

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**ОТРАЖЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ  
И ИМПУЛЬСОВ****Л. М. Бреховских**

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| I. Отражение ограниченных пучков . . . . .                                      | 539 |
| 1. Представление ограниченного пучка в виде суперпозиции плоских волн . . . . . | 540 |
| 2. Поле отражённого пучка. Смещение пучка при отражении . . . . .               | 543 |
| 3. Полное внутреннее отражение светового пучка . . . . .                        | 546 |
| 4. Отражение ультразвуковых пучков . . . . .                                    | 548 |
| 5. Распределение энергии в сечении отражённого пучка . . . . .                  | 551 |
| 6. О потоке энергии при полном внутреннем отражении . . . . .                   | 553 |
| 7. Отражение от неоднородной среды . . . . .                                    | 558 |
| II. Отражение импульсов . . . . .                                               | 564 |
| 8. Общие соотношения. Закон сохранения интегрального импульса . . . . .         | 564 |
| 9. Искажение формы импульса при полном внутреннем отражении . . . . .           | 569 |

**I. ОТРАЖЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ПУЧКОВ**

Теория отражения плоских волн от плоских границ раздела в силу своей крайней идеализации в ряде случаев оказывается недостаточной для описания реальных физических явлений. Обычно в реальных случаях приходится иметь дело не с бесконечной плоской волной, а с ограниченным пучком или со сферической волной.

Исследованию отражения и преломления сферических волн была посвящена отдельная работа автора<sup>1</sup>. В настоящей статье мы рассмотрим отражение ограниченного пучка, а также импульса от плоской границы. В целом ряде случаев и, в частности, при падении пучка или импульса на границу под углом, близким к углу полного внутреннего отражения, или при отражении пучков от слоёв и пластинок мы встречаемся с явлениями, которые отсутствуют при отражении плоских волн. В частности, большой интерес представляет смещение пучка вдоль границы при его отражении, а также изменение формы импульса. Ряд практически интересных результатов получается также при рассмотрении отражения ограниченных пучков от слоисто-неоднородных сред.

При рассмотрении этих вопросов целесообразно базироваться на разложении ограниченных пучков и импульсов по плоским волнам, что нами уже использовалось в случае сферических волн.

# 1. Представление ограниченного пучка в виде суперпозиции плоских волн

Допустим, что ограниченный пучок создается в результате прохождения плоской волны через щель  $cc$  в экране  $AA$ , изображенном на рис. 1. Представим далее, что пучок падает на границу слоисто-неоднородной среды, от которой и исследуется отражение.

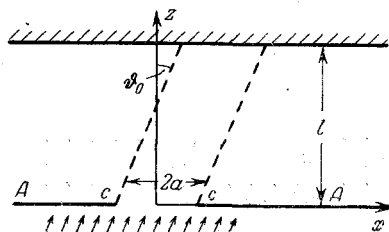


Рис. 1. Пучок, образующийся при падении плоской волны на отверстие в экране.

Если систему координат выбрать, как на рис. 1, то координата  $y$  из формул выпадет.

Ось  $z$  мы направляем перпендикулярно плоскости экрана, ось  $x$  — перпендикулярно осевой линии щели, а начало координат помещаем на осевой линии. Ширину щели обозначим через  $2a$ , расстояние от щели до отражающей плоскости — через  $l$ .

Поле падающего пучка между экраном и отражающей плоскостью должно удовлетворять волновому уравнению, а в плоскости экрана граничным условиям, которые мы, предполагая ширину щели большой по сравнению с длиной волны \*), зададим в приближенном виде по Кирхгофу, а именно, предположим, что:

1. На задней стороне экрана поле равно нулю.
2. В плоскости щели поле такое же, как и при отсутствии экрана.

Этими граничными условиями и волновым уравнением поле падающего пучка определяется полностью.

Поле падающей на экран плоской волны мы зададим в виде

$$\psi = e^{i(\alpha x + \gamma z) - i\omega t}, \quad (1)$$

\*) В точной теории дифракции на щели показывается, что для справедливости предположения Кирхгофа необходимо также, чтобы угол падения был невелик. Однако для исследуемого здесь вопроса это не имеет принципиального значения.

где

$$\alpha = k \sin \vartheta_0, \quad \gamma = k \cos \vartheta_0. \quad (2)$$

После прохождения щели при  $z=0$  мы будем иметь, отбрасывая всюду для сокращения фактор  $e^{-i\omega t}$ ,

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= e^{i\alpha x} \text{ при } -a \leq x \leq a, \\ \psi(x) &= 0 \text{ при } |x| > a. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Целесообразно несколько обобщить задачу и рассмотреть случай произвольного распределения амплитуды волны по сечению пучка плоскостью  $z=0$ . Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что функция  $\psi(x)$  имеет вид

$$\psi(x) = F(x) e^{i\alpha x}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (4)$$

где функция  $F(x)$  соответствует переменной прозрачности экрана, зависящей от координаты  $x$ .

Для представления пучка в виде суперпозиции плоских волн поле в плоскости  $z=0$  целесообразно представить в виде интеграла Фурье:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(p) e^{ipx} dp. \quad (5)$$

Функция  $\Phi(p)$  при этом определяется по известной формуле

$$\Phi(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ipx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{i(\alpha-p)x} dx. \quad (6)$$

Так, например, в случае пучка, образованного пропусканием волны через щель, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= 1, \quad -a < x < a, \\ F(x) &= 0, \quad |x| > a. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Поэтому для данного случая получаем:

$$\Phi(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} e^{i(\alpha-p)x} dx = \frac{\sin(\alpha-p)a}{\pi(\alpha-p)}. \quad (8)$$

Полезно заметить, что функция  $\Phi(p)$  имеет заметную величину (порядка 1) лишь при малых разностях  $\alpha-p$ , удовлетворяющих условию  $a(\alpha-p) \leq 1$ . При  $a(\alpha-p) \gg 1$  значение функции  $\Phi(p)$  будет весьма мало.

На основе функции  $\psi(x)$ , заданной в виде (5) и характеризующей поле в плоскости экрана, построим следующую функцию обеих

переменных  $x$  и  $z$ :

$$\Phi(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(p) e^{i(px + \mu z)} dp, \quad (9)$$

где

$$\mu = \sqrt{k^2 - p^2}.$$

Эта функция и будет описывать поле падающего пучка между плоскостью экрана и отражающей плоскостью, так как:

1. Она удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \Phi = 0, \quad (10)$$

поскольку этому уравнению удовлетворяет подынтегральное выражение.

2. При  $z = 0$  она переходит в функцию  $\Phi(x)$ , задаваемую выражением (5), т. е. удовлетворяет граничному условию.

Вследствие однозначности решения волнового уравнения при указанных граничных условиях этим выражением поле пучка определяется полностью.

Экспонента в подынтегральном выражении (9) при любом определенном  $p$  представляет собой плоскую волну, распространяющуюся под углом

$$\vartheta = \arcsin \frac{p}{k}. \quad (11)$$

по отношению к направлению оси  $z$ . Таким образом, каждая компонента разложения поля в плоскости  $z = 0$  в интеграл Фурье продолжается в пространство в виде отдельной плоской волны.

Искомое разложение падающего пучка по плоским волнам и будет представлять собой выражение (9).

При  $p > k$  угол  $\vartheta$ , согласно (11), будет комплексным, т. е. в разложении будут присутствовать также и неоднородные плоские волны (см. <sup>1)</sup>). Их амплитуда будет убывать при удалении от плоскости экрана по экспоненциальному закону. Это видно также из (9) поскольку при  $p > k$  экспонента под интегралом принимает вид  $e^{ipx - \sqrt{p^2 - k^2}z}$ .

Наибольшую роль в (9) будут играть те плоские волны, направление которых близко к направлению падающей на щель плоской волны. Действительно, как уже указывалось, функция  $\Phi(p)$  имеет заметную величину лишь при

$$(\alpha - p)a \lesssim 1.$$

Так как  $\alpha = k \sin \vartheta_0$  и  $p = k \sin \vartheta$ , то последнее условие можно записать в виде

$$ak(\sin \vartheta_0 - \sin \vartheta) \lesssim 1$$

или, вследствие близости  $\vartheta_0$  и  $\vartheta$ :

$$\vartheta_0 - \vartheta \leq \frac{1}{ak \cos \vartheta_0}. \quad (12)$$

Величина  $a \cos \vartheta_0$  равна ширине нормального сечения пучка (в то время как  $a$  — ширина сечения в плоскости  $z = 0$ ). Так как эта ширина должна быть, безусловно, много больше длины волны, иначе понятие пучка потеряет смысл, т. е.  $ak \cos \vartheta_0 \gg 1$ , то, следовательно,

$$\vartheta_0 - \vartheta \ll 1. \quad (13)$$

## 2. Поле отражённого пучка. Смещение пучка при отражении

Обозначим коэффициент отражения плоской волны, падающей на отражающую границу под углом  $\vartheta$ , через  $V(\vartheta)$ . Это будет в общем случае комплексная величина, квадрат модуля которой даёт коэффициент отражения по энергии, а аргумент — изменение фазы волны при отражении. Мы запишем  $V(\vartheta)$  в виде

$$V(\vartheta) = \rho(p) e^{i\varphi(p)}, \quad (14)$$

где  $\rho(p)$  и  $\varphi(p)$  — функции  $p$ , а, следовательно, и угла падения  $\vartheta$ .

Поле, создаваемое на границе падающим пучком, мы получим из (9), положив там  $z = l$ . В результате будем иметь на границе:

$$\psi_{\text{пад}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(p) e^{i(px + \mu l)} dp. \quad (15)$$

Поле отражённого пучка на границе получится, если подинтегральное выражение в (15), представляющее собой плоскую падающую волну, умножить на коэффициент отражения  $V(\vartheta)$ .

Следовательно:

$$\psi_{\text{отр}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(p) \rho(p) e^{i\varphi(p) + i(px + \mu l)} dp. \quad (16)$$

Подставляя в (16) значение  $\Phi(p)$  из (6), можно записать поле падающего и отражённого пучков в другом виде:

$$\psi_{\text{пад}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i(\alpha - p)\xi + i(px + \mu l)} dp d\xi, \quad (17)$$

$$\psi_{\text{отр}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \rho(p) e^{i\varphi(p)} e^{i(\alpha - p)\xi + i(px + \mu l)} dp d\xi. \quad (18)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда коэффициент отражения по своей абсолютной величине в интересующей нас области углов меняется несущественно или остаётся вообще постоянным (как, например, в случае полного внутреннего отражения).

