

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**ФИЗИЧЕСКИЕ ИДЕИ МЕТОДА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ВОЗБУЖДЕНИЙ****(Многоэлектронная задача в теории твёрдого тела)****В. Л. Бонч-Бруевич****§ 1. ВВЕДЕНИЕ. ТРУДНОСТИ «ОДНОЭЛЕКТРОННОЙ» ТЕОРИИ
МЕТАЛЛОВ**

Проблема исследования систем, состоящих из многих взаимодействующих частиц, занимает одно из центральных мест в современной физике конденсированных сред. Она, как мы увидим, особенно остро стоит в теории металлического состояния (а также в теории жидкости); однако даже и в теории полупроводников, где, казалось бы, взаимодействием электронов проводимости друг с другом можно пренебречь, поскольку концентрация их мала, встречаются задачи, в которых учёт межэлектронного взаимодействия обязателен. Достаточно вспомнить хотя бы следующее стандартное рассуждение: благодаря (например) неравномерному распределению примеси в решётке концентрация электронов в ней также оказывается различной в различных местах и перераспределение электронов продолжается до тех пор, пока возникающий объёмный заряд не создаст поля, препятствующего дальнейшему перемещению электронов. Подобные рассуждения постоянно встречаются в теории поверхностных состояний, фото-эдс и т. д., и они, как это ясно видно, целиком основаны на наличии взаимодействия электронов друг с другом. В то же время корректное решение квантовомеханической (а равно и классической) задачи о поведении системы многих взаимодействующих частиц представляет значительные трудности. В настоящей статье мы хотели бы, не вдаваясь в детали расчётов, изложить существо одного из методов приближённого решения задачи многих тел, который кажется нам наиболее перспективным и который наиболее интенсивно развивается в последнее время. Изложение не претендует на исчерпывающую полноту;

задача состоит лишь в ознакомлении читателя-нестеоретика с существом дела.

Поскольку основной «сферой применения» методов решения задачи многих тел в настоящее время является физика твёрдого тела, уместно начать с рассмотрения некоторых трудностей современной теории металлов. Последняя, невзирая на наличие фактически сильного взаимодействия между электронами, до последнего времени развивалась почти исключительно как «одноэлектронная» *) теория, в которой корреляция между электронами либо вообще не принималась во внимание (простейшая модель «электронного газа» ¹⁾), либо учитывалась лишь весьма приближённо методом самосогласованного поля. Тем не менее ряд качественных выводов «одноэлектронной» теории (даже в её наиболее примитивной форме) находится в хорошем согласии с опытом. Сюда относятся, например, температурные зависимости электропроводности и электронной теплоёмкости металлов, теория парамагнетизма щелочных металлов и др. Это обстоятельство на первый взгляд кажется парадоксальным: физически несостоятельная теория приводит к правильным результатам; очевидно ², задача теории металлов состоит прежде всего в том, чтобы понять причины этого парадокса **). Заметим, однако, что успехи «одноэлектронной» модели не следует переоценивать (а такая переоценка зонной теории металлов, бесспорно, имеет место в ряде работ ***); особенно характерны в этом отношении цитированные выше книги Мотта и Джонса и Зейтца).

Ряд явлений вообще не получает объяснения в рамках «одноэлектронной» теории (к числу их, повидимому, относится, например, сверхпроводимость), другие же явления объясняются лишь, мы бы сказали, чисто формально. Пожалуй, наиболее яркий пример

*) Исключение составляет лишь теория ферромагнетизма, в которой необходимость существенно «многоэлектронной» трактовки была осознана уже давно.

***) Попытка решить вопрос тривиальным путём, считая энергию взаимодействия между электронами малой по сравнению с их кинетической энергией, оказывается несостоятельной. Действительно, энергия Ферми для электронного газа, как известно, даётся формулой

$$E_F = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} n^{2/3},$$

где n — число электронов в единице объёма; m — масса электрона; средняя же энергия кулоновского взаимодействия, очевидно, будет порядка

$$e^2 n^{1/3}.$$

Отношение этих энергий порядка $4 \cdot 10^7 n^{-1/3}$, что при разумных ($\sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$) значениях n представляет собой величину порядка единицы. Это обстоятельство, как нам кажется, лишает смысла само представление о «фермисфере» для электронов в металле.

***)) Зонная теория металлов неоднократно подвергалась справедливой критике в трудах советских учёных ²⁻⁶.

такого формального объяснения мы встречаем в теории магнитных свойств металлов при низких температурах. Как известно, при низких температурах магнитная восприимчивость χ ряда металлов периодически зависит от напряжённости магнитного поля H . В качественной форме этот эффект, казалось бы, прекрасно объясняется «одноэлектронной» теорией⁷⁻⁹, которая действительно даёт нужную периодическую зависимость. При определённом выборе параметров, входящих в теоретическую формулу (эффективной массы*) и концентрации электронов проводимости), в большинстве случаев получается и количественное согласие теории с опытом. Однако более внимательное рассмотрение вопроса¹⁰ показывает, что это объяснение в значительной степени иллюзорно. Именно, для параметров, входящих в теоретическую формулу, получаются неправдоподобно малые (и не согласующиеся с данными других измерений) значения. Так, например, для цинка число электронов проводимости, приходящееся на один атом, оказалось порядка $0,8 \cdot 10^{-6}$, что, как указано в¹¹, составляет лишь одну тысячную от числа, необходимого для объяснения экспериментально наблюдаемых значений электронной теплоёмкости этого металла. Аналогично обстоит дело и для других металлов (бериллия и висмута). Таким образом, оказывается, что «одноэлектронная» теория правильно передаёт лишь качественный вид зависимости, но отнюдь не количественную сторону дела. Однако вид кривой $\chi(H)$ определяется в значительной мере только статистическими свойствами системы. С конкретными значениями параметров, зависящих от природы системы (например, с массами, зарядами и концентрацией частиц) связаны лишь численные характеристики кривой.

В связи с этим следует заметить, что и для получения, например, качественной картины температурного хода электронной теплоёмкости тоже нужно знать только статистику электронов; равным образом, только статистические свойства электронов и тепловых колебаний решётки определяют вид температурной зависимости электропроводности металлов.

Таким образом, в одноэлектронной теории правильно получаются отнюдь не все соотношения, а лишь те, которые обусловлены, в основном, статистическими свойствами системы — тем фактом, что электроны подчиняются статистике Ферми; те же закономерности, в которых существенен конкретный вид энергетического спектра и конкретные значения определяющих его параметров, «одноэлектронная» теория металлов, как правило, не передаёт.

*) Правильнее было бы сказать «эффективных масс», ибо благодаря анизотропии кристаллических решёток рассматриваемых металлов электроны в них характеризуются не одной, а тремя эффективными массами (соответственно трём главным осям кристалла).

Для разъяснения указанного выше «парадокса», а равно и для исследования пока ещё не решённых задач теории металлов, представляется необходимым «многоэлектронный» подход к задаче. Мы приходим таким образом к задаче об исследовании свойств системы многих сильно взаимодействующих друг с другом частиц.

