простоты, говорить не о линиях поглощения, а о линиях испускания, сразу

ясно, что линия в целом будет из-за движения газа смещена в фиолетовую сторону *). При этом, если скорость потоков чисто радиальная, фиолетовое смещение будет пропорционально $\cos \theta$, т. е. максимально в центре диска и равно нулю на его краю. Последнее обстоятельство, а также учёт других моментов, существенных при излучении света в солнечной атмосфере, позволяет заключить, что



вблизи края диска движения излучающих слоёв можно не учитывать и должен наблюдаться только гравитационный эффект (от эффектов давления сейчас отвлекаемся; см. ниже). Это и наблюдается на опыте. В то же время использование имеющихся данных о солнечной грануляции позволяет непринуждённо объяснить ¹⁷ наличие дополнительного фиолетового смещения на остальной части диска.

Таким образом, данные о смещении спектральных линий на Солнце могут рассматриваться как подтверждающие выводы общей теории относительности. Однако, с точки зрения строгой

*) В предельном случае, когда излучением «холодного» газа, движущегося к Солнцу, можно совсем пренебречь, смещение линий определяется просто скоростью движения горячего газа.

Нетрудно видеть, что такие же выводы получаются в случае линий поглощения.

количественной проверки формул (14) — (15) для гравитационного смещения спектральных линий, имеющихся данных всё же ещё недостаточно. Это связано с тем, что смещение линий на Солнце обусловлено также эффектом давления (т. е. в конечном счёте взаимодействием между атомами), который, вообще говоря, не мал по сравнению с гравитационным эффектом. В то же время учёт влияния давления (см., например, ¹⁹) связан с известными предположениями и поэтому не мог быть пока произведён с полной уверенностью*). То же можно сказать об учёте смещения линий, обусловленного грануляцией. Поэтому для строго количественной проверки формулы (14) нужна ещё дальнейшая работа.

Помимо исследования спектра Солнца и звёзд, известные, весьма заманчивые перспективы открываются в этом отношении с развитием радиосфизики и, в частности, радиоспектроскопии. В оптике минимальное заметное относительное смещение частоты не превосходит $\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{\text{мин}} \gg 10^{-7}$. В радиофизике картина уже другая — в принципе там могут быть замечены смещения на малые доли герца и таким образом при $\nu \sim 10^{10}$ $\left(\lambda = \frac{c}{\nu} \sim 3 \text{ см}\right)$ даже значение $\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right) \sim 10^{-13}$ не может считаться предельным. С другой стороны, развитие техники стабилизации частоты и, в особенности, переход на молекулярную стабилизацию (атомные часы) открывают известные возможности добиться стабильности частоты источника $\frac{\Delta\nu}{\nu} \gg 10^{-12} \div 10^{-13}$ (см. ^{21, 22, 23}). Но, если окажется возможным измерять смещения частоты с подобной точностью, то эффект гравитационного смещения спектральных линий можно будет заметить ²¹ даже в пределах Земли. В самом деле, на Земле вполне можно поместить приёмник и передатчик на высотах, отличающихся, скажем, на $3 \text{ км} = 3 \cdot 10^5 \text{ см}$. Тогда, согласно (14),

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gh}{c^2} = 1,09 \cdot 10^{-18} h \approx 3 \cdot 10^{-13} \quad (19)$$

и при чувствительности $\frac{\Delta\nu}{\nu} \sim 10^{-13}$ эффект может быть измерен (в формуле (19) $g = 981 \text{ см/сек}^2$ — ускорение силы тяжести). Насколько нам известно, до практической реализации измерений частоты с такой точностью ещё всё же далеко, но значения $\frac{\Delta\nu}{\nu} \gg 10^{-10}$ уже достигнуты ²³.

*) Заметим, что на рисунке приведено непосредственно измеренное красное смещение линий, т. е. эффект давления не учтён. Если это сделать, то, согласно ¹⁹, в центре диска $\Delta\lambda = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ Å}$ вместо $5 \cdot 10^{-3} \text{ Å}$, но вблизи края диска поправка, связанная с эффектом давления, незначительна.

В этой связи представляет интерес возможность обнаружения гравитационного смещения с использованием искусственного спутника Земли^{11, 17}. Для очень удалённого спутника гравитационное фиолетовое смещение частоты его излучения, наблюдаемого на Земле, определяется выражением (17), т. е. достигает величины $\frac{\Delta\nu}{\nu} \sim 10^{-9}$. Если же спутник находится на высоте h над Землёй, то

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\nu}{\nu} &= \frac{\kappa M_{\oplus}}{c^2} \left(\frac{1}{r_{\oplus}} - \frac{1}{r_{\oplus} + h} \right) \approx \frac{\kappa M_{\oplus} h \left(1 - \frac{h}{r_{\oplus}} \right)}{c^2 r_{\oplus}^2} = \\ &= \frac{gh \left(1 - \frac{h}{r_{\oplus}} \right)}{c^2} = 1,09 \cdot 10^{-18} \left(1 - \frac{h}{r_{\oplus}} \right), \quad (19a) \end{aligned}$$

где последние два выражения относятся к случаю $h \ll r_{\oplus} = 6,367 \times 10^8$.

При $h = 800$ км $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 7,6 \cdot 10^{-11}$ и эффект уже, вероятно, в ближайшее время может быть измерен. Эти измерения, однако, существенно усложнятся в связи с движением спутника, что приводит к большому доплеровскому смещению частоты, причём нужно учитывать также квадратичный эффект Допплера, который порядка $\frac{v^2}{c^2}$, где v — скорость движения спутника; полный гравитационный

эффект (17) также порядка $\frac{v^2}{c^2} \left(\frac{\kappa M_{\oplus}}{r_{\oplus}} = \frac{v^2}{c^2} \right)$, где v — скорость

спутника, движущегося у самой Земли), а эффект (19a) при $h \ll r$ уже существенно меньше. Что же касается эффекта Допплера первого порядка, то он для близкого к Земле спутника в $\frac{c}{v} \sim \frac{3 \cdot 10^{10}}{10^3} = 3 \cdot 10^4$ раза больше полного гравитационного эффекта, если только угол между скоростью и лучом зрения θ не близок к $\frac{\pi}{2}$ (при $\theta = \frac{\pi}{2}$ эффект первого порядка, как известно, исчезает).

Возникает, таким образом, необходимость получить формулу для $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ с учётом и гравитационного смещения и эффекта Допплера. Уже из элементарных соображений ясно, что с точностью до членов $\frac{v^2}{c^2}$, с которой только и пригодна формула (14), доплере-

ровское и гравитационное смещения будут просто складываться, т. е.

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2(t_1)}{c^2}}}{1 - \frac{v(t_1) \cos \theta(t_1)}{c}} + \frac{\varphi_1(t_1) - \varphi_2}{c^2} =$$

$$= 1 + \frac{v}{c} \cos \theta - \frac{v^2}{2c^2} (1 - 2 \cos^2 \theta) + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}, \quad (20)$$

где v — скорость источника (спутника) относительно Земли, в момент испускания света t_1 , θ — угол между скоростью и лучом зрения и известная формула для Допплер-эффекта в частной теории относительности

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

хотя и выписана полностью, но должна использоваться с точностью до членов $\sim \frac{v^2}{c^2}$ (это и учтено явно в последнем из написанных выражений)*). Автору пришлось, однако, столкнуться с известными сомнениями в пригодности формулы (20) для случая, когда речь идёт об ускоренном движении источника, как это имеет место для источника на спутнике. Спутник «свободно падает», а в свободно падающей системе отсчёта нет гравитационного поля и нет, следовательно, гравитационного смещения частоты — таковы, насколько удалось понять, соображения, дающие основания к упомянутым сомнениям. Здесь, однако, имеет место простое недоразумение. В локальной инерциальной системе отсчёта, связанной со спутником, никакого смещения частоты действительно не будет наблюдаться, если не только излучатель, но и приёмник покоятся относительно этой системы. В опытах же, о которых идёт речь, приёмник находится на Земле, т. е. в связанной со спутником системе ускоренно движется по направлению к спутнику. Поэтому, если в момент испусканий сигнала относительная скорость спутника и Земли равнялась нулю, то в момент достижения сигналом Земли скорость последней будет равна

$$v = \frac{gh}{c},$$

где $\frac{h}{c}$ — время распространения света на расстояние h и g — уско-

*) Для простоты в (20) не учитывается (могущее в радиодиапазоне оказаться заметным) отличие от единицы показателя преломления в области ионосферы, в которой движется спутник.