При этом предположении величину  $\rho(p)$  можно вынести на знак интеграла при значении  $p = \alpha$ . Кроме того, в (17) и (18) введём новую величину

$$\Omega = p - \alpha, \quad (19)$$

и, поскольку мы видели, что под интегралами существенную роль будут играть лишь значения функций, соответствующих малым  $\Omega$ , разложим функцию  $\varphi(p)$  в ряд по значениям величины  $\Omega$ , т. е. запишем:

$$\varphi(p) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha) \Omega + \frac{1}{2} \varphi''(\alpha) \Omega^2 + \dots, \quad (20)$$

где

$$\varphi'(\alpha) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)_{p=\alpha}, \quad (21)$$

и ограничимся пока лишь членом с первой степенью  $\Omega$ . Тогда (17) и (18) при учёте также значения  $\mu$  можно записать в виде:

$$\psi_{\text{пад}}(x) = e^{iax} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\Omega(x-\xi) + i\sqrt{k^2 - (\Omega + \alpha)^2} l} d\xi d\Omega, \quad (22)$$

$$\psi_{\text{отр}}(x) = V(\vartheta_0) e^{iax} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\Omega[x + \varphi'(\alpha) - \xi] + i\sqrt{k^2 - (\Omega + \alpha)^2} l} d\xi d\Omega. \quad (23)$$

Сравнивая (22) и (23), мы находим:

$$\psi_{\text{отр}}(x) = V(\vartheta_0) \psi_{\text{пад}}[x + \varphi'(\alpha)]. \quad (24)$$

Отсюда следует, что при отражении пучок смещается вдоль границы на величину

$$\Delta = -\varphi'(\alpha) = -\left( \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)_{p=\alpha}. \quad (25)$$

Впервые выражение для  $\Delta$  в таком виде было получено, повидимому, в работе<sup>2</sup>, однако значительно более сложным путём, чем приведённый нами выше вывод.

Необходимо отметить, что ещё Эйхенвальд<sup>3</sup> на основании своего весьма тщательного теоретического исследования явления полного внутреннего отражения нашёл, что место входа линий потока энергии (вектора Умова-Пойнтинга) в отражающую, оптически менее плотную, среду отстоит на определённом расстоянии от места их

выхода. Этот весьма существенный результат сыграл большую роль в выяснении природы явления полного внутреннего отражения. Однако не надо путать, как это имеет место в обзорной работе<sup>4</sup>, найденное выше смещение  $\Delta$  с тем смещением, которое получает Эйхенвальд. Существенное различие этих величин заключается в том, что  $\Delta$  представляет собой смещение ограниченного пучка, в то время как смещение Эйхенвальда есть смещение линии потока энергии в безграничной плоской волне. Величины этих смещений также ничего общего между собой не имеют \*).

Можно указать случаи, когда вычисление  $\Delta$  по формуле (25) даёт почти тривиальный результат, легко получающийся из лучевых представлений. Мы рассмотрим один такой случай для того, чтобы читателю лучше уяснить физический смысл величины  $\Delta$ .

Пусть плоская волна падает на границу  $z = 0$  (рис. 2), коэффициент отражения от которой равен единице (граница абсолютно отражающего тела). Совместив направление  $xz$  с плоскостью падения, и выбрав направление оси  $z$ , как указано на рис. 2, падающую волну запишем в виде  $\exp[i(\alpha x - \gamma z) - i\omega t]$  и отражённую волну в виде  $\exp[i(\alpha x + \gamma z) - i\omega t]$ , где  $\alpha = k \sin \vartheta_0$ ,  $\gamma = k \cos \vartheta_0$ .

При  $z = 0$  обе волны имеют равные амплитуды и фазы. В некоторой же плоскости  $z = h$  падающая и отражённая волны будут иметь выражения  $\exp[i(\alpha x - \gamma h) - i\omega t]$  и  $\exp[i(\alpha x + \gamma h) - i\omega t]$ . Отношение отражённой волны к падающей, равное  $V \equiv e^{2i\gamma h}$  можно рассматривать как коэффициент отражения волны в плоскости  $z = h$ . Модуль этого коэффициента равен единице, а фаза  $\varphi = 2\gamma h = 2\sqrt{k^2 - \alpha^2}h$  соответствует набегу фазы волны при её пробеге от плоскости  $z = h$  до плоскости  $z = 0$  и обратно.

В общем случае произвольного угла падения волны фаза  $\varphi$  будет  $\varphi = 2h\sqrt{k^2 - p^2}$ , где  $p$ , как и выше, — проекция волнового вектора волны на ось  $x$  ( $p = k \sin \vartheta$ ).

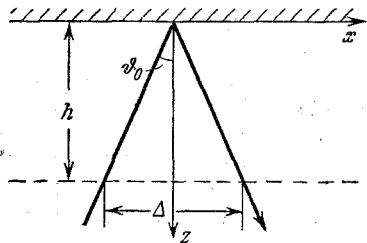


Рис. 2. Случай абсолютно отражающей границы.

\* ) Здесь уместно отметить, что линиям вектора Умова-Пойнтинга в плоской волне нельзя непосредственно придавать смысл реального потока энергии, так как этот вектор определяется неоднозначно и ведёт к однозначным физическим выводам только при вычислении потока энергии через замкнутую поверхность. В случае плоской волны картину потоков энергии можно проследить, только выделяя из волны пучок при помощи диафрагмы, большого по сравнению с длиной волны диаметра (в противном случае диафрагма исказит поле волны). При этом мы приходим к рассматриваемой здесь задаче об отражении ограниченных пучков.

Выражение (25) даёт для смещения  $\Delta$  в этом случае:

$$\Delta = - \left( \frac{d\varphi}{dp} \right)_{p=\alpha} = 2h \frac{\alpha}{\gamma} = 2h \operatorname{tg} \vartheta_0.$$

Величина  $\Delta$  показана на рис. 2. Она равна горизонтальному смещению луча при проходе его от плоскости  $z = h$  до плоскости  $z = 0$  и обратно.

Таким образом, в рассматриваемом случае смещение лучей, вычисляемое по формуле (25), имеет весьма простое и естественное значение. Его вычисляют, конечно, всегда без обращения к формуле (25), лишь только на основании рассмотрения хода луча.

Однако основную ценность изложенная выше теория, приведшая к формуле (25), имеет для случаев, когда лучевая концепция является неприменимой. Ниже мы рассмотрим несколько таких случаев.

Отметим также, что исследование вопроса о смещении пучка при отражении и изменении его формы (см. ниже) методом разложения пучка на плоские волны вполне аналогично исследованию распространения квазимонохроматического импульса в диспергирующей среде (см., например, <sup>5</sup>).

### 3. Полное внутреннее отражение светового пучка

Согласно формуле (25) нужно ожидать, что смещение пучка при отражении будет наиболее значительным в тех случаях, когда фаза коэффициента отражения быстро меняется с углом. Одним из таких случаев является случай падения пучка на границу под углом, несколько превышающим граничный угол полного внутреннего отражения. Действительно, согласно известным формулам Френеля, коэффициент отражения электромагнитной волны от границы раздела двух сред можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} V_{\perp} &= \frac{\frac{\mu_1}{\mu} \cos \vartheta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}{\frac{\mu_1}{\mu} \cos \vartheta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}} \\ V_{\parallel} &= \frac{\frac{\mu}{\mu_1} n^2 \cos \vartheta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}{\frac{\mu}{\mu_1} n^2 \cos \vartheta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где  $\vartheta$  — угол падения,  $n$  — показатель преломления границы,  $\mu$  и  $\mu_1$  — магнитные проницаемости сред. Значки  $\perp$  и  $\parallel$  относятся к случаям, когда вектор электрического поля  $\vec{E}$  направлен соответственно перпендикулярно и параллельно плоскости падения.

При  $n < 1$  и  $\sin \vartheta > n$  (случай полного внутреннего отражения) входящий в выражения (26) корень должен быть записан в виде  $i\sqrt{\sin^2 \vartheta - n^2}$ . При этом  $V_{\perp}$  и  $V_{\parallel}$  становятся комплексными величинами с модулями, равными единице.

Представим коэффициенты отражения в виде

$$V_{\perp} = \rho_{\perp} e^{i\varphi_{\perp}} \text{ и } V_{\parallel} = \rho_{\parallel} e^{i\varphi_{\parallel}}. \quad (27)$$

Тогда при полном внутреннем отражении мы получаем:

$$\rho_{\perp} = \rho_{\parallel} = 1$$

и

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\perp} &= -2 \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\mu_1} \frac{\sqrt{\sin^2 \vartheta - n^2}}{\cos \vartheta}, \\ \varphi_{\parallel} &= -2 \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\mu n^2} \frac{\sqrt{\sin^2 \vartheta - n^2}}{\cos \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Нетрудно видеть, что вблизи угла полного внутреннего отражения  $\varphi_{\perp}$  и  $\varphi_{\parallel}$  являются весьма быстро меняющимися функциями угла  $\vartheta$ . В частности, при  $\vartheta = \arcsin n$  производные  $\frac{\partial \varphi_{\perp}}{\partial \vartheta}$  и  $\frac{\partial \varphi_{\parallel}}{\partial \vartheta}$  обращаются в бесконечность. Следовательно, в этом случае нужно ожидать заметного смещения пучка.

Воспользовавшись, как и выше, обозначением  $p = k \sin \vartheta$ , мы можем записать при  $\mu = \mu_1 = 1$ :

$$\varphi_{\perp} = -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{p^2 - n^2}{1 - p^2}}. \quad (29)$$

Согласно (25) получаем для смещения пучка, если его осевая линия составляет угол  $\vartheta_0$  с нормалью к границе ( $\sin \vartheta_0 > n$ ),

$$\Delta_{\perp} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\operatorname{tg} \vartheta_0}{\sqrt{\sin^2 \vartheta_0 - n^2}}. \quad (30)$$

Аналогично, если вектор электрического поля лежит в плоскости падения волны, то

$$\Delta_{\parallel} = \frac{\lambda}{2\pi n^2} \frac{\operatorname{tg} \vartheta_0}{\sqrt{\sin^2 \vartheta_0 - n^2}}. \quad (31)$$

В этих формулах  $\lambda$  — длина волны в среде, из которой падает волна.

Из формул (30) и (31) видно, как и можно было ожидать, что смещение пучка увеличивается при приближении его угла падения к граничному углу полного внутреннего отражения.

При  $\sin \vartheta_0 \rightarrow n$  мы имеем из (30) и (31)  $\Delta_{\perp} \rightarrow \infty$  и  $\Delta_{\parallel} \rightarrow \infty$ , т. е. наши формулы теряют смысл. Последнее происходит потому,

что при  $\sin \vartheta_0$ , очень близких к  $n$ , фаза коэффициента отражения  $\varphi$  настолько быстро меняется при изменении угла, что в разложении (20) уже нельзя пренебрегать членами, содержащими  $\Omega^2$ ,  $\Omega^3$  и т. д. (при этом предполагается, что  $\Omega = p - \alpha$  имеет порядок величины, определяемый соотношением (12)).

Опытное определение смещения световых пучков при полном внутреннем отражении на границе стекло — воздух описывается в работах <sup>6, 7</sup>. Хотя при каждом отражении согласно формулам (30) и (31) смещение может по своей величине достигать многих длин волн, чтобы сделать его хорошо заметным, пришлось прибегнуть к многократным отражениям. При этом смещение умножалось в число раз, равное числу отражений. Опыты полностью подтвердили теоретические данные.

#### 4. Отражение ультразвуковых пучков

Коэффициент отражения плоской звуковой волны от границы раздела двух жидкостей или газов имеет вид

$$V = \frac{m \cos \vartheta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}{m \cos \vartheta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}, \quad (32)$$

где  $m = \frac{\rho_1}{\rho}$  — отношение плотностей сред,  $n$ , как и выше, — показатель преломления границы ( $n = c/c_1$ ).

Отсюда для фазы коэффициента отражения при полном внутреннем отражении, пренебрегая затуханием волн в средах ( $n$  вещественно), получаем:

$$\varphi = -2 \arctg \frac{\sqrt{\sin^2 \vartheta - n^2}}{m \cos \vartheta}. \quad (33)$$

Для смещения пучка, как и в случае электромагнитных волн, с помощью формулы (25) получаем выражение

$$\Delta = \frac{\lambda}{2\pi m} \frac{\operatorname{tg} \vartheta_0}{\sqrt{\sin^2 \vartheta_0 - n^2}}. \quad (34)$$

Мы снова замечаем, что смещение пучка становится особенно заметным вблизи угла полного внутреннего отражения, когда разность  $\sin^2 \vartheta_0 - n^2$  мала.