§ 2. ГИПОТЕЗА «ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ»

Трудности решения поставленной задачи заключаются в следующем:

а) Волновое уравнение для системы многих ($\sim 10^{23}$) взаимодействующих частиц является исключительно сложным; точное решение его средствами современной математики, даже машинной, едва ли возможно.

б) Даже если бы удалось точно определить возможные уровни энергии рассматриваемой системы многих тел, для нахождения ряда наблюдаемых на опыте величин (теплоёмкости, магнитной восприимчивости и т. д.) пришлось бы ещё вычислять статистическую сумму

$$Z = \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}} \quad (2.1)$$

(E_n — возможные уровни энергии, нумеруемые индексом n). Действительно, зная Z , можно, как известно, найти свободную энергию и, следовательно, все термодинамические свойства системы. Эта задача, вообще говоря, немногим проще первой (напомним, что классический аналог (2.1) представляет собой интеграл кратности $\sim 10^{23}$, причём подинтегральное выражение, вообще говоря, не представляется в виде произведения сомножителей, зависящих каждый от небольшого числа переменных).

Названные трудности исключительно серьёзны, и при современном состоянии математики едва ли имеет смысл пытаться решать их «в лоб». Из рассмотрения выражения для статистической суммы (2.1), однако, явствует, что практически такая общая постановка задачи и не обязательна. Действительно, заметную роль в (2.1) играют лишь уровни энергии, достаточно близкие к основному. Поэтому можно ограничиться только исследованием таких «слабо возбуждённых» состояний системы. Это обстоятельство, как мы увидим, чрезвычайно сильно упрощает задачу.

В нескольких конкретных случаях задача о слабо возбуждённых состояниях системы многих частиц уже давно была решена. Мы напомним здесь два хорошо известных примера и рассмотрим их (с чисто качественной стороны), имея в виду выявить некоторые особенности поведения таких систем, имеющие, как потом окажется вполне общий характер.

А. Колебания кристаллической решётки

Задача о тепловых колебаниях кристаллической решётки, повидимому, представляет собой исторически первый пример исследования коллективного поведения многих взаимодействующих частиц. Очевидно, энергетически наинизшим здесь является состояние «полного упорядочения», когда все атомы (или ионы) решётки равномерно (и периодически) распределены в пространстве*). Возбуждение системы состоит в возникновении малых колебаний атомов около положений равновесия; пространственное распределение атомов при этом, естественно, будет слегка неоднородным. Иначе говоря, возбуждение системы в данном случае состоит в появлении некоторых «особых состояний» — локальных изменений плотности; последние не «застывают» на одном месте, а волнообразно распространяются по всей решётке (частным случаем этих волн являются обычные звуковые колебания).

При малых (по сравнению с межатомными расстояниями) амплитудах колебаний (это и есть условие «малости возбуждения») для упругих волн справедлив принцип суперпозиции, т. е. они распространяются независимо друг от друга, а энергия системы аддитивно складывается из энергий отдельных волн.

При квантовомеханическом рассмотрении задачи¹²⁻¹⁴ этим волнам, естественно, сопоставляются дискретные образования — звуковые кванты**) (фононы). Взаимодействие между последними отсутствует, коль скоро для соответствующих волн справедлив принцип суперпозиции («гармоническое» приближение).

Таким образом, с энергетической точки зрения слабо возбуждённые состояния кристаллической решётки можно рассматривать как «идеальный газ» некоторых «квазичастиц» — фононов. Подчёркнём, что эти «квазичастицы» не имеют ничего общего с атомами, составляющими данную систему, а представляют лишь корпускулярный аспект коллективного колебательного движения последних.

Состояние фонона (в простой решётке) задаётся его поляризацией (продольная или поперечная волна) и тремя компонентами некоторого вектора (во многом аналогичного импульсу), которыми определяется энергия. Поскольку принципиально возможные значения силы звука в решётке не ограничены***), в одном и том же

*) Мы рассуждаем по форме чисто «классически», отвлекаясь от существования нулевых колебаний, наличие которых несущественно для наших рассуждений.

**) Представление о звуковых квантах было впервые введено И. Е. Таммом¹².

***) Конечно, при достаточно большой интенсивности звуковых волн их уже нельзя рассматривать как независимые. Это обстоятельство, однако, несущественно для наших рассуждений (хотя бы потому, что соответствующие интенсивности гораздо больше тех, при которых сказывается «бозевский» характер статистики фононов).

состоянии может находиться любое число «квазичастиц»; следовательно, они подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна (независимо от типа статистики, которой подчиняются сами атомы, составляющие решётку). Как известно, основываясь на представлении о фононах, можно построить всю термодинамику кристаллической решётки, а также рассмотреть и ряд кинетических процессов в ней.

Б. Спиновые волны в ферромагнетике

Второй пример, который мы хотим рассмотреть, относится к слабо возбуждённым состояниям ферромагнетика. Как известно,¹³ основной энергетический уровень ферромагнетика соответствует состоянию «полного намагничивания», когда магнитные моменты всех атомов решётки ориентированы одинаковым образом*) (спины всех «магнитных»**) электронов имеют одну и ту же составляющую по некоторой оси).

Возбуждение системы состоит в изменении направлений магнитных моментов некоторых атомов (в «переворачивании» спинов у части «магнитных» электронов), т. е., как и в первом примере, в появлении некоторых особых состояний (в данном случае спинов одного направления в «среде» спинов противоположного направления), волнообразно распространяющихся по всей кристаллической решётке.

Действительно, в силу физической эквивалентности различных узлов решётки очевидно, что состояние с «перевернутым» спином не может «застрять» на каком-то одном атоме***), а будет благодаря взаимодействию электронов друг с другом распространяться по решётке. В стационарном случае «перевернутый» спин может быть с одинаковой вероятностью обнужден на любом атоме решётки (если она простая). Эти состояния носят название спиновых волн. До тех пор, пока число «перевернутых» спинов мало по сравнению с общим числом «магнитных» электронов (условие малости возбуждения) и, следовательно, вероятность их встречи в решётке мала, можно считать, что спиновые волны распространяются независимо друг от друга и каждая из них характеризуется определённой энергией. Энергия системы электронов

*) При учёте слабого магнитного взаимодействия электронов это утверждение требует некоторого уточнения, что, однако, ничего не изменит в наших рассуждениях по существу.

**) Магнитными мы называем здесь электроны, спины которых (в отсутствие магнитного поля) могут ориентироваться в любом направлении (т. е., например, электроны, находящиеся в незаполненных атомных оболочках).

***). Речь идёт здесь только об идеальной решётке, не содержащей каких-либо дефектов структуры, нарушающих трансляционную инвариантность системы.