рение силы тяжести (т. е. ускорение Земли в системе, связанной со спутником; гравитационное поле для простоты считаем однородным); в силу эффекта Доплера наличие такой скорости приведёт к тому, что приёмник будет принимать частоту излучения, смещённую на

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{v}{c} = \frac{gh}{c^2},$$

т. е. получается как раз гравитационное смещение частоты (19). Приведённые рассуждения, вполне аналогичные использованному Эйнштейном при первоначальном анализе вопроса о гравитационном смещении¹³, не оставляют сомнений в том, что гравитационное смещение не зависит от ускорения спутника. К такому же выводу приводят и другие соображения, например квантовые (квант «работает» при распространении в гравитационном поле и в то же время его импульс $\frac{h\nu}{c}$, а значит, и частота ν не зависят от ускорения излучающего атома*). Наконец, общее выражение для смещения частоты в гравитационном поле при движущихся источнике и приёмнике можно получить, непосредственно воспользовавшись инвариантностью интервала $ds = \sqrt{V - g_{ik} dx_i dx_k}$ (см., например, ²⁴ § 116). Пусть источник находится в точке $x_{1\alpha}(t_1)$, а приёмник в точке $x_{2\alpha}(t_2)$, где t_1 и t_2 — моменты испускания и приёма какого-либо светового сигнала, причём $t_2 = f(t_1)$. Элементы собственного времени для источника и приёмника равны соответственно

$$c d\tau_1 = \left[-g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} \right]_{x_{1l}(t_1)}^{1/2} dt_1,$$

$$c d\tau_2 = \left[-g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} \right]_{x_{2l}(t_2)}^{1/2} dt_2;$$

далее, отношение частот

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{d\tau_1}{d\tau_2} \quad \text{и} \quad dt_2 = \frac{df}{dt_1} dt_1.$$

Отсюда

$$\frac{\nu_2(t_2)}{\nu_1(t_1)} = \frac{\left[-g_{00} - g_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{c dt} \frac{dx_\beta}{c dt} - g_{0\alpha} \frac{dx_\alpha}{c dt} \right]_{x_{1l}(t_1)}^{1/2}}{\frac{df(t_1)}{dt_1} \left[-g_{00} - g_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{c dt} \frac{dx_\beta}{c dt} - g_{0\alpha} \frac{dx_\alpha}{c dt} \right]_{x_{2l}(t_2)}^{1/2}}. \quad (21)$$

где $\frac{dx_\alpha}{dt}$ — слагающая скорости по оси x_α . Траектория луча и коор-

*) Как справедливо заметил А. Л. Зельманов, если бы свободное падение излучателя приводило к ликвидации гравитационного смещения, этот последний эффект никогда не наблюдался бы в астрофизических условиях, поскольку излучающие атомы в звёздных фотосферах всегда свободно падают на звезду.

динатная скорость света определяется из условия $ds = 0$, откуда можно найти функцию $t_2 = f(t_1)$. В евклидовом пространстве, если точка 2 покоится, $t_2 = t_1 + \frac{r_{12}(t_1)}{c}$, где $r_{12}(t_1)$ — расстояние между точками 1 и 2 в момент t_1 (мы говорим о t_1 и t_2 как о моментах испускания и приёма сигнала, или, лучше, переднего фронта сигнала, но все рассуждения пригодны и при непрерывном излучении света*). Поскольку $\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{df}{dt_1} = 1 - \frac{v_1(t_1) \cos \theta(t_1)}{c}$ из (21) сразу же получаем обычную релятивистскую формулу для Допплер-эффекта, но со значениями v_1 и θ , отнесёнными к моменту излучения t_1 . Для неподвижных источника и приёмника, находящихся в постоянном гравитационном поле, $\frac{df}{dt_1} = 1$ и получается приведённая выше формула

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{g_{00}(1)}{g_{00}(2)}},$$

т. е. для слабого поля — формула (14). Если же источник движется в слабом поле, причём $\frac{v_1^2}{c^2} \ll 1$, получаем формулу (20), поскольку влияние искривления лучей и изменения координатной скорости света в гравитационном поле сказывается на значении $\frac{df}{dt_1}$ лишь на членах более высокого порядка. С помощью формулы (21) можно рассмотреть и более сложные случаи и, в частности, учесть движение приёмника. При наблюдении близкого спутника с Земли в этом пока нет необходимости, если под v в (20) понимать скорость источника относительно покоящегося на Земле приёмника. По последней причине линейный эффект Допплера, связанный с вращением Земли-

*) Частота излучения в данный момент t является, разумеется, понятием не имеющим смысла и в (20)–(21) под $\nu(t)$ понимается частота, отвечающая максимуму спектральной линии, которая получается при приёме излучения в течение некоторого времени Δt вблизи момента t . Для того чтобы линия была достаточно узкой, скорость v и другие величины (т. е. $\cos \theta$ и φ_1) должны пренебрежимо мало изменяться за период излучения $\Delta \tau = \frac{1}{\nu} \ll \Delta t$. Для спутника величина $\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{c} \cos \theta \right) \cdot \Delta \tau$ порядка $\frac{v^2 \Delta \tau}{cr}$ из-за изменения угла θ (здесь r — расстояние до спутника) и порядка $\frac{g \Delta \tau}{c}$ из-за изменения скорости v . Поскольку $\frac{v^2 \Delta \tau}{cr} \sim 10^{-16}$ и $\frac{g \Delta \tau}{c} \sim \sim 3 \cdot 10^{-18}$ (при $\Delta \tau \sim 10^{-10}$), в то время как $\frac{v^2}{c^2} \sim 6 \cdot 10^{-10}$ не вызывает сомнений возможность выбора интервала $\Delta t \gg \Delta \tau$, в течение которого можно пренебречь изменением $\frac{\Delta v}{v}$. К тому же на опыте будет измеряться не $\Delta \nu(t)$, а изменение разности фаз между приходящим излучением и излучением земного стандарта, так что никакого спектрального разложения в явном виде производить не приходится.

учитывается, квадратичный же эффект (или в системе, связанной с вращающейся Землей, — влияние вращения на g_{ik}) порядка

$$\frac{v_0^2}{c^2} \sim 2 \cdot 10^{-12},$$

где $v_0 = 4,6 \cdot 10^4$ — скорость земной поверхности на экваторе. В то же время для спутника на высоте $h = 800$ км от Земли $\frac{v^2}{c^2} \approx 6 \cdot 10^{-10}$ и $\frac{gh}{c^2} \sim 10^{-10}$, т. е. членом порядка $\frac{v_0^2}{c^2}$ можно пренебречь. В этом примере ($h = 800$ км), с другой стороны, уже квадратичный эффект Допплера в четыре раза больше гравитационного эффекта, откуда ясно, что выделение гравитационного смещения частоты является далеко не простой задачей, даже если частоту саму по себе удастся измерять с достаточной точностью.

В этой связи ясно, что для измерения гравитационного смещения частоты выгодно использовать далёкие спутники, при переходе к которым эффект Допплера уменьшается, а гравитационное смещение возрастает. Особенно удобен при этом спутник, неподвижный относительно земной поверхности, т. е. делающий один оборот за 24 часа в эквивалентной плоскости (такой спутник будет находиться на расстоянии $6,6 r_\oplus$ от центра Земли и иметь скорость $v \approx 3 \cdot 10^3$; квадратичный эффект Допплера в этом случае $\frac{v^2}{2c^2} = 5 \cdot 10^{-11}$ и гравитационное смещение $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 6 \cdot 10^{-10}$).