При падении звуковой волны из жидкости на границу твёрдого тела полное внутреннее отражение имеет место при  $\sin \vartheta > \frac{c}{b_1}$ , где  $c$  — скорость звуковых волн в жидкости и  $b_1$  — скорость сдвиговых волн в твёрдом теле. Вблизи граничного угла полного внутреннего отражения будет иметь место, как и в оптике, заметное смещение пучка, которое можно подсчитать по формуле (25), пользуясь соответствующим выражением для коэффициента отражения. Однако, кроме этого

случая, заметное смещение будет иметь место при таком угле падения волны, когда её фазовая скорость вдоль границы будет совпадать со скоростью волны Рэлея на границе твёрдого тела. Этот угол будет несколько превышать граничный угол полного внутреннего отражения. Вблизи него коэффициент отражения, как показывает подробный анализ, является весьма быстро меняющейся функцией. В частности, фаза коэффициента отражения меняется в окрестности этого угла приблизительно на  $2\pi$ .

Расчёт для смещения даёт в этом случае <sup>8</sup>

$$\Delta = \frac{2\lambda}{\pi} \frac{\rho_1}{\rho} \sqrt{\frac{r(r-s)}{s(s-1)}} \frac{1 + 6s^2(1-q) - 2s(3-2q)}{s-q}, \quad (35)$$

где  $\lambda$  — длина волны в жидкости,  $s = \left(\frac{b_1}{v_R}\right)^2$ ,  $q = \left(\frac{b_1}{c_1}\right)^2$ ,  $r = \left(\frac{b_1}{c}\right)^2$ ,

$v_R$  — скорость волны Рэлея,  $b_1$  и  $c_1$  — скорости сдвиговых и продольных волн в твёрдом теле,  $c$  — скорость звука в жидкости.

Величина  $s$  зависит от коэффициента Пуассона и изменяется для различных твёрдых тел в пределах от 1,1 до 1,3. Для алюминия, например,  $s = 1,15$ .

Подстановка численных значений в формулу (35) даёт для границ:

а) вода — алюминий  $\Delta = 24,4\lambda$ ;

б) ксилол — алюминий  $\Delta = 33,4\lambda$ .

Угол падения  $\vartheta_R$ , при котором имеет место это смещение, определяющийся из соотношения  $\sin \vartheta_R = \frac{c}{v_R}$ , составляет: для случая

а)  $\vartheta_R = 31^\circ$ , для случая б)  $\vartheta_R = 27^\circ$ .

Смещение  $\Delta$  достаточно велико, чтобы быть зафиксированным простым образом. На рис. 3 изображена снятая при помощи теневого

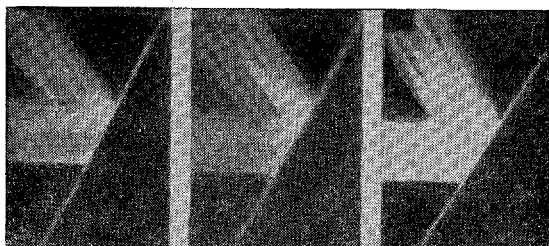


Рис. 3. Смещение ультразвукового пучка (частоты  $1,6 \cdot 10^7$  гц) при отражении его от границы ксилол-алюминий при трёх несколько отличающихся друг от друга углах падения.

метода картина полного отражения ультразвукового пучка (частота  $1,6 \cdot 10^7$  гц) от границы ксилол — алюминий для трёх углов падения (возрастающих слева направо <sup>8</sup>). На среднем изображении

угол падения равен  $\theta_R$ ; смещение отражённого пучка относительно падающего хорошо заметно. Это смещение отсутствует на крайних изображениях, где углы падения несколько отличны от  $\theta_R$ . Полная

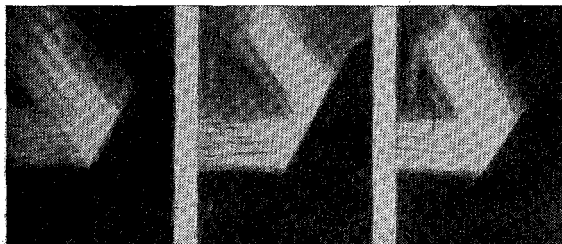


Рис. 4. Смещение ультразвукового пучка при отражении его от границы ксилол-алюминий для частоты  $5,6 \cdot 10^6$  гц и при трёх различных углах падения.

ширина пучка составляет 12 мм, длина волны в ксилоле при этой частоте 0,08 мм, смещение  $\Delta$ , в согласии с расчётным, оказывается равным 2,7 мм.

На рис. 4 приведена картина, полученная в тех же условиях, но для более низкой частоты  $5,6 \cdot 10^6$  гц ( $\lambda = 0,24$  мм). Поскольку,

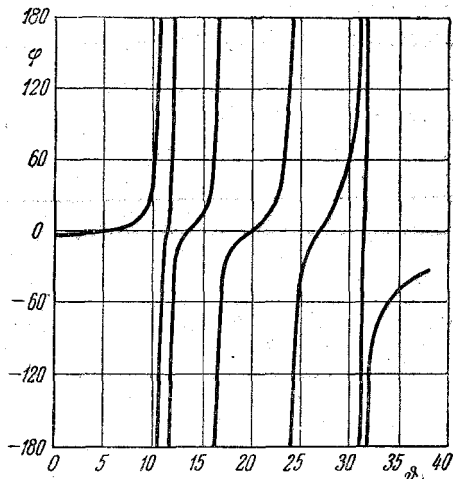


Рис. 5. Фаза  $\varphi$  коэффициента отражения звуковой волны от алюминиевой пластинки в воздухе при различных углах падения (расчёт). Толщина пластинки 3,1 мм, частота волны  $3,35 \cdot 10^6$  гц.

согласно теории, смещение пропорционально длине волны, здесь оно оказывается ещё более заметным; пучок смещается почти на всю

полную ширину. При этом вследствие увеличения длины волны границы пучка из-за дифракции оказываются более размытыми.

По величине смещения угол  $\vartheta_R$  определяется с настолько хорошей точностью, что на этом принципе может быть основан достаточно точный метод определения скорости волны Рэлея.

Весьма большое смещение звукового пучка может возникать при отражении его от пластинки, так как в этом случае фаза коэффициента отражения меняется с углом особенно быстро (см., например, рис. 5, где изображена фаза коэффициента отражения звуковой волны от алюминиевой пластинки в воздухе как функция угла падения). При этом по отношению к падающему пучку смещается также и прошедший пучок.

Два случая отражения ультразвукового пучка частоты  $16,3 \cdot 10^6$  гц от алюминиевой пластинки толщиной 0,43 мм в ксилоле изображены<sup>9</sup>

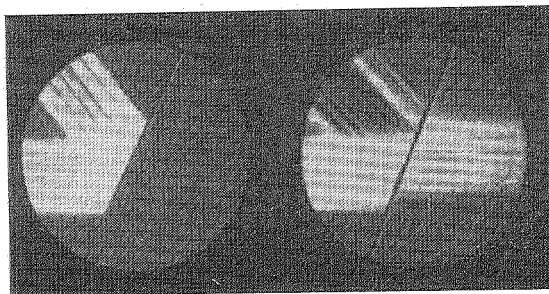


Рис. 6. Отражение ультразвукового пучка частоты  $16,3 \cdot 10^6$  гц от алюминиевой пластинки толщиной 0,43 мм в ксилоле.

на рис. 6. В этих случаях несколько различными являются углы падения пучка на пластинку. При этом в одном случае мы имеем почти полное отражение волны, в другом — почти полное её проникновение через пластинку. Смещения отражённого и прошедшего пучков по своей величине составляют несколько толщин пластинки. Бросается в глаза также неоднородность отражённого пучка по его сечению. На этом мы остановимся в следующем разделе.

### 5. Распределение энергии в сечении отражённого пучка

Для исследования «внутреннего строения» отражённого пучка, т. е. распределения энергии по его сечению, необходимо в формуле (20) для разложения фазы коэффициента отражения в ряд по углам учесть также и члены второго порядка\*). При этом вместо

\*) Рассматриваемый здесь вопрос формально аналогичен вопросу об изменении формы волнового пакета при распространении в диспергирующей среде (см. 5, откуда мы и берём схему расчёта).

формулы (23) мы получаем следующее выражение для поля отражённого пучка:

$$\psi_{\text{отр}}(x) = \frac{1}{2\pi} V(\vartheta_0) e^{i\alpha x} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \exp \left\{ i\Omega [x + \varphi'(\alpha) - \xi] + \right. \\ \left. + i\sqrt{k^2 - (\Omega + \alpha)^2} l + \frac{i\varphi''(\alpha)}{2} \Omega^2 \right\} d\xi d\Omega. \quad (36)$$

Здесь множитель  $\exp(i\sqrt{k^2 - (\Omega + \alpha)^2} l)$  можно вынести за знак интеграла при значении  $\Omega = 0$  вследствие медленности его изменения при изменении  $\Omega$  (в случае не очень больших  $l$ ). Этот множитель не зависит от изменения фазы волны при отражении и обуславливает распывание пучка из-за дифракции при его распространении от щели до отражающей поверхности. Это распывание уже достаточно хорошо исследовано в теории дифракции. Здесь мы его учитывать не будем.

Введём новую переменную  $\eta$  согласно соотношению

$$\varphi'' \left( \Omega + \frac{x + \varphi' - \xi}{\varphi''} \right)^2 = \pi \eta^2.$$

Выполняя интегрирование по  $\eta$  и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i \frac{\pi}{2} \eta^2} d\eta = 1 \pm i, \quad (37)$$

получаем:

$$\psi_{\text{отр}}(x) = \frac{1+i}{2} V(\vartheta_0) \frac{1}{\sqrt{\pi\varphi''}} e^{i(\alpha x + \sqrt{k^2 - \alpha^2} l)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \frac{(x + \varphi' - \xi)^2}{2\varphi''}} F(\xi) d\xi.$$

Обозначим далее

$$\frac{x + \varphi' - \xi}{\sqrt{\pi\varphi''}} = u,$$

тогда получим:

$$\psi_{\text{отр}}(x) = \frac{1+i}{2} V(\vartheta_0) e^{i(\alpha x + \sqrt{k^2 - \alpha^2} l)} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \frac{\pi}{2} u^2} F(x + \varphi' + \sqrt{\pi\varphi''} u) du. \quad (38)$$

При достаточно малом  $\varphi''$ , учитывая (37), мы снова получаем формулу (24), дающую смещение пучка без изменения его формы.

Дальнейший анализ выражения (38) без пренебрежения членом, содержащим  $\sqrt{\pi\varphi''}$ , возможен только при задании определённого распределения амплитуды волны по сечению падающего пучка, т. е. при задании вида функции  $F$ . Мы предположим здесь, что функция  $F$

задаётся соотношениями (7), т. е. что падающий пучок имеет ширину  $2a$  и постоянную по всему своему сечению интенсивность. Тогда интеграл (38) фактически будет вычисляться в пределах  $(u_1, u_2)$ , определяемых из соотношения

$$x + \varphi' + \sqrt{\pi\varphi''} u_{1,2} = \pm a, \quad (39)$$

или

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{\sqrt{\pi\varphi''}}(a + x + \varphi'); \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi\varphi''}}(a - x - \varphi'), \end{aligned} \quad (40)$$

так как вне этих пределов функция  $F$  обращается в нуль.