при этом (с точностью до несущественной аддитивной постоянной) складывается из энергий отдельных спиновых волн. Естественно, последним можно сопоставить некоторые «квазичастицы» (иногда называемые «ферромагнонами», ибо они характерны для ферромагнетиков), и мы, как и в первом примере, приходим к представлению об идеальном газе некоторых «квазичастиц», изображающем слабо возбуждённые состояния системы сильно взаимодействующих частиц (в данном случае — электронов в ферромагнетике). Вновь подчеркнём, что эти квазичастицы не имеют ничего общего с самими электронами*), а характеризуют лишь корпускулярный аспект их коллективного движения.

Представление о спиновых волнах оказалось чрезвычайно плодотворным в теории ферромагнетизма, позволив теоретически вывести зависимость спонтанного намагничивания вблизи насыщения от температуры¹⁶ и от величины внешнего поля¹⁷, а также построить квантовую теорию магнитной анизотропии¹⁸ и магнито-стрикции¹⁹.

Мы видим, что в обоих рассмотренных случаях энергия, соответствующая слабо возбуждённым состояниям системы, представляется в виде суммы энергий независимых «квазичастиц», и исследование свойств системы в этих состояниях сводится к изучению поведения «газа» квазичастиц (т. е. к хорошо известной и без труда решаемой задаче). Поскольку системы, которые мы рассматривали, физически совершенно различны, естественно предположить, что это положение вещей характерно и для любой квантовой системы многих взаимодействующих частиц: возбуждение системы всегда сводится к появлению каких-то особых состояний — «элементарных возбуждений», которые (в силу трансляционной инвариантности) волнообразно распространяются по системе; слабо возбуждённые состояния любой квантовой системы многих взаимодействующих частиц можно представить как идеальный газ некоторых «квазичастиц», сопоставленных этим волнам**).

Возможные значения энергии квазичастиц, их момента количества движения и других подобных величин, а также статистика, которой подчиняются элементарные возбуждения, дают полную характеристику слабо возбуждённых состояний системы. (В зависимости от статистики элементарных возбуждений говорят о спектрах «типа Ферми» и «типа Бозе»¹⁴, иногда употребляют также термины «фермиевская» и «бозевская» ветвь.) Квазичастицы, о которых идёт речь, вообще говоря, не имеют ничего общего с теми

*) Заметим в связи с этим, что, как известно¹⁵, спиновые волны подчиняются статистике Бозе (а не Ферми, как электроны).

**) Насколько нам известно, эта идея впервые была высказана Л. Д. Ландау. В последние годы она была предметом исследований Н. Н. Боголюбова, С. В. Вонсовского и ряда других советских учёных.

частицами, из которых состоит данная система, а представляют собой лишь определённую сторону их коллективного движения *).

Совершенно очевидно, что представление об элементарных возбуждениях сразу разрешает обе отмеченные выше трудности теории многих тел. Действительно, коль скоро значения энергии, соответствующие слабо возбуждённым состояниям системы, выражаются в виде

$$E = \sum_k \omega(k) n(k), \quad (2.2)$$

где $n(k)$ — число элементарных возбуждений, характеризуемых набором «квантовых чисел» k (например, импульсом, спином и т. д.), то задача сводится к вычислению энергии одной квазичастицы, $\omega(k)$. Можно ожидать, что это окажется значительно проще, чем решать задачу многих тел в общей её постановке. И действительно, в ряде случаев энергетический спектр элементарных возбуждений можно вычислить вполне эффективно. Различным слабо возбуждённым уровням системы соответствуют, очевидно, различные наборы чисел $n(k)$, т. е. различные распределения элементарных возбуждений по их квантовым состояниям.

Далее, вопрос о вычислении статистической суммы в этом случае вообще теряет всякую остроту, ибо мы имеем дело с идеальным газом, для которого равновесная функция распределения частиц по энергиям хорошо известна.

Наконец, ясно, что представление об элементарных возбуждениях позволяет без особого труда рассматривать и неравновесные задачи. Действительно, поскольку квазичастицам соответствуют определённые значения энергии, а также, может быть, заряда, импульса и т. д., то можно говорить о переносе ими соответствующих величин. Тем самым задачи о процессах переноса в конденсированных средах сводятся к аналогичным задачам кинетической теории идеального газа. Например, рассмотрение теплопроводности, обусловленной самой решёткой, сводится к изучению переноса энергии потоком фононов. Вопросы установления статистического равновесия в системе также можно без особого труда рассматривать методом элементарных возбуждений. Для этого следует только ввести (в качестве следующего приближения) слабое взаимодействие между квазичастицами, приводящее к установлению равновесного фермиевского или бозевского распределения их по состояниям.

*) Из сказанного следует, что, например, вполне бессмысленной была бы попытка «собрать» квазичастицы (например, фононы) «в ящик». Они существуют лишь постольку, поскольку существует система взаимодействующих частиц, испытывающих коллективное движение, отображаемое представлением о квазичастицах; с разрушением системы (например, с испарением кристалла) исчезают, естественно, и соответствующие элементарные возбуждения.

Действительно, с точки зрения представления об элементарных возбуждениях установление термодинамического равновесия в системе многих взаимодействующих частиц сводится к установлению равновесного распределения в газе «квазичастиц».

Эффективность метода элементарных возбуждений была продемонстрирована в ряде работ, посвящённых решению конкретных равновесных и неравновесных задач. Среди этих работ следует прежде всего назвать теорию сверхтекучести жидкого гелия II²⁰⁻²⁴, впервые успешно развитую Л. Д. Ландау исключительно на основе представления об элементарных возбуждениях*). В работе Н. Н. Боголюбова²¹, в которой был теоретически рассчитан спектр элементарных возбуждений в газе бозе-частиц, слабо взаимодействующих друг с другом, эти представления получили микроскопическое обоснование. Примером успешного применения метода элементарных возбуждений является также развитая И. Я. Померанчуком²⁵ теория теплопроводности парамагнитных диэлектриков. В этих веществах имеются специфические возбуждения, связанные с наличием обменного взаимодействия электронов парамагнитных атомов. Именно, подобно ферромагнетику, возбуждённые состояния системы в данном случае могут отличаться от основного другим распределением магнитных моментов (разница по сравнению с ферромагнитным случаем состоит в том, что теперь основное состояние не соответствует полному намагничению. Указать точное распределение магнитных моментов в основном состоянии парамагнетика в отсутствие внешнего поля затруднительно; для наших целей, однако, достаточно знать лишь, что какое-то такое распределение существует). Естественно, отклонения от основного распределения магнитных моментов не локализованы на отдельных атомах, а благодаря взаимодействию электронов друг с другом волнообразно распространяются по всей решётке. Эти элементарные возбуждения носят название магнонов. (Для слабо возбуждённых состояний, когда число магнонов мало по сравнению с общим числом атомов в решётке, энергией их взаимодействия друг с другом можно пренебречь, и, следовательно, энергия возбуждения есть сумма энергий отдельных магнонов). Магноны (подчиняющиеся, повидимому, статистике Ферми) взаимодействуют с фононами, влияя таким образом на их свободный пробег, а также и сами принимают участие в переносе тепла. Как показано в²⁵, это приводит к специфическим особенностям в температурном ходе теплопроводности κ при низких температурах (зависимость $\kappa(T)$ оказывается немонотонной).