Отличие собственного времени, которое измеряется часами, от координатного времени можно заметить не только по смещению частоты, но и следующим образом. Пусть часы 1 и 2 в момент $t = 0$ покоятся на Земле (потенциал тяготения φ_2), а затем часы 1 начинают двигаться со скоростью $v_1(t)$ в области с потенциалом φ_1 (т. е. часы 1 помещены на искусственном спутнике Земли). Тогда, если в момент t (по координатному времени) часы 1 опять неподвижны и вернулись в точку 2 (т. е. часы 1 спущены со спутника на Землю) они будут показывать другое время, чем часы 2. Именно, часы 2 будут показывать время

$$\tau_2 = \left(1 + \frac{\varphi_2}{c^2}\right) t,$$

а часы 1 время

$$\tau_1 = \left(1 + \frac{\varphi_1}{c^2} - \frac{v_1^2}{2c^2}\right) t,$$

где для простоты считаем, что спутник всё время движется со скоростью v_1 в области с потенциалом φ_1 (т. е. орбита считается

круговой, а временем спуска и подъёма пренебрегается). Из приведённых выражений для τ_1 и τ_2 , исключая имеющее вспомогательный характер координатное время t , с принятой точностью получаем:

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1} \approx \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{c^2} + \frac{v_1^2}{2c^2}. \quad (22)$$

Если пренебречь в этом выражении разностью $\varphi_2 - \varphi_1$, что допустимо для достаточно близкого к Земле спутника, то получается хорошо известный результат для отставания «путешествующих часов», указанный Эйнштейном ещё в его основной работе по специальной теории относительности²⁵.

Для близкого к Земле спутника $\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2} \sim 2 \cdot 10^{-10}$ и за год отставание часов составит $\tau_2 - \tau_1 \sim 6 \cdot 10^{-3}$ сек. Не исключено, в принципе, что наблюдение такого интегрального эффекта также окажется возможным.

§ 3. ОТКЛОНЕНИЕ СВЕТОВЫХ ЛУЧЕЙ, ПРОХОДЯЩИХ ВБЛИЗИ СОЛНЦА

В гравитационном поле «координатная скорость света» c' , определяемая из условия $ds=0$, зависит от g_{ik} , причём в слабом поле

$$c' = c \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right),$$

где $c = 3 \cdot 10^{10}$ — скорость света при отсутствии поля. Поэтому, как это сразу ясно из принципа Гюйгенса или просто по аналогии со случаем распространения света в неоднородной преломляющей среде, в неоднородном гравитационном поле световые лучи будут искривляться. Конкретно, для лучей, проходящих вблизи Солнца, искривление будет направлено к Солнцу и сфотографированное во время полного солнечного затмения звёздное поле вблизи Солнца будет деформировано по сравнению с тем же полем, снятым при отсутствии Солнца (последнее может быть сделано, скажем, через полгода после затмения). Этот эффект, как и гравитационное смещение частоты, был предсказан Эйнштейном уже в первых его работах по теории тяготения^{12, 13}, причём для отклонения луча, проходящего на расстоянии R от центра Солнца, было получено выражение¹³.

$$\alpha = \frac{2\kappa M_{\odot}}{c^2 R} = 4,24 \cdot 10^{-6} \frac{r_{\odot}}{R} = 0'',87 \frac{r_{\odot}}{R}. \quad (23)$$

В дальнейшем, после создания общей теории относительности, выяснилось^{4, 5}, что эффект отклонения лучей должен быть вдвое

больше*) и таким образом согласно теории

$$\alpha = \frac{4\pi M_{\odot}}{c^2 R} = 8,48 \cdot 10^{-6} \frac{r_{\odot}}{R} = 1'',75 \frac{r_{\odot}}{R}, \quad (24)$$

т. е. отклонение луча достигает у солнечного края 1,75 угловых секунд (более точное значение $1'',745$).

Любопытно отметить, что выражение (23) для отклонения световых лучей было получено ещё в 1801 г. Золднером (его статья перепечатана в ²⁶) на основе представлений о световых корpusкулах и классической механики. Этот результат, кажущийся на первый взгляд странным, получается очень просто. Элементарный расчёт, приводящий к известной формуле Резерфорда для рассеяния α -частиц на ядрах, показывает, что частица с массой m , движущаяся в поле с потенциальной энергией $-\frac{\beta}{r}$, отклоняется на угол α , определяемый формулой

$$R_{\infty}^2 = \frac{\beta^2}{m^2 v_{\infty}^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

где R_{∞} — прицельный параметр и v_{∞} — скорость частицы на бесконечности. Если

$$\frac{mv_{\infty}^2}{2} \gg \frac{\beta}{R_{\infty}},$$

то отклонение является малым (т. е. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$), на всей траектории $v \approx v_{\infty}$ и, кроме того, $R \approx R_{\infty}$, где R — ближайшее расстоя-

*) Значение (23) было получено ¹³ на основе выражения для скорости света

$$c' = c \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right),$$

получающегося при учёте влияния поля тяготения только на течение времени. В полной же теории учитывается также изменение пространственной метрики (неевклидовость пространства в поле тяготения). При этом в слабом статическом гравитационном поле $ds^2 = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2} \right) dr^2$, откуда для светового луча (т. е. при условии $ds = 0$) и получается указанное в тексте выражение

$$c' = c \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right),$$

приводящее к (23). Во избежание недоразумений необходимо подчеркнуть, что «координатная скорость света» $c' = \frac{dr}{dt}$ (при условии $ds = 0$) не имеет непосредственного физического смысла, поскольку измеряемая на опыте скорость света в малой окрестности какой-либо точки всегда равна $\frac{dl}{d\tau} = c = 3 \cdot 10^{10}$, где dl — пространственное расстояние и $d\tau$ — интервал собственного времени.

ние между частицей и рассеивающим центром. В результате $\alpha \approx \frac{2\beta}{mv^2R}$ или для гравитационного поля Солнца

$$\alpha = \frac{2\kappa M_{\odot}}{v^2 R},$$

где масса частицы m выпала в силу предположения о равенстве инертной и тяжёлой масс. Полагая в полученной формуле $v=c$, мы и получаем выражение (23). Возможность получения этого выражения без всяких предположений о массе световых корпускул связана, очевидно, с равенством тяжёлой и инертной масс, а также с применением классического закона движения вплоть до скорости $v=c$.

Экспериментальная проверка формулы (24) проводилась во время целого ряда полных солнечных затмений, начиная с 1919 г. Сводка соответствующих результатов приведена в таблице III, где все

Таблица III

Отклонение световых лучей в поле Солнца (теоретическое значение $\alpha_{\text{макс}} = 1'',75$)

Наблюдатели	Год	Угол отклонения	Ссылка на литературу
Кромелен и Дейвидсон	1919	$1'',98 \pm 0'',18$	14
Эддингтон и Коттингам	1919	$1'',61 \pm 0'',45$	14
Кемпбелл и Трюмплер	1922	$1'',78 \pm 0'',17$	14
Дауделл и Кеннеди	1922	$1'',77$	27
Фрейндлих	1929	$2'',24$	27
Михайлов	1936	$2'',73 \pm 0'',31$	28
Ван-Бисбрук	1947	$2'',01 \pm 0'',27$	29
Ван-Бисбрук	1952	$1'',70 \pm 0'',10$	30
Среднее		$1'',98 \pm 0'',12$	
Среднее без наибольшего значения		$1'',87 \pm 0'',08$	

значения отнесены к краю солнечного диска. Знака отклонения мы не указываем, так как он во всех случаях совпадает с теоретическим (луч «притягивается» к Солнцу). Указанная внизу таблицы III ошибка средних значений является просто средней квадратичной ошибкой без учёта точности средних значений α , полученных в отдельных работах. Основная ошибка наблюдений, которая, повиди-

мому, может превосходить указанные ошибки, связана с неточностью учёта рефракции в земной атмосфере или, точнее, разности рефракций во время затмения и в контрольный день. С этой точки зрения измерения Михайлова²⁸, дающие наибольшее отклонение от теоретического значения, проводились в неблагоприятных условиях (во время затмения температура воздуха равнялась $+23,6^\circ\text{C}$, а в контрольный день -21°C ; в результате дифференциальная рефракция достигла $0'',85$). Последние наблюдения^{29, 30} приводят к значениям α , совпадающим с теоретическим с точностью до ошибки эксперимента. То же относится к данным Кемпбелла и Трюмплера (см. табл. III), которые по любезному сообщению А. А. Михайлова являются наиболее надёжными из известных. Отсюда, как и из всей табл. III, явствует, что предсказание общей теории относительности в отношении отклонения световых лучей в поле Солнца подтвердилось: обнаружен эффект, который заведомо больше «классического» значения (23) и с точностью примерно до 10% совпадает с теоретическим предсказанием*).