Учитывая, что в этих пределах  $F=1$ , получаем из (38)

$$\psi_{\text{отр}}(x) = \frac{1+i}{2} V(\vartheta_0) e^{i(ax + \sqrt{k^2 - a^2}l)} \int_{u_1}^{u_2} e^{-i\frac{\pi}{2}u^2} du. \quad (41)$$

Это же можно записать в несколько ином виде:

$$\psi_{\text{отр}}(x) = \frac{1+i}{2} V(\vartheta_0) e^{i(ax + \sqrt{k^2 - a^2}l)} [f(u_2) - f(u_1)], \quad (42)$$

где

$$f(u_1) = \int_0^{u_1} e^{-i\frac{\pi}{2}u^2} du = C(u_1) - iS(u_1) \quad (43)$$

и аналогично для  $f(u_2)$ . Здесь  $C$  и  $S$  — интегралы Френеля, значения которых можно найти в таблицах.

Так как функции  $C$  и  $S$  являются осциллирующими функциями своих аргументов, то и интенсивность в отражённом пучке будет меняться по сечению не монотонно. Качественно это подтверждается экспериментом (см., например, рис. 6). Количественное сравнение теории с экспериментом провести пока не представляется возможным ввиду отсутствия количественных измерений распределения интенсивности по сечению отражённого пучка.

## 6. О потоке энергии при полном внутреннем отражении

Смещение пучка при его отражении можно получить также, рассматривая поток энергии в падающем и отражённом пучках<sup>10, 11</sup>.

Как уже указывалось, линии потока энергии (вектора Умова-Пойнтинга) при полном внутреннем отражении безграничной плоской волны впервые были исследованы Эйхенвальдом<sup>3</sup>. Однако

этим результатам трудно сопоставить определённый эксперимент, поскольку для измерения плотности потока энергии в каждой точке пространства необходимо выделить ограниченный диафрагмой пучок.

Мы с самого начала будем предполагать, что на границу падает ограниченный пучок. Для определённости рассмотрим акустический случай (использовав при этом результаты работы<sup>12)</sup>, хотя случай электромагнитной волны в принципе ничем от него не отличается.

Плотность потока энергии в любом направлении даётся вектором Умова

$$\mathbf{I} = p\mathbf{v}, \quad (44)$$

где  $p$  — звуковое давление,  $\mathbf{v}$  — скорость частиц в звуковой волне. Если  $p$  и  $\mathbf{v}$  выразить через звуковой потенциал  $\varphi$ , то

$$\mathbf{I} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \text{grad } \varphi. \quad (45)$$

Если пользоваться комплексной формой записи волновых процессов, как это мы всюду делаем, то здесь под  $\varphi$  нужно подразумевать вещественную часть потенциала. Поэтому запишем  $\varphi$  в виде:

$$\varphi = \text{Re} [\psi(x, y, z) e^{-i\omega t}], \quad (46)$$

где символ  $\text{Re}$  означает вещественную часть. Но

$$\text{Re} (\psi e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2} (\psi e^{-i\omega t} + \psi^* e^{i\omega t}) \quad (47)$$

и, очевидно,

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \frac{1}{2} (\text{grad } \psi e^{-i\omega t} + \text{grad } \psi^* e^{i\omega t}); \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{i\omega}{2} (\psi^* e^{i\omega t} - \psi e^{-i\omega t}). \end{aligned} \quad (48)$$

Найдём среднее по времени от потока энергии  $\mathbf{I}$ . Перемножив (47) и (48) и усреднив по времени (при этом среднее по времени от членов, содержащих множители  $e^{i\omega t}$  и  $e^{-i\omega t}$  обращается в нуль), получаем:

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{i\omega\rho}{4} (\psi \text{grad } \psi^* - \psi^* \text{grad } \psi). \quad (49)$$

Если применить последнюю формулу для вычисления потока энергии в плоской волне, то, учтя, что  $\psi(x, y, z) = \psi_0 e^{ikr}$ , получаем  $\text{grad } \psi = ik\psi$ ,  $\text{grad } \psi^* = -ik\psi^*$ , и формула (49) даёт:

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\omega^2}{2} \psi_0^2 \mathbf{k}. \quad (50)$$

В случае ограниченного пучка для определения потока энергии необходимо пользоваться общей формулой (49).

Рассмотрим плотность среднего потока энергии на границе в направлении, перпендикулярном границе. Из (49) имеем:

$$\bar{I}_z = \frac{i\omega\rho}{2} \left( \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \quad (51)$$

Согласно (14)—(16) суммарное поле падающего и отражённого лучков на границе можно записать в виде

$$\psi(x) = \psi_{\text{пад}}(x) + \psi_{\text{отр}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(p) [1 + V(p)] e^{ipx} dp, \quad (52)$$

где

$$A(p) \equiv \Phi(p) e^{i\sqrt{k^2 - p^2}l}, \quad (53)$$

а  $V(p)$  — коэффициент отражения плоской волны, наклон которой по отношению к границе характеризуется параметром  $p$ . Значение  $\frac{\partial \psi}{\partial z}$  получается путём умножения подынтегрального выражения для падающего пучка (см. (9)) на  $i\mu$ , а подынтегрального выражения для отражённого пучка на  $-i\mu$ , где  $\mu \equiv \sqrt{k^2 - p^2}$ . В результате, аналогично (52), будем иметь:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = i \int_{-\infty}^{+\infty} \mu A(p) [1 - V(p)] e^{ipx} dp. \quad (54)$$

Подставляя теперь (52) и (54) в формулу (51), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{I}_z = & -\frac{i\omega\rho}{4} \left\{ \iint_{-\infty}^{+\infty} \mu [A(p') A^*(p) e^{ix(p' - p)} + \right. \\ & + A^*(p') A(p) e^{-ix(p' - p)}] dp' dp - \\ & - \iint_{-\infty}^{+\infty} \mu [A(p') A^*(p) V(p') V^*(p) e^{ix(p' - p)} + \\ & + A^*(p') A(p) V^*(p') V(p) e^{-ix(p' - p)}] dp' dp + \\ & + \iint_{-\infty}^{+\infty} \mu [A(p') A^*(p) (V(p') - V^*(p)) e^{ix(p' - p)} + \\ & + A^*(p') A(p) (V^*(p') - V(p)) e^{-ix(p' - p)}] dp' dp \}. \end{aligned} \quad (55)$$

Выражение для  $\bar{I}_2$  в результате разделяется на три слагаемых:  $I_I + I_{II} + I_{III}$ . Из них  $I_I$  содержит лишь величины, относящиеся к падающему пучку, и соответствует, таким образом, потоку энергии лишь в падающем пучке. Аналогично,  $I_{II}$  даёт поток энергии в отражённом пучке и поэтому имеет знак, противоположный знаку  $I_I$ . Наконец, в  $I_{III}$  величины для падающей и отражённой волны перемешаны: этот член характеризует неаддитивность потоков энергии в падающей и отражённой волнах.

В рассматриваемом нами случае полного отражения  $\rho(p)$  в выражении (14) для коэффициента отражения равняется единице; функцию же  $\varphi(p)$  мы снова представим в виде разложения (20) по степеням  $\Omega$  с учётом 1-й степени  $\Omega$ . Напомним, что законность этого разложения обуславливается малостью углового раскрытия исследуемого пучка. В результате получаем после несложных преобразований

$$\bar{I}_I(x) = \frac{\omega \rho}{2} k \cos \vartheta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} A(p') A^*(p) e^{ix(p'-p)} dp' dp;$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{II}(x) &= -\frac{\omega \rho}{2} k \cos \vartheta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} A(p') A^*(p) e^{i(x-\Delta)(p'-p)} dp' dp = \\ &= -I_I(x - \Delta), \end{aligned}$$

$$I_{III}(x) = \frac{i\omega \rho}{2} \sin \varphi_0 \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu' - \mu) A(p') A^*(p) e^{i(x - \frac{\Delta}{2})(p'-p)} dp' dp,$$

где через  $\varphi_0$  обозначено значение фазы коэффициента отражения  $\varphi(p)$  при  $p = \alpha = k \sin \vartheta_0$ , т. е. при угле наклона, соответствующем наклону осевой линии пучка;  $\Delta$  имеет указанное выше значение (25).

При преобразовании выражений для  $I_I$  и  $I_{II}$  функция  $\mu$ , как медленно меняющаяся, вынесена за знак интеграла при значении  $\mu = k \cos \vartheta_0$ . Этого, однако, нельзя делать в  $I_{III}$ , поскольку тогда  $I_{III}$  обратилось бы тождественно в нуль. Поэтому разность  $\mu' - \mu = \sqrt{k^2 - p'^2} - \sqrt{k^2 - p^2}$  разложим в ряд в окрестности точки  $p' = p = \alpha$ . При этом мы будем иметь:

$$\begin{aligned} \mu' - \mu &= \left( \frac{\partial \sqrt{k^2 - p'^2}}{\partial p'} \right)_{p'=\alpha} (p' - \alpha) - \\ &- \left( \frac{\partial \sqrt{k^2 - p^2}}{\partial p} \right)_{p=\alpha} (p - \alpha) = -\operatorname{tg} \vartheta_0 (p' - p). \end{aligned}$$

После этого получаем:

$$I_{III} = -\frac{\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \vartheta_0}{k \cos \vartheta_0} \frac{\partial}{\partial x} I_I \left( x - \frac{\Delta}{2} \right). \quad (56)$$

Мы видим, что  $I_{II}$  представляет собой тот же поток энергии, что и поток  $I_I$  в падающем пучке, но только с обратным знаком и со сдвигом его вдоль границы на величину  $\Delta$ , что и означает смещение отражённого пучка по отношению к падающему.

Для наглядности на рис. 7 схематически изображена зависимость составных частей потока энергии  $I_I$ ,  $I_{II}$ ,  $I_{III}$  от координаты  $x$ . Во внутренней части сечения пучка результирующий поток энергии  $\bar{I}_z = I_I + I_{II} + I_{III}$  равен нулю вследствие компенсации друг другом потоков падающего и отражённого пучков. В краевых же областях пучка энергия с одной стороны втекает в отражающую среду, а с другой — возвращается обратно (рис. 8).

Полное количество энергии, участвующее в этом «обмене», т. е. количество энергии, втекающее в отражающую среду и вытекающее из неё в единицу времени, получится путём интегрирования  $\bar{I}_z$  от

$x = -\infty$  до  $x = x_m$ , где  $x_m$  соответствует середине пучка. При этом получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_m} \bar{I}_z dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (I_I + I_{II} + I_{III}) dx = \\ &= I_I(x_m) \left( \Delta - \frac{\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \vartheta_0}{k \cos \vartheta_0} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

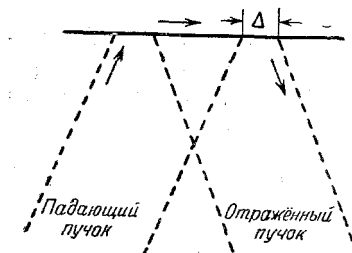


Рис. 8. Полное внутреннее отражение пучка. Стрелки указывают на направление потока энергии в краевых областях пучка и в преломлённой волне.

в плоской волне с той же амплитудой, что и амплитуда в центре пучка.