Помимо этого, метод элементарных возбуждений успешно применялся при исследовании приближения к состоянию равновесия в ферро- и парамагнетиках^{26,27}. Он использовался также в попытках

*) Эти исследования не рассматриваются здесь детально, ибо в литературе имеется подробный обзор⁶⁵, к которому и отсылаем читателя.

построения многоэлектронной теории металлов и полупроводников, о чем пойдёт речь в следующем параграфе.

Заметим, наконец, что и во всех остальных случаях последовательное (хотя и приближённое) рассмотрение задачи многих тел «само собой» приводит к представлению об элементарных возбуждениях. Так, например, обстоит дело в теории антиферромагнетизма, развивающейся на основе несколько обобщённого представления о спиновых волнах²⁸⁻³¹; слабо возбуждённые состояния молекулярных кристаллов оказывается возможным описывать с помощью представления об экситонах³²⁻³⁵ — «квазичастицах», движение которых характеризует перемещение энергии возбуждения (полученной, например, от света) от одного узла решётки к другому.

Это представление об экситоне естественно переносится и на случай любого гомеоплярного кристалла. Если один из атомов решётки тем или иным путём получил некоторую избыточную энергию, то ясно, что в результате межатомного взаимодействия она будет передаваться и другим атомам (в конце концов в среднем равномерно распределяясь между ними). Волнообразное перемещение возбуждённого состояния можно рассматривать как движение «квазичастицы» — экситона*).

Наконец, представление об элементарных возбуждениях фактически широко используется и в обычной теории полупроводников (см., например,³⁶). Действительно, «дырки» в полупроводниках представляют собой типичные квазичастицы, описывающие состояния, в которых на тех или иных атомах имеется неполный комплект электронов. (Этот пример особенно хорошо иллюстрирует как существенно «коллективный» характер элементарных возбуждений, так и соответствие этого представления физической реальности. Действительно, вряд ли кто-либо станет отрицать реальность существования «дырок» в полупроводниках, равно как и никому, вероятно, не придёт в голову пытаться собрать их в какой-нибудь сосуд.)

Возвращаясь теперь к рассмотренным выше трудностям теории металлов, легко видеть, что в принципе они сразу решаются идеей об элементарных возбуждениях. Действительно, с этой точки зрения известный успех «одноэлектронной» модели совершенно понятен: система многих взаимодействующих электронов в металле, как и всякая система многих взаимодействующих частиц, характеризуется какими-то возбуждениями, и то, что в теориях Зоммерфельда и Блоха именовалось электроном, фактически представляет собой не электрон, а «квазичастицу»: «электронный газ» примитивной теории металлов есть фактически «газ элементарных

*) Представление об экситоне в несколько иной форме может быть перенесено и на случай ионных кристаллов. Рассмотрение этого вопроса, однако, не входит в нашу задачу.

возбуждений» многоэлектронной системы, подчиняющихся статистике Ферми. В этом смысле можно сказать, что в теории металлов всегда говорили на языке элементарных возбуждений, не зная этого. Поэтому неудивительно, что закономерности, обусловленные, в основном, только статистикой, правильно передаются «одноэлектронной» теорией (они просто не связаны с её упрощающими предположениями); равным образом понятно, почему «одноэлектронная» модель терпит неудачу при анализе тех характеристик системы, для исследования которых необходимы более конкретные сведения об её энергетическом спектре*).

Следует подчеркнуть, однако, что сказанное ни в коей мере нельзя рассматривать как окончательное решение трудностей современной теории металлов. Здесь только указан возможный путь решения, как нам кажется, путь правильный и многообещающий, но отнюдь ещё не пройденный. Для того чтобы изложенное выше решение вопроса могло считаться удовлетворительным, надлежит, прежде всего, доказать, что энергия системы электронов в металле действительно выражается в виде (2.2) и определить вид функции $\omega(k)$, а также статистику элементарных возбуждений**). При этом, естественно, должно выясниться, какие именно возбуждения возможны в той или иной системе (очевидно, что в данной конкретной системе могут осуществляться, вообще говоря, не всякие типы элементарных возбуждений. Спиновые волны, например, возникают в ферромагнетиках, но в металле типа, скажем, бериллия их, повидимому, нет). Иначе говоря, встаёт вопрос о разработке методов исследования спектров элементарных возбуждений. Мы хотели бы особо подчеркнуть важность этой проблемы. Дело в том, что лёгкость операций с элементарными возбуждениями (коль скоро известна их статистика и вид функции $\omega(k)$) легко может толкнуть на ложный путь простой «подгонки» того или иного спектра возбуждений под опытные данные без должного теоретического обоснования. Тем самым создавалась бы некая видимость понимания и объяснения явлений при фактическом отсутствии и того и другого, и представление об элементарных возбуждениях потеряло бы смысл и интерес***).

*) Из сказанного ясно, сколь бесплодны попытки количественного уточнения и улучшения методов «одноэлектронной» теории, до сих пор ещё прелпринимающиеся в некоторых работах. Эти попытки, правда, вполне «безвредны», ибо не искажают «фермиевского» характера спектра, но и в такой же степени бесполезны.

**) В дальнейшем мы увидим, что, как правило, спектр оказывается смешанным, т. е. имеются возбуждения как фермиевского, так и бозевского типа.

***) Сказанное не следует понимать превратно. Мы, конечно, не протестуем против определения, например, эффективной массы квазичастицы из опытных данных, коль скоро доказано, что возбуждения данного типа действительно могут возникать в данной системе. В равной мере следует

Из сказанного ясно, сколь важна проблема фактического определения слабо возбуждённых уровней системы многих взаимодействующих частиц. В следующем параграфе и будут рассмотрены современные представления о спектре элементарных возбуждений системы электронов в твёрдом теле.

§ 3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ И ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Как мы видели в предыдущем параграфе, ряд трудностей электронной теории металлов мог бы, по всей вероятности, быть решён, если бы удалось представить энергии слабо возбуждённых состояний многоэлектронной системы в виде набора элементарных возбуждений. Следует только иметь в виду, что в веществах, обладающих металлическими свойствами, хотя бы некоторые (если не все) возбуждения должны характеризоваться двумя особенностями:

а) их движение в решётке должно сопровождаться переносом заряда (в противном случае они вообще не являются носителями тока),

б) для их образования не должно требоваться затраты конечной энергии.

Действительно, в противном случае число элементарных возбуждений данного типа (т. е. число носителей тока) при низких температурах экспоненциально спадало бы с понижением температуры, что привело бы и к соответствующему ходу электропроводности. Фактически же это, повидимому, не имеет места (правда, экспериментально вопрос о температурной зависимости электропроводности металлов при низких температурах до сих пор ещё не вполне ясен). Кроме того, по нашему мнению, элементарные возбуждения многоэлектронной системы, характерные именно для металлического состояния вещества, должны подчиняться статистике Ферми*). Действительно, из опыта известно, что электронная теплоёмкость металла линейно зависит от температуры.