Получение более точных опытных данных, конечно, представляет интерес; к сожалению, в этом отношении не видно путей для радикального повышения точности, так как радиометоды (например, наблюдение космического радиоизлучения) в силу их относительно низкой угловой разрешающей силы здесь совершенно непригодны.

§ 4. ЗНАЧЕНИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ ФИЗИКИ И АСТРОНОМИИ

Эффекты общей теории относительности, обсуждавшиеся выше, весьма малы и значение их, самих по себе, в астрономии невелико. Это обстоятельство может привести к недооценке роли общей теории относительности. Поэтому нам не казалось излишним сделать ниже несколько замечаний о значении общей теории относительности для физики и астрономии.

Общая теория относительности — это, прежде всего, релятивистская теория тяготения, теория гравитационного поля. Только с созданием этой теории здание неклассической физики приобрело известную законченность, поскольку ньютоновская теория всемирного

*) Необходимо отметить, что при обработке экспериментальных данных исходят из закона $\alpha = \frac{Cr_\odot}{R}$ и определяют постоянную $C = \alpha_{\text{марс}}$, которая и приведена в табл. III. Что же касается проверки самой зависимости α от R , которая также необходима для полного сравнения теории с опытом, то имеющихся данных для этой цели ещё недостаточно. Заметим, кстати, что влиянием вращения Солнца на отклонение лучей можно пренебречь, поскольку этот эффект меньше гравитационного отклонения (24) на величину порядка $\frac{v_0}{c} \sim 10^{-5}$, где $v_0 \sim 2 \cdot 10^5$ — скорость солнечной поверхности на экваторе.

тяготения, сохраняющая дальноедействие, не находится в согласии с основами теории поля и частной теорией относительности (об этом уже было сказано во введении). При этом переход к теории гравитационного поля хотя и аналогичен переходу от электростатики к электродинамике, но связан со значительно более глубокими обобщениями и, в частности, позволил отразить в самом фундаменте теории давно известный факт равенства инертной и тяжёлой массы. Пространство и время, рассматривавшиеся до создания общей теории относительности, как независимые от материи, не связанные с ней, стали в этой теории неотделимы от материи. Метафизические ньютоновские абсолютное пространство и абсолютное время исчезли из физики, на место «пустоты» или пространства «самого по себе» встало гравитационное поле g_{ik} . Небесные тела (собственно, любые тела), электромагнитное и другие поля определяют характер гравитационного поля и одновременно пространственно-временную метрику. При наличии масс, а они всегда присутствуют, геометрия пространства уже является неевклидовой и зависит от величины, распределения и движения этих масс. Поэтому вопрос о геометрии нашего реального пространства (в отличие, разумеется, от геометрии бесчисленного множества мыслимых пространств любого числа измерений) становится физическим вопросом. Таким образом, в общей теории относительности нашли своё отражение и, в известных пределах, завершение идеи о связи геометрии с физикой, с опытом, восходящие к Лобачевскому, Гауссу и Риману.

Этими несколькими словами общего характера здесь придётся ограничиться, поскольку освещение фундаментальных вопросов о пространстве времени, геометрии и теории поля в их связи с общей теорией относительности далеко выходит за рамки настоящей статьи. Кратко остановимся поэтому только на трёх более частных моментах: методическом значении общей теории относительности с точки зрения теоретической физики, роли общей теории относительности в атомной физике и теории элементарных частиц и, наконец, её значении для астрономии, и в особенности, для космологии.

Методическое значение общей теории относительности связано, в основном, с тем, что она представляет собой весьма совершенную теорию поля (имеется в виду неклассическая теория поля). Последнее проявляется не только в возможности непринуждённо пользоваться широким классом самых различных координат, но раньше всего в следующем факте: уравнения движения создающих поле масс в общей теории относительности следуют из самих уравнений поля *).

*) В электродинамике это, как известно, не так: из уравнений Максвелла вытекает уравнение непрерывности, но уравнения движения зарядов являются независимыми. В результате, например, поле двух покоящихся зарядов удовлетворяет уравнениям Максвелла, хотя и несовместимо с уравнениями движения, поскольку из-за взаимодействия заряды не могут оставаться в покое.

Объясняется это тем, что из уравнений гравитационного поля автоматически следует равенство нулю ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса T_i^k , т. е. равенство $T_{i;k}^k = 0$ (в галилеевых координатах это равенство имеет первичный вид: $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0$).

Но равенство $T_{i;k}^k = 0$ есть не что иное, как закон сохранения энергии и импульса «материи», т. е. вещества и электромагнитного поля, и, таким образом, уравнения движения частиц вещества и уравнения Максвелла, содержащие точки и заряды, следуют из уравнения для гравитационного поля*).

Далее, в общей теории относительности тензор энергии-импульса при его получении из вариационного принципа автоматически оказывается симметричным (см., например, ³, § 93). Это делает удобным получение выражения для T_{ik} и при отсутствии гравитационного поля, используя ту же методику, как и в общей теории относительности (в противном случае тензор T_{ik} может получиться несимметричным и его приходится дополнительно симметризовать; см. ³, § 31).

Аналогичный приём (введение произвольных g_{ik} с переходом к галилеевой метрике в самом конце) позволяет вывести уравнения движения из уравнений поля в линейных теориях поля³⁴. Кстати, нелинейный характер уравнений для гравитационного поля g_{ik} также является существенной особенностью этих уравнений по сравнению, скажем, с теорией Максвелла. В этой связи опыт, накопленный при исследовании уравнений для g_{ik} , оказывается весьма ценным при работе с другими нелинейными уравнениями.

Не рискуя останавливаться дальше на методических вопросах**), подчеркнём ещё лишь то большое влияние, которое оказала общая теория относительности на развитие геометрии и тензорного анализа.

*) Приведённый результат содержится, по существу, уже в основной работе Эйнштейна⁵, где, тем не менее, уравнение движения материальной точки в поле тяготения (уравнение геодезической) вводится независимо. В дальнейшем было уже со всей определённоностью установлено, что «постулат о геодезической» является излишним (см., например, ³¹), а также проведён, исходя из уравнений гравитационного поля, вывод уравнений движений системы тел в различных приближениях (³², ^{32a}, ³³; см. также ², гл. XV).