Интересно отметить, что при приближении угла падения к граничному углу полного внутреннего отражения ( $\sin \vartheta_0 \rightarrow n$ ) величина полного потока быстро возрастает, поскольку при этом согласно формуле (34) возрастает смещение пучка  $\Delta$ . При этом как можно показать, возрастает и глубина проникновения волны в среду, от которой исследуется отражение.

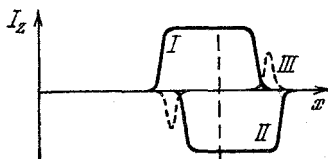


Рис. 7. Распределение составных частей нормальной к границе компоненты потока энергии  $I_z$ .

Здесь, поскольку ширина пучка предполагается достаточно большой по сравнению с длиной волны,  $I_I(x_m)$  практически равно проекции на ось  $z$  плотности потока энергии

## 7. Отражение от неоднородной среды

Весьма большой интерес представляет исследование отражения ограниченного пучка от среды с непрерывно меняющимися свойствами. Здесь применение формулы (25) для смещения приводит к интересным результатам, дополняющим обычные лучевые представления о рефракции волн<sup>13</sup>.

Рассмотрим конкретный пример, когда показатель преломления среды является следующей функцией координаты  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} n &= 1 && \text{при } z \leq 0, \\ n &= \sqrt{1 - az} && \text{при } z > 0. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Ниже будет видно, что полученные при этом результаты имеют общее значение.

Предположим, что из однородной среды ( $z < 0$ ) на границу  $z = 0$  падает ограниченный пучок. Чтобы найти форму и местоположение отраженного пучка, необходимо, как мы видели, прежде всего найти коэффициент отражения плоской волны от этой границы  $V(\vartheta)$  как функцию угла падения.

Для поля падающей и отраженной плоских волн в однородной среде мы имеем:

$$\psi = [e^{ik_0 z \cos \vartheta} + V(\vartheta) e^{-ik_0 z \cos \vartheta}] e^{ik_0 x \sin \vartheta}, \quad (59)$$

где первый член представляет собой падающую, а второй отраженную волну,  $k_0$  — волновое число в однородной среде.

Поле в неоднородной среде представляет собой решение волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + (k_0 n)^2 \psi_1 = 0 \quad (60)$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \quad \psi = \psi_1 \quad \text{при } z = 0 \quad (61)$$

и при условии

$$\psi_1 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (62)$$

Граничные условия (61) означают в акустике непрерывность давления и нормальной составляющей скорости частиц, а в электромагнитном случае непрерывность тангенциальных компонент электромагнитного поля.

Решение уравнения (60) ищем в виде

$$\psi_1 = \eta(z) e^{ik(z)x \sin \vartheta(z)}, \quad k(z) = k_0 n(z). \quad (63)$$

Функция  $\vartheta(z)$  связана с углом падения волны  $\vartheta$  соотношением  $n(z) \sin \vartheta(z) = \sin \vartheta$ , так что  $\vartheta(0) = \vartheta$ . Для  $\eta(z)$  при этом получаем уравнение

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} + k_0^2 [n^2(z) - \sin^2 \vartheta] \eta = 0. \quad (64)$$

Для выбранного нами вида функции  $n(z)$  (см. (58)), введя новую переменную  $\zeta = \cos^2 \vartheta - az$ , последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{d^2 \eta}{d\zeta^2} + \left(\frac{k_0}{a}\right)^2 \zeta \eta = 0.$$

Это уравнение имеет решение:

$$\eta = A w^{1/3} \left[ H_{1/3}^{(2)}(w) + e^{i\frac{\pi}{3}} H_{1/3}^{(1)}(w) \right], \quad \zeta > 0, \quad (65)$$

$$\eta = -i A e^{i\frac{\pi}{3}} w^{1/3} H_{1/3}^{(1)}(i w_1), \quad \zeta < 0, \quad (65')$$

где  $H$  — функция Ганкеля,  $A$  — постоянная величина,  $w = 2 \frac{k_0}{3a} \zeta^{3/2}$ ,

$w_1 = \frac{2}{3} \frac{k_0}{a} (-\zeta)^{3/2}$ . Выражения (65) и (65') связаны между собой соотношением обхода<sup>13</sup> и удовлетворяют условиям непрерывности  $\eta$  и  $\frac{d\eta}{dz}$  при  $\zeta = 0$ . Решение (65) удовлетворяет также условию (62).

Из (59), (61), (63) и (65) находим коэффициент отражения:

$$V = \frac{J_{2/3}(w_0) - J_{-2/3}(w_0) - i [J_{1/3}(w_0) + J_{-1/3}(w_0)]}{J_{2/3}(w_0) - J_{-2/3}(w_0) + i [J_{1/3}(w_0) + J_{-1/3}(w_0)]}; \quad (66)$$

$$w_0 \equiv w_z = 0 = \frac{k_0}{3a} \cos^2 \vartheta.$$

Здесь функции Бесселя целесообразно выразить через функции Эйри согласно соотношениям<sup>14</sup>:

$$\left. \begin{aligned} v(-t) &= \frac{1}{3} \sqrt{\pi t} [J_{-1/3}(w_0) + J_{1/3}(w_0)]; \\ v'(-t) &= -\frac{1}{3} \sqrt{\pi t} [J_{-2/3}(w_0) - J_{2/3}(w_0)]; \\ t &= \left(\frac{3}{2} w_0\right)^{2/3} = \left(\frac{k_0}{a}\right)^{2/3} \cos^2 \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

В результате, если записать

$$V(\vartheta) = e^{i\varphi(\vartheta)}, \quad (68)$$

то получаем:

$$\varphi(\vartheta) = -2 \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{t} \frac{v(-t)}{v'(-t)} \right] - \pi. \quad (69)$$

Прежде чем переходить к анализу этого выражения в общем случае, полезно исследовать случай  $|t| \gg 1$ . Последнее условие, как видно из (67), выполняется, если:

а)  $\frac{k_0}{a} \gg 1$ , т. е. изменение показателя преломления мало на длине волны;

б)  $\cos \vartheta$  не слишком мал (не слишком скользящее падение волны).

При  $|t| \gg 1$  мы имеем асимптотические выражения<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} v(-t) &= (t)^{-\frac{1}{4}} \sin\left(w_0 + \frac{\pi}{4}\right); \\ v'(-t) &= -\frac{1}{t^{\frac{1}{4}}} \cos\left(w_0 + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (70)$$

Подставляя их в (69), получаем:

$$\varphi = \frac{4k_0}{3a} \cos^3 \vartheta - \frac{\pi}{4}. \quad (71)$$

Интересно отметить, что это выражение для фазы, за исключе-

нием слагаемого  $\frac{\pi}{2}$  (которое при сделанных нами предположениях мало по сравнению с первым членом), может быть получено с помощью представлений геометрической оптики. Действительно, согласно этим представлениям, волна проникает в неоднородную среду на расстоянии  $z_m$ , определяемое из условия

$$n(z_m) = \sin \vartheta. \quad (72)$$

Рис. 9. Лучевая картина полного отражения от неоднородной среды.

В плоскости  $z = z_m$  луч, падающий на границу под углом  $\vartheta$  и имеющий в каждой точке направление, определяемое углом  $\vartheta(z)$ , удовлетворяющим условию

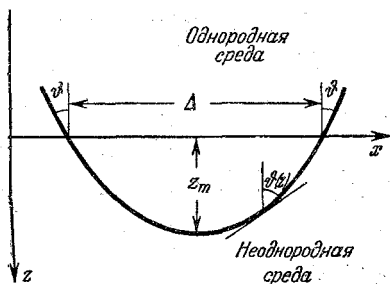
$$n(z) \sin \vartheta(z) = \sin \vartheta, \quad (73)$$

принимает горизонтальное направление (рис. 9).

Набег фазы при пробеге волны от границы  $z=0$  до плоскости  $z = z_m$  и обратно будет, очевидно:

$$\varphi = 2 \int_0^{z_m} k_z dz = 2k_0 \int_0^{z_m} n(z) \cos \vartheta(z) dz.$$

Это и будет фазой коэффициента отражения.



Учитывая соотношение (73), получаем:

$$\varphi = 2k_0 \int_0^z \sqrt{n^2(z) - \sin^2 \vartheta} \, dz. \quad (74)$$

Для рассматриваемого нами конкретного случая, когда функция  $n(z)$  при  $z > 0$  задана вторым из соотношений (58), находим:

$$\varphi = 2k_0 \int_0^z \sqrt{\cos^2 \vartheta - az} \, dz \quad (75)$$

или, после замены  $\zeta = \cos^2 \vartheta - az$ :

$$\varphi = \frac{2k_0}{a} \int_0^{\cos^2 \vartheta} \zeta^{1/2} d\zeta = \frac{4k_0}{3a} \cos^3 \vartheta, \quad (76)$$

что действительно совпадает с (71) с точностью до члена  $\frac{\pi}{2}$ .

Интересно также вычислить смещение пучка при его отражении в приближении геометрической оптики. Выразив  $\vartheta$  через  $p$  согласно соотношению

$$p = k_0 \sin \vartheta, \quad (77)$$

получаем:

$$\varphi = \frac{4k_0}{3a} \left( 1 - \frac{p^2}{k_0^2} \right)^{3/2}. \quad (78)$$

После этого из (25), учитывая также, что  $\alpha = k_0 \sin \vartheta_0$ , где  $\vartheta_0$  — угол падения пучка, находим:

$$\Delta = \frac{2 \sin 2\vartheta_0}{a}. \quad (79)$$

Это же выражение для смещения мы получим, рассчитав ход луча на рис. 9 и учтя при этом соотношения (73) и (58). Мы предоставляем читателю убедиться в этом самому.

Перейдём теперь к рассмотрению общего случая. Мы имеем согласно (67) и (77):

$$t = \left( \frac{k_0}{a} \right)^{2/3} \left( 1 - \frac{p^2}{k_0^2} \right). \quad (80)$$

Учитывая, кроме того, что  $\alpha = k_0 \sin \vartheta_0$ , получаем:

$$\left( \frac{d\varphi}{dp} \right)_{p=\alpha} = \frac{4k_0}{a} \cos^2 \vartheta_0 \sin \vartheta_0 - 2 \left( \frac{k_0}{a} \right)^{1/3} \sin \vartheta_0 \frac{vv'}{v'^2 + t^2}, \quad (81)$$

где

$$v \equiv v(-t), \quad v' \equiv \frac{\partial}{\partial t} v(-t).$$

При дифференцировании учтено также дифференциальное уравнение для функции Эйри:

$$v''(t) = tv(t). \quad (82)$$

Смещение  $\Delta$  пучка при отражении определится соотношением (25). Получающееся при этом выражение для смещения представляет интерес только для случая углов падения  $\vartheta_0$ , близких к  $\frac{\pi}{2}$ , так как в противном случае целесообразно пользоваться более простой формулой (79), полученной в геометрическом приближении. Введя вместо угла падения  $\vartheta_0$  угол скольжения  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \vartheta_0$  и предполагая, что  $\alpha_0 \ll 1$ , получаем:

$$\left(\frac{a^2}{4\lambda_0}\right)^{1/3} \Delta = 2^{1/3} \sqrt{-t} \left[ 1 + \frac{1}{2t} \frac{v(t)v'(t)}{v'^2(t) - tv^2(t)} \right], \quad (83)$$

где теперь

$$t \equiv -\frac{\alpha_0}{(a\lambda_0)^{2/3}}, \quad \lambda \equiv \frac{1}{k_0}.$$

На рис. 10 величина  $\left(\frac{a^2}{4\lambda_0}\right)^{1/3} \Delta$  изображена графически как

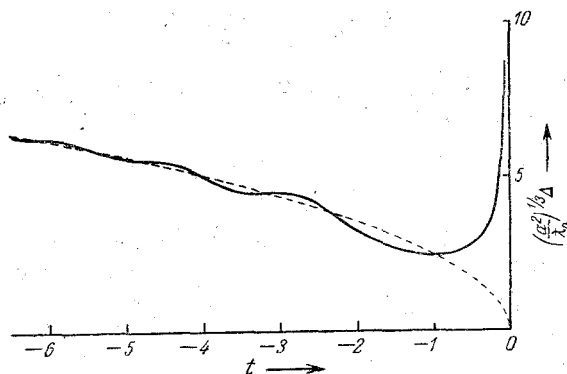


Рис. 10. Смещение пучка при отражении как функция параметра  $t$ .