признать весьма важной «сбратную задачу» теории элементарных возбуждений — определение вида спектра из опытных данных (очень существенные результаты в этом направлении получены И. М. Лифшицем и его сотрудниками^{65, 67}). Мы лишь хотели бы предостеречь против возможных попыток просто постулировать существование того или иного спектра без того, чтобы исследовать, возможно ли его возникновение в действительности. Следует указать, что во всех цитированных выше работах такая «подгонка» не имела места; вид элементарных возбуждений устанавливался либо на основании непосредственного расчёта, либо с помощью теоретических соображений качественного характера.

*) Это не означает, что в металлах нет «бозевской» ветви возбуждений. Она, бесспорно, имеется (по крайней мере, в некоторых металлах). Мы хотим лишь сказать, что должна, повидимому, присутствовать и «фермиевская» ветвь энергетического спектра.

Эта зависимость легко получается теоретически, если элементарные возбуждения многоэлектронной системы образуют вырожденный ферми-газ; в случае же возбуждений типа Бозе такая зависимость может получиться лишь при специальных предположениях относительно плотности энергетических уровней. В самом деле, полная энергия E газа элементарных возбуждений даётся известным соотношением *)

$$E = \int_{\epsilon_{\min}}^{\infty} \frac{\rho(\epsilon) d\epsilon}{\exp\left\{\frac{\epsilon - \mu}{kT}\right\} \pm 1}, \quad (3.1)$$

где μ — химический потенциал, ϵ — энергия отдельного возбуждения, $\rho(\epsilon) d\epsilon$ — число состояний на интервал энергии $(\epsilon, \epsilon + d\epsilon)$, знаки «+» и «-» отвечают соответственно Ферми- и Бозе-статистике.

Для вырожденного ферми-газа $\mu > 0$ и $\frac{\mu}{kT} \gg 1$; асимптотическое разложение по $\frac{kT}{\mu}$ даёт, как известно (см., напр., ¹⁴):

$$E \approx \int_{\epsilon_{\min}}^{\mu} \epsilon \rho(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \left\{ \rho(\mu) + \mu \frac{\partial \rho(\epsilon)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon = \mu} \right\}, \quad (3.2)$$

откуда получается — при любом виде $\rho(\epsilon)$ — линейный температурный ход теплоёмкости.

Для газа же, подчиняющегося статистике Бозе, как известно ¹⁴, химический потенциал всегда отрицателен (и невелик по абсолютной величине, если газ вырожден); поэтому разложение типа (3.2) не имеет места, и зависимость E от T определяется конкретным видом функции $\rho(\epsilon)$ **).

В настоящем параграфе мы предполагаем, не вдаваясь в вычислительную сторону дела, рассмотреть современное состояние вопроса об элементарных возбуждениях многоэлектронной системы в металлах и полупроводниках.

Некоторые типы возбуждений нам уже известны — это рассмотренные в предыдущем параграфе экситоны и спиновые волны.

*) Если имеется несколько типов возбуждений, надо взять сумму выражений типа (3.1). При очень больших значениях ϵ само представление об элементарных возбуждениях становится неточным, но эта область практически ничего не вносит в интеграл.

**) При этом обычно $\rho(\epsilon)$ оказывается такой, что теплоёмкость пропорциональна более высокой, чем первая, степени температуры и потому при низких температурах оказывается очень малой. Так, например, для фононов в простой решётке, как известно, теплоёмкость оказывается пропорциональной T^3 .

Ясно, однако, что отнюдь не они характерны для металла. Действительно, экситон представляет собой нейтральное образование, для возникновения которого вдобавок требуется конечная энергия. Следовательно, он не имеет отношения к наиболее характерному свойству металлов — высокой электропроводности. Равным образом и при простом перемещении состояния с «перевернутым» спином (спиновая волна) электрический заряд отнюдь не перемещается по решётке*), ибо среднее число электронов у каждого отдельного атома остаётся неизменным^{37, 38}.

Таким образом, рассмотренная ранее модель спиновых волн (иногда называемая «обменной»¹⁵) описывает, собственно говоря, не металл, а ферромагнитный диэлектрик. Это и понятно, ибо в «обменной» теории спиновых волн не учтена очень важная особенность металлического состояния вещества — обобществление части электронов между всеми атомами решётки (именно благодаря этому процессу электроны и получают способность свободно перемещаться по решётке, образуя то, что в феноменологической теории электричества называется «свободными зарядами»). Для того чтобы можно было воспользоваться теорией спиновых волн при исследовании ферромагнитных металлов, требуется её несколько обобщить, учтя неизбежное «обобществление» хотя бы части электронов между всеми атомами металла. Такое обобщение было произведено в двух направлениях. Во-первых, следует иметь в виду, что в реальных металлах за ферромагнетизм ответственны, повидимому, электроны не полностью заполненных d -оболочек; в электропроводности же, видимо, главную роль играют «периферические» электроны, принадлежавшие (до образования кристаллической решётки металла) внешним атомным оболочкам и «обобществлённые» между всеми атомами металла. С. В. Вонсовским^{39, 40} было предложено рассматривать d -электроны по многоэлектронной обменной модели, учтя лишь дополнительно их обменное взаимодействие с «обобществлёнными» электронами; взаимодействие же последних друг с другом не учитывается. Энергетический спектр всей системы, таким образом, состоит из двух «ветвей» — набора спиновых волн (возбуждения типа Бозе) и суммы энергий внешних электронов (их можно рассматривать как возбуждения типа Ферми). Наличие взаимодействия между внутренними и внешними электронами проявляется в зависимости эффективной массы последних от суммарного спина первых, т. е. от намагничивания образца.

В такой « $s - d$ -обменной» модели**) получают отражение одновременно как ферромагнитные, так и электрические свойства, причём (благодаря учёту обменного взаимодействия между внутренними и внешними электронами) можно исследовать и их взаимосвязь.

*) См., однако, сноску на стр. 69.

**) Название связано с тем, что внешние электроны считаются первоначально (до образования металла) находившимися в s -состояниях.

Очевидно, однако, что $s-d$ -модель не решает полностью проблему определения энергетического спектра системы электронов в металле, так как для пренебрежения взаимодействием «обобществлённых» электронов друг с другом нет ровно никаких оснований (это обстоятельство отмечается и в самих работах^{39, 40}). Кроме того, сама возможность разделения единой системы электронов на две «части» («внутренние» и «внешние» электроны) отнюдь не очевидна; в более точной теории, видимо, следует обойтись без таких излишне модельных представлений.