**) В качестве совершенно элементарного примера использования «принципа эквивалентности» в методических целях укажем на следующую задачу. При рассмотрении электронно-инерционных опытов с металлами нужно написать уравнение Шредингера для волновой функции электронов в равномерно ускоренной системе координат; это хотя и не представляет труда, но требует известных вычислений, поскольку над Ψ -функцией приходится произвести градиентное преобразование³⁵. В то же время ответ сразу же ясен³⁶ на основе «принципа эквивалентности», соглас-

Перейдём к вопросу о значении общей теории относительности для атомной и ядерной физики и теории элементарных частиц. Как хорошо известно, гравитационные силы ничтожно малы по сравнению с электрическими силами, действующими в атомах, а также электрическими и ядерными силами между частицами в атомных ядрах. Так, энергия электростатического взаимодействия двух частиц с зарядами e и массами m равна $U_{эл} = \frac{e^2}{r}$, а энергия их гравитационного взаимодействия равна $U_{гр} = -\frac{\chi m^2}{r}$, откуда отношение энергий или сил обоих типов по абсолютной величине равно

$$\frac{U_{гр}}{U_{эл}} = \frac{\chi m^2}{e^2} = \begin{cases} 2,4 \cdot 10^{-43} & (\text{для электронов}), \\ 8,1 \cdot 10^{-37} & (\text{для протонов}). \end{cases} \quad (25)$$

То же самое можно выразить, замечая, что гравитационные радиусы электрона и протона

$$\rho_e = \frac{\chi m_e^2}{c^2} = 6,75 \cdot 10^{-56} \text{ см}$$

и

$$\rho_p = \frac{\chi m_p^2}{c^2} = 1,24 \cdot 10^{-52} \text{ см}$$

несравненно меньше их классических электромагнитных радиусов

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

и

$$r_p = \frac{e^2}{m_p c^2} = 1,5 \cdot 10^{-16} \text{ см}.$$

В силу малости гравитационных сил их можно совершенно не принимать во внимание как в атомах, так и в ядрах и таким образом для атомной и ядерной физики теория тяготения не имеет никакого непосредственного значения*). То же самое можно, каза-

но которому движение частицы в системе отсчёта с ускорением a точно такое же, как в гравитационном поле с потенциалом $\varphi = az$ (ось z направлена по a); поэтому уравнение Шредингера в ускоренной системе отличается от обычного только добавлением члена maz , т. е. потенциальной энергии частицы с массой m в поле с потенциалом az .

*) Другими словами, можно пользоваться галилеевыми координатами и справедливой в этих координатах частной теорией относительности или, при малых скоростях, соответствующей нерелятивистской теорией. Сказанное относится и к квантовой области, где в применении к атомам и ядрам пространство — время можно считать галилеевым. Заметим, между прочим, что при анализе мысленных экспериментов, проводимом при обсуждении основ нерелятивистской квантовой механики, всё же встретился случай, когда пришлось учесть³⁷ изменение хода часов в гравитационном поле.

лось бы, утверждать и в отношении теории элементарных частиц, т. е. в вопросе о строении и свойствах электрона, протона, нейтрона и т. д. В общем это действительно так; гравитационные силы и на очень малых расстояниях ничтожны по сравнению с электромагнитными, но всё же здесь уже нельзя сделать категорических утверждений. Дело в том, что в случае элементарной частицы заранее неясно, какие расстояния существенны, а на расстояниях порядка гравитационного радиуса частицы нельзя уже пользоваться ньютоновским приближением $U_{\text{гп}} = -\frac{\chi m^2}{r}$, которое приводит к (25).

Кроме того, на очень малых расстояниях, когда поля чрезвычайно велики, могут оказаться непригодными обычно используемые в общей теории относительности уравнения тяготения. Всё это породило в своё время, вскоре после создания общей теории относительности, известные надежды на то, что эта теория и её обобщения окажутся плодотворными при решении проблемы строения элементарных частиц.

В результате, начиная с работы Эйнштейна 1919 г. (см. ³⁸) образовалось целое направление в теоретической физике, которое обычно называют попыткой построения единых теорий поля^{*}). Однако на этом пути до сих пор не было достигнуто никаких результатов, имеющих непосредственное физическое значение (имеются в виду согласующиеся с опытом новые выводы или объяснение каких-либо известных фактов, а не надежды и ожидания, которых было немало). Поэтому мы не будем останавливаться здесь на единых теориях поля, некоторые из которых отличаются большим математическим изяществом, и ограничимся ссылками на соответствующую литературу (см. ¹ гл. V, ² ч. III, ³⁹ приложение II и ⁴⁰). Нужно думать, что неудачи единых теорий поля не случайны, а связаны с тем, что в рамках этих теорий проблему элементарных частиц пытаются решать совсем без привлечения квантовых представлений или, во всяком случае, на классическом фундаменте.

Между тем, квантовые эффекты наступают на расстояниях порядка $\frac{\hbar}{m_e c} = 3,85 \cdot 10^{-11}$ для электрона и $\frac{\hbar}{m_p c} = 2,1 \cdot 10^{-14}$ для протонов и нейтронов, т. е. на расстояниях, существенно превышающих даже классические электромагнитные радиусы этих частиц, не говоря уже об их гравитационных радиусах. Поэтому представляется в высшей степени вероятным, что проблема элементарных частиц может быть решена только в рамках квантовой теории, а не отправляясь от классической (неквантовой) теории поля.

^{*}) Термин «единая теория поля» связан с тем, что в теориях этого типа фигурируют два поля (гравитационное и электромагнитное), которые стараются возможно теснее связать между собой, рассматривая обычно как некое единое поле с соответствующим числом компонент.

Сказанное не означает ещё, что учёт гравитационных эффектов в теории элементарных частиц обязательно должен быть несущественен, поскольку представляется возможным рассматривать эти эффекты и в квантовой теории поля. Более того, в квантовой теории электрона и квантовой электродинамике имеются даже более веские основания для привлечения гравитационных эффектов, чем в классической теории. Дело в том, что в классической электродинамике собственная энергия заряженного шарика с радиусом r_e («классическая модель» электрона) порядка $\frac{e^2}{r_e}$ и, если масса электрона является электромагнитной, $\frac{e^2}{r_e} = mc^2$, откуда и получается выражение для «классического радиуса» электрона $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$. В квантовой теории поля имеют место такие эффекты, как поляризация вакуума и нулевые колебания поля, в результате чего собственная электромагнитная энергия электрона порядка $m_e c^2 \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \ln \frac{\hbar}{m_e c r_e}$, где $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$ — постоянная Планка (делённая на 2π) и r_e — «квантовый радиус» электрона (подробнее см., например, ⁴¹). Приравнявая указанную собственную энергию энергии покоя $m_e c^2$, получаем для r'_e выражение

$$r'_e \sim \frac{\hbar}{m_e c} e^{-\frac{\hbar c}{e^2}} \sim 10^{-70} \text{ см.} \quad (26)$$

Поскольку r'_e меньше гравитационного радиуса $r_g \sim 10^{-55}$ см, ясно, что всё рассмотрение, проводимое без учёта гравитационного поля незаконно, и можно было бы думать, что гравитация существенна для теории электрона (см., в частности, ^{42, 43}). Этот вывод, однако, ни в какой мере не является бесспорным, поскольку электрон взаимодействует не только с электромагнитным и гравитационным полями, но и с мезонными полями. При этом взаимодействие с мезонным полем значительно сильнее гравитационного, в силу чего гравитационные эффекты должны, казалось бы, быть всё же совершенно несущественными (см., например, ⁴⁴). С другой стороны, не исключено, хотя это и представляется нам крайне мало вероятным, что мезонные эффекты как-то компенсируются или являются «неэффективными» при вычислении собственной энергии, оставляя тем самым место для действия гравитации.

Если не сама гравитация, то методы и аппарат общей теории относительности представляют интерес для теории элементарных частиц ещё и в другом разрезе. В настоящее время становится всё более и более общепринятым мнение, что решение фундаментальных проблем теории элементарных частиц, этой главной задачи теоретической физики, потребует радикального пересмотра представлений о пространстве и времени в области микроскопических масшта-

бов $l \sim \frac{\hbar}{m_{pc}} \sim 10^{-14}$ см и $t \sim \frac{l}{c} \sim 10^{-25}$ сек. Подобная программа представляется естественной, поскольку до сих пор в области микроявлений неограниченно используются пространственно-временные представления, понятия и образы, заимствованные из макроскопической физики, но могущие оказаться неадекватными действительности при переходе к совсем другим масштабам. По какому пути пойдёт здесь развитие, совершенно не ясно, но представляется возможным, что привлечение соответствующим образом обобщённых методов общей теории относительности окажется в этом отношении особенно плодотворным, поскольку пространственно-временные представления, связанные с этой теорией, являются наиболее богатыми из известных *).