функция  $t$  (сплошная линия). Этим графиком можно пользоваться для практических расчётов.

Интересно сравнить полученное значение смещения  $\Delta$  с приближённым значением (79), полученным с помощью лучевых представ-

лений. При этом выражение (79) целесообразно записать в виде

$$\left(\frac{a^2}{4\lambda}\right)^{1/3} \Delta = 2^{1/3} (-t)^{1/3}. \quad (84)$$

График этой функции на рис. 10 изображён пунктирной линией.

Из сравнения сплошной и пунктирной кривых мы видим, что лучевая теория даёт приблизительно правильный результат при условии

$$|t| \gg 1 \text{ или } \alpha_0 \gg (a\lambda_0)^{1/3}. \quad (85)$$

При невыполнении этого условия между точной и лучевой теорией возникают существенные расхождения.

Отметим, что выражение (83) для смещения в существенной области при  $|t| < 1$  справедливо не только для случая, когда показатель преломления  $n(z)$  даётся второй из формул (58), но также во всех тех случаях, когда разложение функции  $n(z)$  в ряд по степеням  $z$  имеет линейный член, т. е. когда при достаточно малых  $z$  можно записать

$$n(z) = 1 - \frac{a}{2} z. \quad (86)$$

Такая широкая применимость полученного результата обуславливается тем, что при малых углах скольжения процесс отражения волны при любом законе изменения  $n(z)$  разыгрывается в слое, где  $az \ll 1$  и, следовательно, справедливо разложение (86). Покажем, что при больших углах скольжения, когда волна при отражении заходит в более глубокие слои неоднородной среды, можно пользоваться лучевыми представлениями. При этом  $\Delta$  вычисляется элементарным путём для любого закона  $n(z)$  и надобность в развитой выше теории пропадает.

За наименьший угол скольжения, лежащий на границе области применимости лучевой теории, можно согласно (85) взять угол

$$\alpha_{\text{гр}} \cong (a\lambda_0)^{1/3} \ll 1. \quad (87)$$

Луч, падающий на границу однородной и неоднородной сред под этим углом скольжения, проникает в неоднородную среду на глубину  $z_m$ , определяемую из соотношения (см. (72))

$$n(z_m) = \cos \alpha_{\text{гр}} \cong 1 - \frac{1}{2} \alpha_{\text{гр}}^2.$$

Воспользовавшись разложением (86) функции  $n(z)$  по степеням  $z$ , получаем из последнего соотношения:

$$\frac{1}{2} az_m = \frac{1}{2} \alpha_{\text{гр}}^2 \ll 1.$$

При меньших углах скольжения, где лучевая теория уже неприменима, глубина проникновения волны в неоднородную среду будет

во всяком случае, не больше \*), так что условие  $az \ll 1$  действительно можно считать выполненным, что и нужно было доказать. Задача о полном отражении волн от границы однородной и неоднородной сред решалась также в работе<sup>15</sup> (см. также § 19). Автором этой работы рассчитан ход луча вблизи точки поворота в неоднородной среде. При этом он нашёл, что луч в самой точке поворота образует излом. Нам кажется, что его результат не имеет физического смысла, так как проследивать ход луча там, где не применима лучевая теория, нельзя.

## II. ОТРАЖЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ

### 8. Общие соотношения. Закон сохранения интегрального импульса

Рассмотрим отражение импульса с плоским фронтом от плоской границы. Для этого воспользуемся разложением импульса на плоские монохроматические волны, падающие на границу под тем же углом падения, что и импульс.

Предположим для определённости снова, что плоскость падения импульса совмещена с плоскостью  $xz$  (рис. 11). Тогда общее выражение для произвольного импульса с плоским фронтом, падающего на плоскость  $z=0$  под углом  $\vartheta$ , может быть записано в виде:

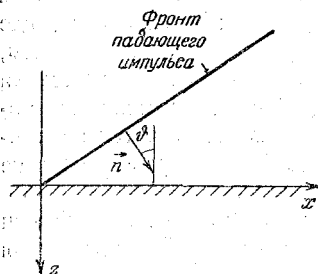


Рис. 11. Падение импульса с плоским фронтом на плоскую границу.

$$F(x, z, t) = F\left(\frac{x \sin \vartheta + z \cos \vartheta}{c} - t\right). \quad (88)$$

Здесь под  $F$  мы будем понимать звуковое давление, если рассматривается акустический случай. В электромагнитном случае под  $F(\xi)$  нужно понимать величину электрического поля  $E_y$ , если  $\mathbf{E}$  перпендикулярно плоскости падения, и величину магнитного поля  $H_y$ , если  $\mathbf{H}$  перпендикулярно этой плоскости. Введём обозначение

$$\xi = \frac{x \sin \vartheta + z \cos \vartheta}{c} - t. \quad (89)$$

Тогда можно представить функцию  $F(\xi)$  в виде разложения в интеграл Фурье

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega + K. \text{ C.}, \quad (90)$$

\*) Это, вообще говоря, требует доказательства, проведённого на основе волновой теории. Читатель может сделать это для  $n(z)$ , даваемого формулой (58) при помощи выражений (65) и (65') для поля в неоднородной среде.

где

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi. \quad (91)$$

Символом *K. С.* для сокращения обозначается член, комплексно-сопряженный выписанному впереди члену.

Экспонента  $e^{i\omega\xi}$  под интегралом в (90) является, как легко видеть при учете (89), гармонической плоской волной частоты  $\omega$ . Следовательно, выражение (90) представляет собой разложение импульса по плоским гармоническим волнам.

Обозначив, как и ранее, коэффициент отражения плоской гармонической волны через  $V$ , отраженный импульс запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} F_{\text{отр}}(\xi^-) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} V \Phi(\omega) e^{i\omega\xi^-} d\omega + K. С., \\ \xi^- &= \frac{x \sin \vartheta - z \cos \vartheta}{c} - t. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

В общем случае  $V$  является комплексной величиной, зависящей от частоты  $\omega$  (например, в случае отражения волны от слоя). Поэтому отраженный импульс может иметь форму, совершенно отличную от формы падающего импульса. Форма импульса не меняется только в том случае, когда  $V$  является вещественной величиной, не зависящей от  $\omega$ . Действительно, в этом случае  $V^* = V$ , причём  $V$  как постоянная величина выносится за знак интеграла, и из (92) мы получаем выражение, аналогичное (90), умноженное лишь на коэффициент отражения  $V$ . Однако, если мы имеем полное внутреннее отражение от границы раздела двух однородных сред, где  $V$  хотя и не зависит от частоты, но является комплексной величиной, функция  $F_{\text{отр}}(\xi^-)$  будет существенно иной, чем функция  $F(\xi)$ , т. е. форма импульса изменится. Этот случай мы подробнее исследуем ниже.

Прошедший импульс запишется по аналогии с (92):

$$\left. \begin{aligned} F_{\text{пр}}(\xi_1) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} D \Phi(\omega) e^{i\omega\xi_1} d\omega + K. С., \\ \xi_1 &= \frac{x \sin \vartheta_1 + z \cos \vartheta_1}{c_1} - t, \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

где  $c_1$  — скорость распространения в среде, куда проникает волна,  $\vartheta_1$  — угол преломления, связанный с углом падения соотношением  $\sin \vartheta_1 = \frac{c_1}{c} \sin \vartheta$ ,  $D$  — коэффициент прозрачности.

Остановимся на доказательстве следующей весьма интересной теоремы: полный (интегральный) импульс в любой точке верхней среды равен полному импульсу в любой точке нижней среды. При этом под верхней и нижней средами мы понимаем соответственно среду, из которой падает волна, и среду, от которой исследуется отражение.

Эту теорему можно назвать законом сохранения полного импульса. Математически эта теорема соответствует тождеству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F + F_{\text{отр}}) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\text{пр}} dt, \quad (94)$$

которое остаётся справедливым независимо от формы падающего импульса и точек в пространстве, для которых берутся интегралы в правой и левой частях равенства \*). Так, например, при полном внутреннем отражении импульса максимальное значение  $F_{\text{пр}}$  в импульсе, как мы увидим ниже, будет убывать при углублении в среду, от которой происходит отражение. Однако при этом импульс должен растягиваться во времени так, чтобы его площадь, даваемая интегралом в правой части (94), оставалась постоянной при сколь угодно большом удалении от границы.

Чтобы убедиться в справедливости (94), рассмотрим сначала выражение для интегральной величины падающего импульса. Учитывая, что согласно (91) мы имеем:

$$\Phi^*(\omega) = \Phi(-\omega), \quad (95)$$

выражение (90) для падающего импульса можно записать в виде

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Phi(-\omega) e^{-i\omega\xi} d\omega$$

или, заменяя во втором интеграле  $-\omega$  на  $\omega$ , получаем:

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega. \quad (96)$$

Интеграл по  $t$  в бесконечных пределах эквивалентен интегралу по  $\xi$ . Поэтому:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) d\xi = - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega\xi} d\xi d\omega. \quad (97)$$

\*) Насколько нам известно, до настоящего времени в литературе имелось указание на справедливость этого закона лишь для частного вида импульса при отражении его от плоской границы двух однородных сред<sup>16</sup>.

Но, как известно, имеет место соотношение<sup>17</sup>

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\xi} d\xi = \delta(\omega), \quad (98)$$

где  $\delta(\omega)$  — функция Дирака. Учитывая основное свойство этой функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \delta(\omega) d\omega = f(0), \quad (99)$$

где  $f(\omega)$  — произвольная непрерывная функция, находим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) d\xi = -\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) \delta(\omega) d\omega = -\pi \Phi(0). \quad (100)$$

Этот результат можно было бы предугадать заранее, поскольку известно, что площадь кривой даётся постоянной составляющей (соответствующей  $\omega=0$ ) разложения этой кривой в ряд или интеграл Фурье.

Каждая из падающих плоских волн даёт согласно (92) отражённую волну

$$\frac{1}{2} V(\omega) \Phi(\omega) e^{i\omega\xi^-} + K. C.,$$

что, если обозначить,

$$V(\omega) \Phi(\omega) = A(\omega) + iB(\omega), \quad (101)$$

запишется так:

$$\frac{1}{2} A(\omega) (e^{i\omega\xi^-} + e^{-i\omega\xi^-}) + B(\omega) \sin \omega\xi^-.$$

При интегрировании по  $\xi^-$  последний член обращается в нуль, в силу его нечётности по отношению к  $\xi^-$ , а первый, как и в случае падающей волны, даёт

$$-\pi A(0), \text{ т. е. } -\pi \operatorname{Re} [V(0) \Phi(0)].$$

Аналогичное выражение с заменой  $V$  на  $D$  получается и для интеграла от преломлённого импульса в произвольной точке пространства.