Более последовательным в отношении учёта межэлектронного взаимодействия является второе возможное обобщение теории спиновых волн — так называемая «полярная» модель^{3, 4, 5, 28, 38, 41, 42}. Согласно этой модели, в основном состоянии металла электроны в среднем равномерно распределены по всем атомам; возбуждение системы состоит в отклонении распределения заряда от равномерного (точнее, периодического), т. е. — на наглядном языке — в переходе части электронов на «чужие» атомы, в результате чего в решётке появляются в равном числе атомы с избытком и недостатком электронов (соответствующие состояния атомов называются «полярными» — с этим связано и название самой модели). Естественно, в силу трансляционной инвариантности системы полярные состояния в идеальном кристалле не локализуются на каких-то определённых атомах, а с равной вероятностью могут оказаться в любом месте решётки. В переводе на язык элементарных возбуждений полярным состояниям соответствуют квазичастицы — «двойки» и «дырки», — движение которых характеризует, соответственно, волнообразное распространение состояний со «сверхкомплектным» и недостающим электронами*). Очевидно, что с перемещением двойки или дырки связан перенос электрического тока. Статистика, которой подчиняются возбуждения этого типа, может быть и фермиевской и бозевской. Так, например, если в нормальном состоянии в валентной оболочке атома содержится нечётное число электронов и сверхкомплектный электрон появляется в валентной же оболочке, то двойки и дырки обладают целочисленным спином и, следовательно, подчиняются статистике Бозе. С другой стороны, может случиться, что в основном состоянии атомы обладают целочисленным спином; тогда спины двойки и дырки полуцелые и статистика их — фермиевская. Первый случай рассматривался в цитированных выше работах С. В. Вонсовского, второй (на частном примере металла типа бериллия) был коротко обсуждён в работе автора⁴³.

*) В математически наиболее совершенном варианте полярной модели, предложенном Н. Н. Боголюбовым и С. В. Тябликовым, «двойки» и «дырки» не вводятся явно, но учёт полярных состояний приводит к тому, что спиновые волны оказываются связанными с переносом электрического заряда.

В работах⁴⁴ и ⁴⁵ полярная модель была использована для исследования электропроводности металла и магнитных свойств его. В соответствии с основной идеей метода элементарных возбуждений в обоих случаях задача была приведена к изучению соответствующих свойств идеального газа квазичастиц — двоек и дырок. Статистика, которой подчиняются элементарные возбуждения, в работе⁴⁵ не была установлена. В работе⁴⁴ речь шла о возбуждениях типа Бозе. Это обстоятельство привело к специфической зависимости электропроводности ρ от температуры ($\rho = \frac{\gamma}{T} + \frac{\beta}{T^2}$, где γ и β — константы), каковая зависимость, повидимому, и наблюдается на опыте при низких температурах у таких металлов, как цезий и некоторые другие. Существенно, что её никак нельзя получить в рамках одноэлектронной теории металлов¹, ибо решающую роль здесь играет именно тип статистики, которой подчиняются носители тока (в «одноэлектронной» теории носителями тока являются свободные электроны, и фермиевская статистика для них приводит к известному закону: $\rho \sim T^{-5}$).

В работе⁴⁶ была изучена электропроводность металла в рамках несколько иного варианта полярной модели: предполагалось, что в основном состоянии распределение электронной плотности максимально неоднородно (почти все узлы решётки заняты либо двойками, либо дырками), возбуждение системы связано с уменьшением неоднородности в распределении заряда (частичной «деполяризацией» кристалла), т. е. с уменьшением числа двоек и дырок. Соответствующие элементарные возбуждения также подчиняются статистике Бозе, и температурный ход электропроводности оказывается таким же, как и в⁴⁵. По существу, в⁴⁶ металл рассматривается как нечто вроде ионного кристалла. Нам не кажется убедительным такой подход к задаче (не очень ясно, например, как будет обстоять дело с дифракцией рентгеновских лучей); однако методическая ценность цитированной работы бесспорна.

Известный успех полярной модели, однако, не должен заслонять серьёзных дефектов её, органически связанных с её исходными предположениями. Из сказанного выше ясно, что в современной своей форме полярная модель бесспорно не может быть применена к «хорошим» металлам, содержащим большое число носителей тока. Действительно, появление носителей тока в полярной модели обязательно связано с возбуждением системы (в основном состоянии носители тока отсутствуют). Следовательно, в слабо возбуждённых состояниях (когда только и применим метод квазичастиц) носителей тока будет мало, и мы получим вещество с плохой проводимостью.

Более того, в ряде случаев для образования «двойки» и «дырки» оказывается необходимой конечная энергия, что должно

было бы привести к экспоненциальной зависимости электропроводности и других величин от температуры. Наконец, не очень ясно, как в полярной модели (со спектром типа Бозе) будет обстоять дело с электронной теплоёмкостью металла. С аналогичными трудностями мы встречаемся и при дальнейшем обобщении полярной модели в так называемой «полярно-экситонной» модели⁵, в которой учитывается наличие сразу трёх типов элементарных возбуждений — «двоек», «дырок» и экситонов.

Создаётся впечатление, что вообще в современной своей форме полярно-экситонная модель твёрдого тела описывает не металл, а полупроводник с атомной решёткой. Действительно, для полупроводника как раз и является характерной экспоненциальная зависимость числа носителей тока от температуры. Заметим в связи с этим, что полярно-экситонная модель кристалла и фактически использовалась для исследования магнитных⁴⁷ и электрических⁴⁸ свойств полупроводников. В последней работе было впервые дано «многоэлектронное» обоснование ряда утверждений «обычной» (базирующейся на одноэлектронном приближении) теории полупроводников. Именно рассматривался атомный кристалл, в котором «двойки» и «дырки» полярной модели подчиняются статистике Бозе. Было показано, что поведение этих возбуждений соответствует тому, чего мы ожидаем от «обычных» электронов проводимости и дырок теории полупроводников (спектр энергии — зонный, для возникновения возбуждений требуется конечная энергия и т. д.). Принципиальный (а в некоторых случаях и практически существенный) характер, однако, носит различие в типах статистики, которой подчиняются носители тока согласно одно- и многоэлектронной теориям. В области вырождения это обстоятельство приведёт, естественно, к резко различным предсказаниям относительно электрических и магнитных свойств полупроводника. Соответствующие экспериментальные исследования представили бы значительный интерес для теории твёрдого тела. Следует, однако, иметь в виду, что в полупроводниках типа германия или кремния спектр «двоек» и «дырок» полярной модели оказывается фермиевским. Этот случай был рассмотрен в работе⁶⁸. Как и следовало ожидать, оказалось, что в таком полупроводнике «двойки» ведут себя аналогично электронам проводимости одноэлектронной теории, чем и обосновываются качественные выводы последней (это относится как к идеальной решётке, так и к решётке с дефектами; в известной мере это справедливо и при наличии внешних электрического и магнитного полей). Заметим, однако, что это обоснование ни в коей мере не относится к расчётным методам одноэлектронной теории. Все константы, характеризующие вид энергетического спектра (ширина запрещённой зоны, эффективная масса и т. д.), вычисляются в многоэлектронной теории совсем не так, как в одноэлектронной. Обоснование получают лишь качественные

представления «зонной» модели (которые, кстати, в основном и интересуют экспериментатора).