Итак, общая теория относительности, понимаемая достаточно широко, оказывается связанной с современными исследованиями в области теории элементарных частиц, но только будущее покажет, насколько эти связи глубоки и существенны.

Совершенно иначе обстоит дело в астрономии и, в особенности, в космологии, где выдающаяся роль общей теории относительности не вызывает сомнений. Это, разумеется, объясняется просто тем, что во Вселенной силы тяготения играют основную роль. Правда, в пределах солнечной системы и на звёздах гравитационное поле является слабым (см. условие (2)), вследствие чего релятивистские эффекты хотя и заметны, но всё же относительно малы (даже на поверхности белого карлика Сириус В $\frac{|\varphi|}{c^2} \sim 10^{-4}$ **).

Но при рассмотрении больших областей Вселенной положение меняется. Самый мощный современный телескоп (диаметр зеркала 5 м) позволяет получать отдельные сведения об областях, удалённых от нас на $\sim 2 \cdot 10^9$ световых лет и даёт возможность изучать красное смещение в спектрах внегалактических туманностей (см. ниже) до расстояний $\sim 10^9$ световых лет $= 10^{27}$ см. Далее, средняя плотность вещества ρ_0 в областях, содержащих много туманностей, по имеющимся данным, примерно одинакова во всей доступной наблюдению части вселенной ***) , причём $\rho_0 \sim 10^{-28} \div 10^{-29}$ г/см³. Отсюда ясно, что уже в доступной в настоящее время наблюдению области пространства нужно, вообще говоря, пользоваться общей теорией относительности, поскольку для такой области с радиусом

*) В этой связи см., например, ⁴⁵.

**) Исключение составляют «нейтронные ядра» (центральные области звёзд, состоящие из нейтронов), которые появляются в определённых звёздных моделях и обладают столь малыми радиусами, что гравитационное поле является сильным и рассмотрение нужно, вообще говоря, проводить на основе общей теории относительности ⁴⁶. Вопрос о том, имеются ли нейтронные ядра в каких-либо существующих звёздах, ещё не выяснен.

***)) Утверждение о том, что средняя плотность вещества во вселенной везде одинакова, называют иногда «космологическим принципом».

$R \sim 2 \cdot 10^{27}$ см и плотностью $\mu_0 \sim 5 \cdot 10^{-29}$ г/см³ гравитационный радиус $\rho = \frac{\kappa M}{c^2} \sim \frac{4\pi\mu_0 R^3}{c^2} \sim 10^{26}$ сравним с радиусом области и, значит, гравитационное поле не является слабым.

Таким образом, при анализе космологических вопросов, т. е. вопросов о строении Вселенной в больших масштабах, необходимо опираться на общую теорию относительности.

Не имея возможности излагать здесь хотя бы даже основы релятивистской космологии*), ограничимся всего лишь несколькими замечаниями. Помимо однородности распределения средней плотности вещества в пространстве (см. выше), основным экспериментальным космологическим фактом является красное смещение линий в спектрах внегалактических туманностей, которое пропорционально расстоянию до туманности (закон Хаббла, 1929 г.):

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \equiv \frac{v_{\text{эф}}}{c} = \frac{H}{c} r, \quad (27)$$

где λ_0 и λ — длина волны какой-либо спектральной линии соответственно для земного источника и в спектре туманности, $v_{\text{эф}}$ — эффективная скорость туманности (радиальная скорость, которую она должна иметь, если смещение линий объясняется эффектом Доплера), r — расстояние от Земли до туманности и H — постоянная Хаббла. По современным данным⁵⁰ $H = 6,47 \cdot 10^{-18}$ сек⁻¹, т. е. $\frac{1}{H} = 4,9 \cdot 10^9$ лет, или согласно⁵¹ $\frac{1}{H} = 5,4 \cdot 10^9$ лет с точностью $\pm 20\%$ (ещё несколько лет назад приводилось в 2–3 раза меньшее значение $\frac{1}{H}$, что было связано с неправильным определением расстояний до туманностей).

Космологическое красное смещение измерено до расстояний $\sim 10^9$ световых лет, где оно отвечает колоссальной скорости $v_{\text{эф}} \cong 6 \cdot 10^9 \frac{\text{см}}{\text{сек}} = \frac{c}{5}$. Неоднократно предпринимались попытки объяснить это красное смещение какими-либо процессами, происходящими со светом на пути от туманности до Земли («старение» фотонов). Однако все эти попытки не привели ни к каким результатам и можно утверждать, что космологическое красное смещение

*) Применение общей теории относительности для исследования космологической проблемы было начато Эйнштейном⁴⁷ и затем продолжалось целым рядом авторов, среди которых наиболее существенные результаты получил А. А. Фридман⁴⁸. Значение работ А. А. Фридмана видно уже из того, что почти всё изложение релятивистской космологии в своей книге³⁹ Эйнштейн называет «не чем иным, как изложением идеи Фридмана». С релятивистской космологией можно познакомиться по следующим источникам:³⁹ приложение I³ §§ 102–105^{24, 49, 50}.

не может быть объяснено никакими известными в физике эффектами, происходящими при распространении света. Поэтому представляется в высокой степени вероятным, что красное смещение обусловлено Допплер-эффектом и указывает на реальное «разбегание» туманностей^{*)}. Отсюда следует вывод, что наблюдаемая нами область Вселенной находится в ярко выраженном нестационарном состоянии и что примерно 5 миллиардов лет назад, когда туманности ещё «не успели разбежаться», физические условия в указанной области были существенно отличными от имеющих место в настоящее время. Этот вывод не противоречит данным о солнечной системе, поскольку её возраст не превосходит $2 \div 5$ миллиардов лет (например, возраст метеоритов составляет $2 \div 4 \cdot 10^9$ лет⁵⁶). С другой стороны, существование в прошлом физических условий, отличных от современных, позволяет подойти к вопросу об образовании элементов и понять, почему в настоящее время сохранились естественно-радиоактивные вещества, несмотря на то, что их время жизни обычно не превосходит нескольких миллиардов лет (для урана период полураспада $T = 4,5 \cdot 10^9$ лет). Правда, существуют попытки объяснить происхождение элементов вне связи с космологией, но этот вопрос здесь не место обсуждать, тем более, что единственная цель сказанного состоит в том, чтобы указать на наличие фактов и доводов, убедительно говорящих в пользу гипотезы о нестационарности известной части Вселенной. Дальнейшая проверка этого предположения, конечно, нужна и производится, но представляется совершенно недопустимым отвергать его из каких-то априорных соображений или на том основании, что нестационарная космология использовалась иногда для не имеющих ничего общего с её существом фидейстических выводов. Отвергать идеи о нестационарности Вселенной только потому, что эти идеи используются для ненаучных выводов, столь же мало обосновано, как, например, отрицать квантовую механику, потому что из неё делались не имеющие к ней никакого отношения «выводы» о «свободе воли» и т. п.

Крупным успехом общей теории относительности в свете сказанного является следующее обстоятельство. Если рассматривать пространство, равномерно заполненное материей, то решение уравнений общей теории относительности, в которые не вносятся

^{*)} Предположение о доплеровском характере космологического красного смещения допускает экспериментальную проверку^{50, 52, 53}, которая связана, в первую очередь, с наблюдением отклонений от линейного закона (27) и доплеровским изменением длительности различных процессов в удаленных туманностях, например, изменением периода колебаний цефеид и времени яркого свечения сверхновых звёзд. К сожалению, прогресс в области крайне трудных экспериментальных исследований космологического красного смещения происходит очень медленно; тем не менее сейчас здесь можно ожидать дальнейших успехов в связи с использованием 5-метрового телескопа⁵⁴ и с привлечением радиоастрономических данных^{53, 55}.

никаких изменений, автоматически оказывается нестационарным и находится в соответствии с наблюдениями (при интерпретации космологического красного смещения, как «разбегания» туманностей)*).