Таким образом, для доказательства (94) достаточно убедиться в справедливости равенства

$$\Phi(0) + \operatorname{Re} [V(0) \Phi(0)] = \operatorname{Re} [D(0) \Phi(0)].$$

Однако согласно (95) мы имеем  $\Phi^*(0) = \Phi(0)$ , т. е.  $\Phi(0)$  вещественно. Поэтому последнее равенство сводится к соотношению

$$1 + \operatorname{Re} V(0) = \operatorname{Re} D(0). \quad (102)$$

Нетрудно убедиться, что имеет место более общее равенство

$$1 + V(0) = D(0), \quad (103)$$

взяв вещественную часть от которого мы и получим (102).

В случае отражения от границы раздела двух однородных сред коэффициенты  $V$  и  $D$  не зависят от частоты и равенство  $1 + V = D$  следует просто из условий непрерывности на границе звукового давления или тангенциальных составляющих электромагнитного поля. Можно показать, что в более сложных случаях, когда отражение происходит от слоя или совокупности слоев, для частоты  $\omega \rightarrow 0$  (т. е. для бесконечно большой длины волны) вся эта совокупность будет представлять собой сосредоточенную систему, которая никак не скажется на процессе отражения, и последний будет происходить, так, как будто бы среды, разделяемые этой совокупностью, соприкасались непосредственно, т. е. будет выполняться равенство (103)\*.

Представляет интерес и другое доказательство закона (94), которое мы дадим для случая акустического импульса\*\*).

Прежде всего, без доказательства ясно, что в двух точках  $A$  и  $A'$  (рис. 12), лежащих в плоскости, параллельной отражающей

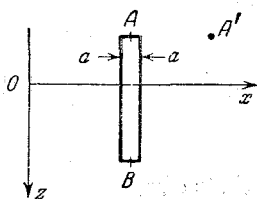


Рис 12. К доказательству закона сохранения интегрального импульса.

границе (в данном случае в плоскости  $z = \text{const}$ ), интегральный импульс будет одинаковым, так как эти две точки расположены совершенно одинаково по отношению к отражающей границе. Поэтому достаточно сравнить интегральные импульсы лишь для точек  $A$  и  $B$ , лежащих на одной и той же нормали к границе, независимо от того, по одну или по разные стороны от отражающей границы они находятся. Рассмотрим две таких точки  $A$  и  $B$ . Представим себе элементарный цилиндр с бесконечно малой площадью оснований, на которых и расположены точки  $A$  и  $B$ . Этот цилиндр до прохождения волны был в покое и останется в покое после прохождения волны. Это значит, что получаемый им полный импульс равен нулю, т. е. интеграл от давления, действующего на поверхность цилиндра по всей его поверхности

\*) Это «выпадение» влияния слоя при  $\omega = 0$  следует из общих формул для коэффициента отражения от слоя произвольного вида<sup>18</sup>.

\*\*) На возможность этого доказательства автору указал М. А. Исаович.

и по времени от  $-\infty$  до  $+\infty$ , равен нулю. Так как действие сил на боковую поверхность (стрелки на рис. 12) взаимно компенсируется, то должны быть равными интегральные импульсы, действующие на основания цилиндра, т. е. выражения:

$$dS \int_{-\infty}^{+\infty} p_A(t) dt \text{ и } dS \int_{-\infty}^{+\infty} p_B(t) dt,$$

где  $dS$  — площадь оснований цилиндра,  $p_A(t)$  и  $p_B(t)$  — звуковые давления в точках  $A$  и  $B$  как функции времени. Таким образом, имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_A(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p_B(t) dt,$$

которое нам и нужно было доказать.

К числу общих законов, выполняющихся при отражении импульса произвольной формы, относится также, конечно, и закон сохранения энергии, который записывается в виде:

$$S_z + S_z^{\text{отр}} = S_z^{\text{пр}}, \quad (104)$$

где через  $S_z$ ,  $S_z^{\text{отр}}$  и  $S_z^{\text{пр}}$  обозначены компоненты потока энергии по оси  $z$  соответственно в падающей, отраженной и преломленной волнах.

Так, в случае звукового импульса имеем:

$$S_z = \int_{-\infty}^{+\infty} p v_z dt, \quad (105)$$

где  $p$  и  $v_z$  — звуковое давление и компонента скорости по оси  $z$  в падающей волне. Аналогично записываются также  $S_z^{\text{отр}}$  и  $S_z^{\text{пр}}$ .

Убедиться в справедливости закона (104) для импульса нетрудно, поскольку он выполняется для каждой из гармонических волн, на которые может быть разложен импульс. При полном внутреннем отражении  $S_z^{\text{пр}} = 0$ , поскольку преломленный импульс распространяется вдоль границы раздела. Доказательство (104) в этом случае см. в <sup>19</sup>.

## 9. Искажение формы импульса при полном внутреннем отражении

Рассмотрим этот вопрос для некоторых частных видов импульса. Возьмем сначала импульс, форма которого задается функцией

$$F(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \xi^2}, \quad (106)$$

где  $\xi$  даётся выражением (89), а  $\epsilon$  — параметр, характеризующий ширину импульса. Вид этого импульса изображён на рис. 13. Его разложение в интеграл Фурье, как легко проверить, имеет вид:

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\omega + i\omega\xi} d\omega + K. C. \quad (107)$$

или

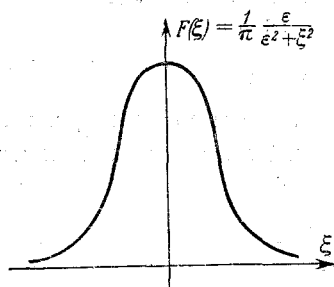
$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\epsilon|\omega| + i\omega\xi} d\omega. \quad (108)$$

Таким образом, если представить (108) в общем виде (96), то надо положить

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi} e^{-\epsilon|\omega|}. \quad (109)$$

Заметим, что при  $\epsilon \rightarrow 0$  рассматриваемый импульс переходит в импульс, характеризуемый  $\delta$ -функцией, что непосредственно видно из сравнения (98) и (108).

Падающий импульс (106) можно записать также в виде:



$$F(x, z, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \left( \frac{x \sin \vartheta + z \cos \vartheta}{c} - t \right)^2}. \quad (110)$$

Рис. 13. Форма импульса, принятая для расчёта.

Если имеет место обычное, а не полное внутреннее отражение, то, как мы видели, форма отражённого и преломлённого импульсов будет такой же, т. е.

$$F_{\text{отр}}(x, z, t) = \frac{V}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \left( \frac{x \sin \vartheta - z \cos \vartheta}{c} - t \right)^2}; \quad (111)$$

$$F_{\text{пр}}(x, z, t) = \frac{D}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \left( \frac{x \sin \vartheta_1 + z \cos \vartheta_1}{c_1} - t \right)^2}, \quad (112)$$

где  $V$  и  $D$  — коэффициенты отражения и прозрачности.

В случае полного внутреннего отражения  $V$  и  $D$  являются комплексными величинами:

$$V = \frac{m \cos \vartheta - is}{m \cos \vartheta + is}, \quad D = 1 + V, \quad s \equiv \sqrt{\sin^2 \vartheta - n^2}, \quad (113)$$

где в акустике  $m = \frac{\rho_1}{\rho}$  (см. (32)); в электродинамике  $m = \frac{\mu_1}{\mu}$  или  $\frac{\mu}{\mu_1} n^2$ , в зависимости от поляризации (см. (26)).

Положим

$$V = A + iB,$$

где

$$A = \frac{m^2 \cos^2 \vartheta - s^2}{m^2 \cos^2 \vartheta + s^2}, \quad B = -\frac{2Sm \cos \vartheta}{m^2 \cos^2 \vartheta + s^2}. \quad (114)$$

При этом отражённый импульс с учётом (101) и (109) запишется в виде

$$F_{\text{отр}}(\xi^-) = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|\omega| + i\omega\xi^-} d\omega - 2B \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon\omega} \sin \omega\xi^- d\omega. \quad (115)$$

Оба интеграла в последнем выражении берутся без труда, и мы получаем в результате, учтя значение  $\xi^-$ :

$$F_{\text{отр}} = \frac{A}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \left( \frac{x \sin \vartheta - z \cos \vartheta}{c} - t \right)^2} - \frac{B}{\pi} \frac{\frac{x \sin \vartheta - z \cos \vartheta}{c} - t}{\varepsilon^2 + \left( \frac{x \sin \vartheta - z \cos \vartheta}{c} - t \right)^2} \quad (116)$$

или, при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$F_{\text{отр}} = \frac{A}{2} \delta \left( \frac{x \sin \vartheta - z \cos \vartheta}{c} - t \right) - \frac{B}{\pi} \frac{1}{\frac{x \sin \vartheta - z \cos \vartheta}{c} - t}. \quad (117)$$

Таким образом, отражённый импульс состоит из двух частей, одна из которых соответствует импульсу той же формы, что и падающий, а другая — импульсу видоизменённой формы.

Рассмотрим теперь импульс, проникающий в нижнюю среду. В выражении (93) для него мы имеем:

$$\xi_1^- = \frac{x \sin \vartheta_1}{c_1} - t + \frac{is}{c} z. \quad (118)$$

В результате, учитывая также (109), получаем:

$$F_{\text{пр}} = \frac{D}{2} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon\omega - \frac{\omega s}{c} z} e^{i\omega \left( \frac{x \sin \vartheta_1}{c_1} - t \right)} d\omega + K. C.$$

Или, обозначая для краткости

$$\frac{x \sin \vartheta_1}{c_1} - t = g; \quad \varepsilon + \frac{s}{c} z = h \quad (119)$$

и подставляя значение интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-h\omega - ig\omega} d\omega = \frac{1}{h + ig}, \quad (120)$$

будем иметь:

$$F_{\text{пр}} = \frac{1}{2} \left( \frac{D}{h + ig} + \frac{D^*}{h - ig} \right). \quad (121)$$

Учтя равенство  $D = 1 + V$  и равенство (114), последнее выражение можно преобразовать к виду

$$F_{\text{пр}} = \frac{(1 + A)h + Bg}{h^2 + g^2}, \quad (122)$$

или, выразив  $h$  и  $g$  через координаты и время:

$$F_{\text{пр}} = \frac{(1 + A) \left( \varepsilon + \frac{s}{c} z \right) + B \left( \frac{x \sin \vartheta_1}{c_1} - t \right)}{\left( \varepsilon + \frac{s}{c} z \right)^2 + \left( \frac{x \sin \vartheta_1}{c_1} - t \right)^2}. \quad (123)$$

В случае  $\varepsilon = 0$ , когда падающий импульс описывается  $\delta$ -функцией, из (123) имеем:

$$F_{\text{пр}} = \frac{B \left( \frac{x \sin \vartheta_1}{c_1} - t \right) + A \frac{s}{c} z}{\left( \frac{s}{c} z \right)^2 + \left( \frac{x \sin \vartheta_1}{c_1} - t \right)^2}. \quad (124)$$

Мы видим, что преломлённый импульс в отношении своей формы по существу ничего общего не имеет с падающим импульсом. Далее, в формулы (123) и (124) время  $t$  входит только в комбинации  $\frac{x \sin \vartheta_1}{c_1} - t$ . Отсюда следует, что в нижней среде импульс распространяется вдоль границы со скоростью  $\frac{c_1}{\sin \vartheta_1}$ , равной, согласно закону преломления  $\frac{c}{\sin \vartheta}$  — скорости распространения импульса в верхней среде вдоль границы раздела.