Из сказанного не следует, что надо вообще отказаться от представлений полярной модели металла, ограничивая область её применения только полупроводниками. Повидимому, возбуждения рассмотренных выше типов всё же существуют и в металлах, но не исчерпывают всего энергетического спектра последних *). Эти возбуждения в своей совокупности образуют то, что можно было бы назвать «полупроводниковым спектром» металла. Они в равной мере возможны и в неметаллических кристаллах и представляют собой то общее, что имеется в электронных энергетических спектрах всех кристаллов с атомными решётками.

В металлах **), однако, повидимому, имеются возбуждения и другого типа, не требующие для своего образования конечной энергии и потому в большом количестве присутствующие даже при низких температурах. (Вероятно, они подчиняются статистике Ферми.) Вопрос об исследовании этой специфически металлической ветви энергетического спектра до сих пор остаётся открытым (мы встречаемся здесь с очень большими математическими трудностями). В связи с этим приобретает интерес изучение хотя бы простейших случаев спектров этого типа — фермиевских и без энергетической щели, причём уже в основном состоянии в системе должны содержаться носители тока. Наиболее лёгкой для рассмотрения является, видимо, система слабо взаимодействующих электронов проводимости в кристалле. В этом случае для определения энергетического спектра можно воспользоваться теорией возмущений (малый параметр — отношение концентрации электронов проводимости к числу узлов решётки в единице объёма **). Соответствующая методика была развита в работе ⁴⁹ и использована при вычислении электропроводности металлов по многоэлектронной модели в ⁵⁰ и ⁵¹. В последних двух работах показано, что, как и следовало ожидать, «статистические» результаты одноэлектронной теории (температурный закон электропроводности) остаются в силе и тогда, когда носителями тока являются элементарные возбуждения фермиевского типа. Следует, однако, помнить, что количественные результаты ⁴⁹ (и, следовательно, ⁵⁰) имеют лишь ограниченное значение и, на наш

*) В связи с этим следует заметить, что предложенные до сих пор методы расчёта спектров элементарных возбуждений практически не дают полной системы собственных функций гамильтониана многоэлектронной задачи.

**) Правильнее было бы сказать, что именно те вещества, в которых имеются эти специфические возбуждения, и являются металлами.

***) Такая постановка вопроса естественна для невырожденного (или слабо вырожденного) случая. При наличии сильного вырождения роль малого параметра может играть отношение средней энергии взаимодействия к энергии Ферми (см. ⁶⁸).

взгляд, не могут быть применены к реальным металлам, в которых концентрация электронов проводимости отнюдь не является малой. Правильнее было бы считать эти результаты относящимися к полупроводникам, где условия применимости данного метода расчёта действительно выполняются.

В последнее время представление о локальных изменениях плотности как элементарных возбуждениях многоэлектронной системы получило весьма широкое развитие с несколько иной, чем в обычной полярной модели, точки зрения^{52–59}. В этих работах*) была детально разработана давно уже высказанная Блохом⁶⁰ идея о том, что элементарные возбуждения многоэлектронной системы суть не что иное, как распространяющиеся в ней звуковые волны (т. е. отклонения от пространственно однородного распределения электронов — типа колебаний плазмы^{61–62}). Соответствующие «квазичастицы» — фононы — естественно подчиняются статистике Бозе**).

В работах⁵³ и особенно⁵⁷, однако, показано, что для представляющего реальный физический интерес трёхмерного случая звуковые колебания отнюдь не исчерпывают всех возбуждений многоэлектронной системы.

Наряду с ними существует и фермиевская ветвь спектра, представляющая, очевидно, особый интерес для наших целей. Существенно также, что в отличие от обычных звуковых волн, распространяющихся в нейтральных, а не заряженных системах, возбуждение колебаний плазмы требует затраты конечной энергии E_0 , причём эта величина отнюдь не мала: $E_0 = \hbar \sqrt{\frac{4\pi}{m} n e^2}$, где n — число электронов в единице объёма, m и e — масса и заряд электрона. При $n \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$ E_0 оказывается $\sim 8,6 \text{ эв}$; поэтому при обычных температурах «плазменные» фононы практически отсутствуют — существуют лишь нулевые колебания плазмы. Именно

*) В соответствии с основной установкой данной статьи мы касаемся лишь физического содержания этих работ, не вдаваясь в сравнительную оценку развитых в них методов расчёта. Отметим лишь, что наиболее полное и строгое рассмотрение вопроса дано, на наш взгляд, в⁵⁷.

**) С идейной стороны эти представления весьма сходны с полярной моделью. Однако флуктуации плотности до сих пор фактически исследовались либо методом, не позволяющим выявить возбуждения типа Ферми, либо в пренебрежении периодическим характером поля в кристаллической решётке (положительный заряд системы предполагался равномерно распределённым в пространстве, и роль его состояла лишь в компенсации полного отрицательного заряда электронов). Полярная же модель в своей современной форме существенно связана с предположением о правильном периодическом расположении атомов в кристаллической решётке. Возможно, что в дальнейшем — при обобщении результатов⁵⁷ на случай наличия периодического поля решётки — полярная модель и метод флуктуаций плотности окажутся в какой-то мере эквивалентными друг другу, представляя лишь два различных подхода к одной и той же проблеме.

они, а также фермиевская ветвь представляют интерес для теории металла как такового.

Заметим, однако, что излучение «плазменных» фононов может играть существенную роль в торможении быстрых заряженных частиц, движущихся через металл*) (энергия частицы может затрачиваться на возбуждение «плазменных» колебаний).

Исследование фермиевской ветви и в этом методе расчёта до сих пор ещё не проведено с должной тщательностью. По нашему мнению, оно требует учёта атомной структуры кристалла, в частности периодического поля решётки (на «плазменных» колебаниях это поле, видимо, не сказывается заметным образом, ибо фигурирующие там длины волн достаточно велики, так что дискретная структура кристалла «смазывается»).

Резюмируя всё сказанное, следует признать, что в настоящее время представление об элементарных возбуждениях (начавшее развиваться сравнительно недавно) уже привело к серьёзным успехам и прочно приобрело «права гражданства» в физике конденсированных систем. В применении к теории твёрдого тела можно считать бесспорно установленным, что энергетический спектр системы многих взаимодействующих электронов в кристалле имеет «смешанный» характер — содержит как бозевскую, так и фермиевскую ветви. Первая из них может считаться в какой-то мере изученной; она, повидимому, исчерпывается спиновыми волнами (в ферромагнетиках), экситонами и флуктуациями электронной плотности (в той или иной форме). Что же касается второй ветви, то пока что удаётся исследовать лишь «полупроводниковую» её часть. Создание новых методов расчёта, которые позволили бы теоретически изучать возбуждения «металлического» типа, представляется нам одной из самых актуальных задач физики твёрдого тела.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бете и А. Зоммерфельд, Электронная теория металлов, ОНТИ, 1938; Ф. Зейтц, Современная теория твёрдого тела, Гостехиздат, 1949; N. F. Mott, H. Jones, The Theory of the Properties of Metals and Alloys, 1936.
2. Ф. Ф. Волькенштейн, ЖТФ 21, 1544 (1951); УФН 43, 11 (1951).
3. Я. И. Френкель, Вестник АН СССР 10, 61 (1946).
4. Н. Н. Боголюбов, Лекции по квантовой статистике, Киев, 1949.
5. С. В. Вонсовский, УФН 48, 289 (1952); Изв. АН СССР, сер. физ. 12, 337 (1948).
6. С. И. Пекар, ЖЭТФ 18, 525 (1948).
7. Л. Д. Ландау, Добавление к статье D. Shönberg, Proc. Roy. Soc. A170, 341 (1939).
8. А. И. Ахиезер, ДАН 23, 872 (1939).
9. Ю. Б. Румер, ЖЭТФ 18, 1081 (1948); 20, 573 (1950).
10. Г. Е. Зильберман, ЖЭТФ 21, 1209 (1951).