Неудивительно, что этот факт привлекает к релятивистской космологии особое внимание.

Итак, в космологии общая теория относительности не только широко используется, но и привела уже к большому успеху, несмотря на то, что в этой области сделаны, по существу, только первые шаги. Не приходится сомневаться в том, что и дальнейший прогресс здесь возможен только на основе общей теории относительности.

Поскольку эта статья написана всего лишь через несколько месяцев после того, как закончился жизненный путь великого создателя теории относительности, хочется в заключение сказать несколько слов об особенностях его научного творчества.

Первая особенность, всем хорошо известная, состоит в смелости и глубине идей Эйнштейна, совершившего подлинный переворот в физике. Насколько давно это было осознано, видно, например, из того, что ещё в 1910 г. М. Планк называл Эйнштейна «Коперником 20-го столетия».

Вторая особенность — широта и разнообразие интересов, почти одновременная работа во многих областях физики. Так, в одном только 1905 г. появились частная теория относительности, гипотеза световых квантов и теория броуновского движения. Или второй пример: в 1907 г. Эйнштейн построил первую квантовую теорию теплоёмкости твёрдых тел, занимался теорией броуновского движения и начал построение общей теории относительности. Помимо общеизвестных работ по теории относительности, квантовой теории и теории броуновского движения Эйнштейну принадлежат: теория рассеяния света в жидкостях, основы теории дисперсии звука в газах, идея гироманнитных опытов и целый ряд других исследований.

*) Подробнее и точнее см. указанную литературу; особо см. §§ 102—105, где сделаны некоторые оговорки о возможности сравнения нестационарных решений, о которых идёт речь, с действительностью.

Нестационарные решения (они впервые были найдены Фридманом), имеют отвечающие началу расширения особые точки, в которых плотность энергии бесконечна. Этот момент, вызывающий возражения различного характера, по авторитетному мнению Эйнштейна (см. ³⁰, приложение I) свидетельствует лишь об ограниченной применимости уравнений общей теории относительности при чрезвычайно больших плотностях энергии (на то же указывают и квантовые соображения). Таким образом, нет оснований «пугаться» особенностей и возражать поэтому против применения релятивистских космологических решений в областях с очень большой, но конечной плотностью энергии, о чём только и идёт речь в действительности.

Третья особенность — исключительная законченность работ Эйнштейна. Из истории физики известно немало примеров, когда содержание крупных научных открытий не было до конца осознано их авторами, когда важнейшие новые результаты оставались вначале только частично понятыми. Особенно близкой к нашему времени иллюстрацией сказанного могут явиться первые работы де-Бройля, Гейзенберга и Шредингера по квантовой механике (например, даже в наиболее прозрачных, из числа упомянутых, работах Шредингера оставался неясным смысл той Ψ -функции, для которой Шредингер установил своё волновое уравнение). Иначе обстоит дело с работами Эйнштейна. В работе по частной (специальной) теории относительности²⁵ эта теория сразу изложена в законченной форме; в статье всё правильно и, читая её через 50 лет после опубликования, видишь, что по ней и сейчас можно знакомиться и изучать теорию относительности, видишь, как мало добавлено в этих вопросах позднейшими исследованиями. Законченность, классический стиль изложения отличают и большинство других работ Эйнштейна, хотя, разумеется, ему случалось ошибаться и идти по неверному пути, что Эйнштейн сам не раз подчёркивал (см., например, ¹⁷, стр. 285). Сказанное относится в полной мере и к общей теории относительности. В работе 1916 г. (см. ⁵) эта теория изложена её автором почти так же, как она излагается в большинстве курсов и в настоящее время. Несмотря на 40 прошедших лет, в этой работе ничего по сути дела не нужно изменять, а дополнения, которые можно было бы сделать, имеют весьма небольшой удельный вес (мы уже не говорим о том, что эти «добавления» к теории принадлежат в основном самому Эйнштейну)*).

Здесь следует сделать ещё лишь одно замечание.

Основным физическим положением в общей теории относительности является «принцип эквивалентности», опирающийся на экспериментально установленное равенство инертной и тяжёлой массы и приводящий к описанию гравитационного поля с помощью метрического тензора g_{ik} . Вместе с тем, при построении теории очень большую роль сыграло также другое положение, носящее в первую очередь методический и эвристический характер, а именно «принцип общей ковариантности» или «принцип общей относительности», как

*) Добавления, которые имеются в виду, сводятся в основном к нескольким разъяснениям^{53, 59} и исследованию вопросов о гравитационных волнах⁶⁰ и о получении уравнений движения из уравнений поля (см. выше). Что же касается применения общей теории относительности к космологии и попыток построить единую теорию поля, то здесь приходится говорить о новых направлениях, а не доработке теории. При этом, как уже подчёркивалось ранее, единая теория поля, которой Эйнштейн больше всего занимался в последний период своей жизни, не оказалась плодотворной.

его часто называет Эйнштейн *). Употребление для принципа общей ковариантности последнего названия и привело к тому, что теория гравитационного поля, построенная на основе частной теории относительности и принципа эквивалентности, была названа общей теорией относительности. В своей работе 1916 г.⁵ Эйнштейн, быть может, несколько переоценил значение принципа общей ковариантности и, во всяком случае, не подчеркнул, что этот принцип сам по себе не является физическим. Однако вскоре после этого в ответ на некоторые критические замечания⁶¹ Эйнштейн вполне согласился с тем, что принцип общей ковариантности имеет в основном эвристическое значение⁵⁹. И лишь сочетание принципа общей ковариантности с принципом эквивалентности, в силу которого поле тяготения описывается только величинами g_{ik} , оказывается ключом к построению уравнений теории гравитационного поля. Но именно так Эйнштейн фактически и действовал, вследствие чего дальнейшее обсуждение основ общей теории относительности привело в целом лишь к имеющему второстепенное значение уточнению некоторых понятий и формулировок, но не к изменению существа дела **).

Не подлежит сомнению, что общая теория относительности Эйнштейна сохранится в веках как одно из величайших достижений человеческой мысли.

*) В работе 1916 г. этот принцип сформулирован так⁵: «Законы физики должны быть так составлены, чтобы они были действительны для произвольно движущихся координатных систем». В той же работе, а также в дальнейшем это положение обычно использовалось в виде более широкого требования, чтобы «законы природы были ковариантны относительно произвольных непрерывных преобразований координат». Этот принцип общей ковариантности Эйнштейн называет также общим принципом относительности, как нам кажется, в значительной мере потому, что специальный принцип относительности формулировался им в родственной форме (например, в⁵ специальным принципом или постулатом относительности называется такое утверждение: «Если координатная система K выбрана так, что относительно неё физические законы действительны в своей простейшей форме, то те же законы действительны в применении ко всякой другой системе K' , которая относительно K находится в равномерном поступательном движении»).

**) В силу всего сказанного автор никак не может согласиться с мнением В. А. Фока, который говорит о том, что «теория тяготения была неправильно понята её автором»⁶². Вместе с тем, конечно, при современном изложении теории относительности вовсе не обязательно во всём придерживаться изложения Эйнштейна, и отдельные положения теории естественно освещать несколько с другой стороны или даже существенно иначе, чем это сделано в некоторых ранних работах Эйнштейна.

К числу последних положений относится «принцип относительности инерции» или «принцип Маха», которому Эйнштейн придавал в своё время большое значение (согласно этому принципу поле g_{ik} должно полностью определяться материей)^{47, 59}. Используемые уравнения гравитационного поля этому принципу не удовлетворяют и, как в более позднее время подчёркивал сам Эйнштейн (см., например,³⁹ приложение I), сейчас нет никаких оснований изменять эти уравнения в духе принципа относительности инерции, против которого можно привести ряд возражений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты экспериментальной проверки общей теории относительности можно резюмировать следующим образом (космологические вопросы оставляем сейчас в стороне; см. § 4).