Интересно отметить, что на прямой

$$B \left( \frac{x \sin \vartheta_1}{c_1} - t \right) + A \frac{s}{c} z = 0 \quad (125)$$

поле преломлённого импульса равно нулю (и имеет разный знак по разные стороны от этой линии). На рис. 14 схематически изображена картина падающего, отражённого и преломлённого импульсов в момент времени  $t = 0$ . На этом рисунке  $AA$  — граница раздела сред,  $OB$  — фронт падающего импульса, задаваемый уравнением  $(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta)/c - t = 0$ ;  $OD$  — фронт той части отражённого

импульса, которая соответствует первому члену в (117). Штриховка сплошными линиями с одной стороны от  $OD$  и пунктирными с другой — схематически отображает второй член в (117). Пунктирная штриховка соответствует отрицательному полю, штриховка сплошными линиями — положительному полю. Поле убывает при удалении от линии  $OD$ , что соответствует уменьшению густоты штриховки.

Поле преломлённого импульса везде, кроме начала координат  $O$ , имеет конечную величину. На линии  $OE$  оно обращается в нуль и по разные стороны от неё имеет разный знак. Стрелками отмечены направления распространения падающего, отражённого и преломлённого импульсов.

Отметим, что зависимость поля отражённого импульса от координаты  $z$  при  $x = \frac{c_1 t}{\sin \theta_1}$ , согласно (124), будет

$$F_{\text{пр}} = \frac{Ac}{sz}.$$

Таким образом, при удалении от границы поле спадает не по экспоненциальному закону, как в случае плоской волны, а по закону обратной пропорциональности величине удаления.

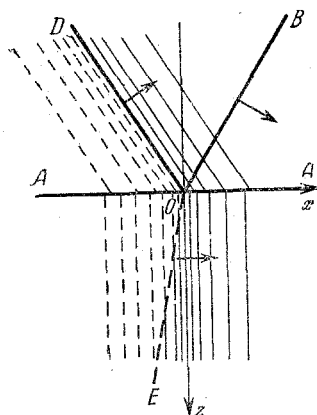


Рис. 14. Схематическое изображение картины отражения и преломления  $\delta$ -образного импульса.

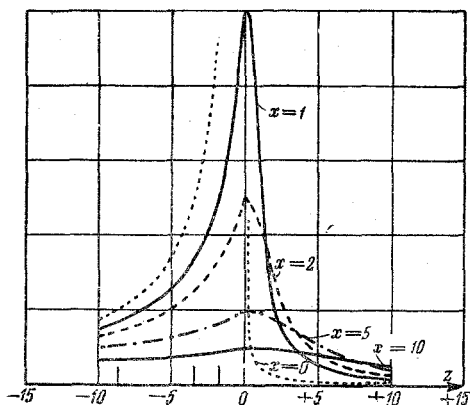


Рис. 15. Сечения поля, схематически изображенного на рис. 14, плоскостями  $x = \text{const}$  ( $\text{const} > 0$ ).

На рис. 15 и 16 изображены<sup>16</sup> сечения поля, схематически изображенного на рис. 14, плоскостями  $x = \text{const}$  при падении  $\delta$ -образного импульса на границу, характеризуемую параметрами:  $n = \frac{c}{c_1} = 0,26$ ;  $m = 0,07$ , что соответствует, например, в акустике границе воздуха ( $c = 343$  м/сек,  $\rho = 1,2 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>) и водорода ( $c_1 = 1305$  м/сек,

$\rho_1 = 8,4 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3$ ), взятых при температуре  $20^\circ \text{C}$  и нормальном давлении. Угол полного внутреннего отражения для этого случая составляет  $15^\circ, 25$ . В случае, изображённом на рис. 15 и 16, угол падения  $\vartheta = 60^\circ$ .

По оси ординат на графиках откладывается звуковое давление или напряжённость электрического поля в относительных единицах.

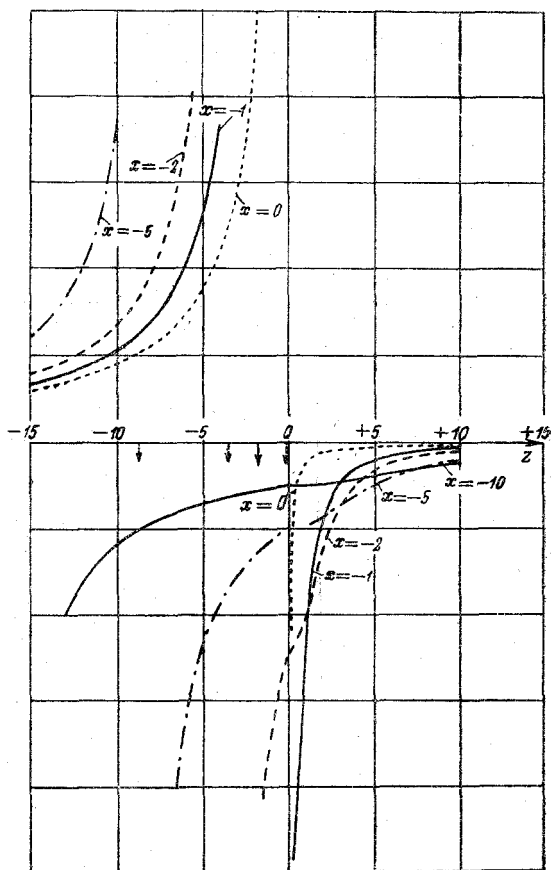


Рис. 16. Сечения поля, схематически изображённого на рис. 14, плоскостями  $x = \text{const}$  ( $\text{const} < 0$ ).

Так как функции  $F_{\text{отр}}$  и  $F_{\text{пр}}$ , описывающие отражённый и преломлённый импульсы, согласно (117) и (124) при  $t=0$  являются однородными функциями  $x$  и  $z$ , т. е. изменение масштаба  $x$  и  $z$  ничего не меняет, кроме масштаба по оси ординат, то величины  $x$  и  $z$  мы можем также выражать в относительных единицах, что и сделано

на рис. 15 и 16. Падающий импульс и та часть поля отражённого импульса, которая описывается  $\xi$ -функцией, на графиках не нанесены. Значения координаты  $z$ , при которых фронт этих импульсов пересекает соответственные плоскости  $x = \text{const}$ , отмечены стрелками на оси абсцисс.

В литературе можно найти исследования изменения формы импульса при полном внутреннем отражении и для случаев других форм падающего импульса. Так, в работе<sup>20</sup> исследовано отражение и преломление «столообразного» импульса, т. е. импульса, поле в котором имеет постоянную величину на некотором отрезке времени ( $t_1, t_2$ ) и равно нулю вне этого отрезка. При этом автор этой работы не прибегал к разложению импульса в ряд Фурье.

В работе<sup>19</sup> рассмотрено отражение экспоненциального импульса, заданного уравнением:

$$F(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < 0 \\ F_0 e^{-\lambda \xi} & \text{при } \xi \geq 0. \end{cases} \quad (126)$$

Эта функция неплохо описывает форму импульса в ударной волне при подводном взрыве. Свои теоретические результаты авторы сравнили с экспериментальными результатами, полученными путём регистрации взрывного импульса в слое воды, ограниченном сверху свободной поверхностью воды, а снизу дном (уплотнённый морской песок  $\rho_1 \cong 2,7$ ,  $c_1 \cong 1,800$  м/сек, угол полного внутреннего отражения на границе с водой  $58^\circ$ ).

На рис. 17 вверху изображена рассчитанная теоретически форма кривой звукового давления в зависимости от времени, внизу — экс-

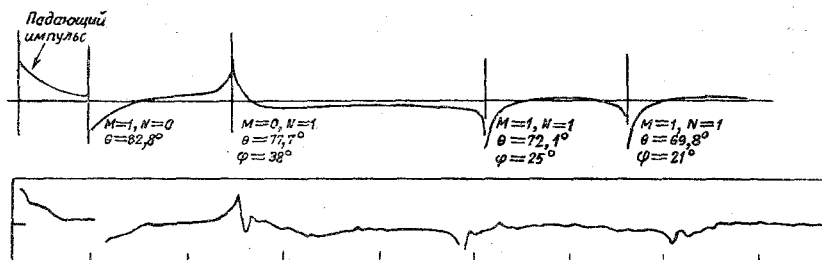


Рис. 17. Теоретическая кривая, характеризующая изменение формы экспоненциального импульса при последовательных отражениях его от поверхности воды и дна (вверху) и экспериментальная кривая, полученная от взрыва в воде (внизу). Условия эксперимента: вес заряда 0,225 кг, расстояние 143 м, глубина приёмника 7,4 м, глубина взрыва 12 м, глубина воды 25 м.

периментальная запись.  $M$  означает число отражений от поверхности воды,  $N$  — от дна,  $\theta$  — угол падения импульса на дно,  $\varphi$  — скачок фазы плоской гармонической волны при отражении для этого угла падения.

Мы видим, что вслед за падающим импульсом следует отражённый от поверхности воды импульс ( $M=1$ ,  $N=0$ ), который имеет ту же форму, что и падающий, но обратный знак. Вслед за ним в приёмник приходит отражённый от дна импульс ( $M=0$ ,  $N=1$ ), форма которого совершенно отлична от формы падающего импульса. Затем фиксируются импульсы, имеющие по одному отражению от поверхности воды и от дна (и отличающиеся порядком этих отражений). Экспериментальная запись в общем неплохо соответствует теоретической кривой. Совпадения этих кривых в деталях и нельзя было ожидать ввиду некоторой идеализации формы падающего импульса.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских, УФН 38, 1 (1949).
2. K. Artmann, Ann. der Phys. 2, 87 (1948).
3. А. А. Эйхенвальд, ЖРФХО (физ. часть) 41, 131 (1909).
4. А. А. Коробко-Стефанов, УФН 42, 433 (1950).
5. В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в ионосфере, § 14, Гостехиздат, 1949.
6. F. Goos und O. Hänchen, Ann. der Phys. 1, 333 (1947).
7. F. Goos und H. Lindberg-Hänchen, Ann. der Phys. 5, 251 (1949).
8. A. Schoch, Acustica 2, 17 (1952).
9. A. Schoch, Acustica 2, 1 (1952).
10. A. Schoch, Ergeb. exakt. Naturwiss. 23, 127 — 234 (1950).
11. C. U. Fragstein, Ann. der Phys. 4, 271 (1949).
12. Л. М. Бреховских и И. Д. Иванов, ДАН 83, № 4, 545 (1952).
13. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций § 2, 62, стр. 90, 1949.
14. В. А. Фок, Таблицы функций Эйри, М. 1946.
15. R. Gans, Ann. d. Phys. 47, 709 (1915).
16. F. A. Fischer, Ann. d. Phys. 2, 113 (1948).
17. А. А. Харкевич, Спектры и анализ, § 9, Гостехиздат, М. — Л., 1952.
18. Л. М. Бреховских, ЖТФ 19, 1126 (1949).
19. «Распространение звука в океане», сборник работ. ИЛ, 1951.
20. F. G. Friedlander, Quart. Journ. Mechan. and appl. Math. 1, часть 4, 376 (1948).