*) В связи с этим см. также ^{63, 64}.

11. S. G. Sydoriak, D. E. Robinson, *Phys. Rev.* **75**, 118 (1949).
12. И. Е. Тамм, *Zeits. f. Phys.* **60**, 345 (1930).
13. Л. Э. Гуревич, Основы физической кинетики, ГТТИ, 1940.
14. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Статистическая физика (классическая и квантовая), Гостехиздат, 1951.
15. С. В. Вонсовский и Я. С. Шур, Ферромагнетизм, Гостехиздат, 1948.
16. F. Bloch, *Zeits. f. Phys.* **61**, 206 (1930).
17. T. Holstein, H. Primakoff, *Phys. Rev.* **58**, 1098 (1940).
18. С. В. Тябликов, *ЖЭТФ* **20**, 661 (1950).
19. А. А. Гусев, Квантовая теория магнитострикции. Диссертация, физический факультет МГУ, 1954; *ДАН* **98**, 749 (1954).
20. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **11**, 592 (1941); **14**, 112 (1944).
21. Н. Н. Боголюбов, *Изв. АН СССР, сер. физ.* **11**, 67 (1947).
22. Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчук, *ДАН* **59**, 669 (1948).
23. С. В. Тябликов, *ЖЭТФ* **18**, 1093 (1948); *ДАН УССР*, № 6, 3 (1949).
24. Л. Д. Ландау и И. М. Халатников, *Изв. АН СССР, сер. физ.* **12**, 216 (1948).
25. И. Я. Померанчук, *ЖЭТФ* **11**, 226, 246 (1941).
26. А. И. Ахиезер, *Journ. of Phys.* **10**, 217 (1946).
27. И. Я. Померанчук, А. И. Ахиезер, *ЖЭТФ* **14**, 342 (1944).
28. Н. Н. Боголюбов и С. В. Тябликов, *ЖЭТФ* **19**, 256 (1949).
29. P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **86**, 694 (1952).
30. J. M. Ziman, *Proc. Roy. Soc. A* **65**, 540, 549 (1952).
31. Ryogo Kubo, *Phys. Rev.* **87**, 568 (1953).
32. Я. И. Френкель, *Phys. Rev.* **37**, 17, 1276 (1931); *ЖЭТФ* **6**, 647 (1936).
33. R. Peierls, *Ann. d. Phys.* **13**, 905 (1932).
34. А. С. Давыдов, *ЖЭТФ* **18**, 230 (1948); **19**, 168 (1949); Теория поглощения света в молекулярных кристаллах. Изд. АН УССР, Киев, 1951.
35. А. С. Давыдов, Сборник памяти С. И. Вавилова, стр. 210, Изд. АН СССР, Москва, 1952.
36. Ф. Ф. Волькенштейн, Электропроводность полупроводников, Гостехиздат, 1947.
37. Ф. Ф. Волькенштейн, Уч. зап. ГПИ им. Герцена, Ленинград, 1940.
38. С. В. Вонсовский, *Sov. Phys.* **7**, 292 (1935); **10**, 348 (1936); Труды Ин-та физики металлов; *УФН* **12**, 9 (1949).
39. С. В. Вонсовский, *ЖЭТФ* **16**, 981 (1946).
40. С. В. Вонсовский и Е. А. Туров, *ЖЭТФ* **24**, 419 (1953).
41. Б. Т. Гейлиман, *ЖЭТФ* **13**, 168, 399 (1943).
42. Н. Н. Боголюбов и С. В. Тябликов, *ЖЭТФ* **19**, 251 (1949).
43. В. Л. Бонч-Бруевич, *ЖЭТФ* **25**, 417 (1953).
44. С. В. Вонсовский, К. Б. Власов, А. В. Соколов, *ЖЭТФ* **21**, 1185 (1951).
45. Г. Е. Зильберман, *ЖЭТФ* **25**, 313 (1953).
46. С. В. Вонсовский и Б. В. Падучев, *ЖЭТФ* **25**, 571 (1953).
47. С. В. Вонсовский и Е. Н. Агафонова, Сборник, посвященный семидесятилетию акад. А. Ф. Иоффе, Изд. АН СССР, стр. 92, 1950.
48. С. В. Вонсовский и В. С. Галишев, *ЖЭТФ* **25**, 584 (1953).
49. В. Л. Бонч-Бруевич и С. В. Тябликов, *ДАН* **76**, 817 (1951).
50. С. В. Вонсовский и Б. В. Падучев, *ЖЭТФ* **25**, 510 (1953).
51. С. В. Вонсовский и А. А. Бердышев, *ЖЭТФ* **25**, 723 (1953).
52. Sin-Itiro Tomonaga, *Progr. Theor. Phys.* **5**, 544 (1950).
53. D. Bohm, D. Pines, *Phys. Rev.* **82**, 625 (1951); **85**, 338 (1952); **92**, 509, 626 (1953).

54. Ю. Л. Климонтович и В. П. Силин, ДАН 82, 361 (1952); ЖЭТФ 23 151 (1952).
 55. В. П. Силин, ЖЭТФ 23, 641 (1952); 23, 649 (1952).
 56. Ю. Л. Климонтович, ДАН 87, 927 (1952); 96, 43 (1954).
 57. Д. Н. Зубарев, ЖЭТФ 25, 548 (1953).
 58. Б. Т. Гейликман, ДАН 94, 659 (1954).
 59. Peter A. Wolf, Phys. Rev. 92, 18 (1953).
 60. F. Bloch, Zeits. f. Phys. 81, 363 (1933).
 61. Tonks, Langmuir, Phys. Rev. 33, 195 (1929).
 62. А. А. Власов, ЖЭТФ 8, 291 (1938); Journ. of Phys. 9, 25, 130 (1945).
 63. R. Kronig, J. Korringa, Physica 10, 409 (1943).
 64. R. Kronig, Physica 15, 667 (1949).
 65. Е. М. Лифшиц, УФН 34, 513 (1948).
 66. И. М. Лифшиц, ЖЭТФ 26, 551 (1954).
 67. И. М. Лифшиц и А. М. Косевич, ДАН 96, 963 (1954).
 68. Г. Е. Зильберман, ЖЭТФ 27, 549 (1954).
-