Данные, касающиеся движения перигелия Меркурия, находятся в превосходном количественном согласии с теорией (см. табл. I). В случае других планет релятивистский эффект так мал, что вряд ли представляет интерес для проверки теории (тем не менее на примере Земли ясно, что известные возможности здесь имеются). Движение перигелия должно, с другой стороны, быть весьма большим для искусственных спутников Земли (см. табл. II). В этом случае кроме того представляется, в принципе, возможным обнаружение ещё одного релятивистского эффекта — влияния на движение спутника вращения Земли.

Имеющиеся данные о гравитационном смещении спектральных линий свидетельствуют о существовании этого эффекта. В то же время, в силу ряда осложняющих моментов, существующий астрофизический материал ещё недостаточен для того, чтобы говорить об уверенной количественной проверке предсказаний теории. Помимо прогресса, который возможен в этой области в результате дальнейших астрофизических исследований, здесь можно ожидать успехов, связанных с применением радиофизических методов и использованием искусственных спутников Земли.

Наблюдения во время полных солнечных затмений привели к обнаружению отклонения световых лучей, проходящих вблизи Солнца, причём предсказания теории подтвердились в пределах достигнутой точности эксперимента, которая равна примерно 10%.

Таким образом общая теория относительности хорошо, в целом, выдержала экспериментальную проверку, и в настоящее время нет никаких оснований сомневаться в её справедливости в применении к соответствующему кругу явлений.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Паули, Теория относительности, Гостехиздат (1947).
2. П. Г. Бергман, Введение в теорию относительности, ИЛ (1947).
3. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат (1948).
4. A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuss. Acad. Wiss., стр. 831 (1915).
5. A. Einstein, Ann. d. Phys. 49, 760 (1916). Перевод в сборнике «Принцип относительности», стр. 231, ОНТИ (1935).
6. G. M. Clemence, Rev. Mod. Phys. 19, 361 (1947).
7. J. J. Gilvarry, Publ. Astronom. Soc. Pacific. 65, 173 (1953); краткое сообщение Phys. Rev. 89, 1046 (1953).
8. L. La Paz, Publ. Astron. Soc. Pacific 66, 13 (1954).
9. J. Lense u. H. Thirring, Phys. Zeits. 19, 156 (1918).
10. H. P. Robertson, Ann. Math. 39, 101 (1938).
11. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 30, 213 (1956).

12. A. Einstein, Jahrbuch f. Radiaktivität, 4, 441 (1907).
13. A. Einstein, Ann. d. Phys. 35, 898 (1911). Перевод в сборнике «Принцип относительности», стр. 217, ОНТИ (1935).
14. С. И. Вавилов, Экспериментальные основания теории относительности, ГИЗ (1928).
15. П. П. Паренаго, Курс звездной астрономии, § 25, Гостехиздат (1954).
16. E. Finlay-Freundlich, Phil. Mag. 45, 303 (1954).
17. В. Л. Гинзбург, ДАН 97, 617 (1954).
18. E. M. Burbidge a. G. R. Burbidge, Phil. Mag. 45, 1019 (1954).
19. M. G. Adam, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 108, 446 (1948).
20. E. F. Freundlich, A. V. Brunn u. H. Brück, Zeits. f. Astrophys. 1, 43 (1950).
21. C. H. Townes, Journ. Apl. Phys. 22, 1365 (1951).
22. Н. Г. Басов и А. М. Прохоров, УФН 57, 485 (1955).
23. J. P. Gordon, H. J. Zeiger a. C. H. Townes, Phys. Rev. 99, 1264 (1955).
24. R. C. Tolman, Relativity Thermodynamics and Cosmology, Oxford (1934).
25. A. Einstein, Ann. d. Physik 17, 891 (1905). Перевод в сборнике «Принцип относительности», стр. 133, ОНТИ (1935).
26. J. Soldner, Ann. d. Phys. 65, 593 (1921).
27. Irish Astron. Journ. 3, 58 (1954); данные по реф. журналу «Астрономия» № 7, 78 (1955).
28. А. А. Михайлов, Астрон. журнал 19, № 6, 1 (1942).
29. G. Van Biesbroeck, Astron. Journ. 55, 49 (1950).
30. G. Van Biesbroeck, Astron. Journ. 58, 57 (1953).
31. A. S. Eddington, The Mathematical Theory of Relativity, § 56 (1923). Перевод «Теория относительности», ГТТИ (1934).
32. A. Einstein a. J. Grommer, Sitzungsberichte d. Preuss. Akad. Wiss., стр. 2 (1927); A. Einstein, L. Infeld a. B. Hoffmann, Ann. Math. 39, 65 (1938); A. Einstein a. L. Infeld, Ann. Math. 41, 455 (1940); Canadian Journ. Math. 3, 209 (1949); L. Infeld a. A. Schild, Rev. Mod. Phys. 21, 408 (1949); A. E. Scheidegger Rev. Mod. Phys. 25, 451 (1953).
- 32a. A. S. Eddington a. G. L. Clark, Proc. Roy. Soc. 166, 464 (1938).
33. В. А. Фок, ЖЭТФ 9, 375 (1939); ДАН 32, 28 (1941); Н. М. Петрова ЖЭТФ 19, 989 (1949); И. Г. Фихтенгольц, ЖЭТФ 20, 233 (1949).
34. Л. Инфельд, Бюллетень Польской Академии наук, Отдел III, 3, 211 (1955).
35. C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. 154, 61 (1936).
36. В. Л. Гинзбург, Сборник «Памяти А. А. Андропова», стр. 622, Изд-во АН СССР (1955).
37. N. Bohr, Сборник «A. Einstein: philosopher-scientist», стр. 199, США (1949).
38. A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuss. Acad. Wiss., стр. 349 (1919). Перевод в сборнике «Принцип относительности», стр. 332, ОНТИ (1935).
39. A. Einstein, The Meaning of Relativity, 4-е изд. Princeton (1953). Перевод «Сущность теории относительности», ИЛ (1955).
40. Ю. Б. Румер, ЖЭТФ 19, 86, 207, 868 (1949); 21, 1403 (1951); 22, 740; 23, 35 (1952).
41. В. Вайскопф, УФН 41, 165 (1950).
42. М. А. Марков, ЖЭТФ 17, 848 (1947).
43. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов и И. М. Халатников, ДАН 95, 1177 (1954); 96, 261 (1954).
44. В. П. Силин, ЖЭТФ 21, 462 (1951).
45. O. Klein, Сборник «Niels Bohr and the development of physics», стр. 96, London (1955).

46. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Статистическая физика, гл. XI, Гостехиздат (1951).
47. A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. Wissensch., стр. 142 (1917). Перевод в сборнике «Принцип относительности», стр. 315, ОНТИ (1935).
48. А. А. Фридман, Zeits f. Phys. 10, 377 (1922), 21, 326 (1924). Журнал Русского физ.-хим. об-ва, часть физическая 56, 59 (1924).
49. L. Infeld, Сборник «A. Einstein: Philosoph-Scientist», стр. 475, США (1949).
50. H. P. Robertson, Publ. Astron. Soc. Pacific. 67, 82 (1955).
51. Nature 176, 330 (1955).
52. S. N. Milford, Astrophys. Journ. 122, 13 (1955).
53. И. С. Шкловский, Астроном. журн. 30, 495 (1953).
54. E. Hubble, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 113, 658 (1953).
55. M. Ryle a. P. A. G. Scheuer, Proc. Roy. Soc. 230, 448 (1955).
56. P. Reasbeck a. K. I. Mayne, Nature 176, 186 (1955).
57. A. Einstein Ideas and Opinions. New York (1954).
58. A. Einstein, Ann. d. Phys. 51, 639 (1916).
59. A. Einstein, Ann. d. Phys. 55, 241 (1918).
60. A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. Wiss. стр. 154 (1918).
61. E. Kretschmann, Ann. d. Phys. 53, 575 (1917).
62. В. А. Фок, Вопросы философии № 4, 131 (1955).