

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ АТОМНЫХ ЯДЕР*)

П. Гомбаш

§ 1. Введение

Статистические методы расчёта уже давно используются при объяснении свойств и закономерностей атомных ядер.

Первая попытка применения статистической теории к атомному ядру принадлежит Майорана¹, который получил лишь несколько качественных, но очень важных результатов. Глубокие основы дальнейшего развития статистической теории ядра были заложены, с одной стороны, Гейзенбергом², который вычислил в явном виде обменную энергию для различных потенциалов притяжения между нуклонами и, с другой стороны, Вейцекером³, который ввёл поправку к кинетической энергии ядра, так называемую «поправку на неоднородность». Дальнейшие вычисления⁴⁻⁸ исходили из основных положений, развитых в этих работах, причём в качестве энергии притяжения между двумя нуклонами большей частью выбирались выражения вида $-\gamma e^{-r_{ij}/r_0}$ и $-\gamma e^{-(r_{ij}/r_0)^2}$, где r_{ij} — расстояние между нуклонами, а γ и r_0 — некоторые константы**). За исключением работы⁷ все эти вычисления проводились при весьма грубых предположениях, например, использовалось очень упрощенное выражение для плотности распределения нуклеонов или даже предполагалось, что плотность при пренебрежении «поправкой на неоднородность» вообще постоянна. В связи с этим определённым шагом вперёд явилась уже упоминавшаяся работа⁷, поскольку в ней не делалось никаких упрощающих предположений относительно плотности распределения, а наоборот, изменение плотности и энергии ядер были установлены при помощи метода Ритца для лёгких ядер вплоть до Si²⁸. Общим для всех этих вычислений является то, что при их помощи энергию ядер удастся представить

*) P. Gombás, Acta Physica Hungarica, 1, № 4 (1952).

**) Относительно дальнейших литературных ссылок см., например,^{9,10}, а также¹¹.

лишь в виде такой формулы, которая после определённого выбора некоторого свободного параметра даёт заметные отклонения от экспериментальных данных либо в области лёгких, либо в области тяжёлых ядер. Так, например, в работе¹, где выбор свободного параметра происходит в области самых лёгких ядер, уже для Si^{38} — наиболее тяжёлого из рассмотренных ядер — отклонение энергии от экспериментальных данных составляет около 12%. Исключением, конечно, являются те работы, цель которых состоит в нахождении наиболее хорошо согласующейся с экспериментом формулы, содержащей иногда три, четыре или даже больше эмпирических параметра. При помощи такой формулы можно, разумеется, достичь превосходного согласия с экспериментальными данными, начиная от самых лёгких и кончая самыми тяжёлыми ядрами²). Однако этим, в основном, достигается лишь формальное описание эмпирических результатов, но не объяснение их при помощи общих законов. Рассматриваемые с такой точки зрения эти работы представляются имеющими незначительный интерес, хотя, конечно, нельзя отрицать их эвристического значения.

Целью настоящей работы является вычисление энергии связи ядер, а также расположения стабильных изобаров на основе статистической теории и при предположении скалярного юкавского потенциала притяжения между нуклеонами. Вычисления основываются на общем принципе требования минимума энергии и ведутся при помощи метода Ритца без введения каких-либо произвольных предположений. При этом полагаются равными те части энергии взаимодействия между нейтронами и протонами, нейтронами и нейтронами, протонами и протонами, которые зависят только от взаимного расстояния между частицами. В выражении для энергии взаимодействия двух нуклеонов лишь одна константа рассматривается в качестве свободного параметра, который одновременно является единственным свободным параметром во всей теории. Ниже будет показано, что при помощи соответствующего выбора этого параметра для энергии связи ядер получаются результаты, которые находятся в очень хорошем согласии с экспериментом как для самых лёгких, так и для самых тяжёлых ядер. Отклонения от экспериментальных значений, исключая совсем лёгкие ядра, лежат в пределах 7%. Для совсем лёгких ядер, энергия связи которых не является монотонной функцией числа частиц, статистическая теория, естественно, может дать и даёт на самом деле лишь некоторое среднее значение по сравнению с сильно колеблющимися эмпирическими результатами. Положение стабильных изобаров также определяется весьма удовлетворительным образом.

Развитая в настоящей работе статистическая теория по самому своему существу применима прежде всего в области ядер с большим

²) См., например, ¹⁰.

числом частиц. То, что она даёт хорошие результаты также и для лёгких ядер, является следствием введения нами двух поправок, а именно, мы ввели поправку к обменной энергии взаимодействия нуклеонов, при помощи которой была исключена энергия, связанная с самообменом частиц, и, далее, мы ввели поправку также и к кинетической энергии, при помощи чего статистическое выражение кинетической энергии ядра He^4 и более лёгких ядер переходит в точное волномеханическое выражение. Благодаря этим поправкам достигается то, что статистическое выражение для полной энергии лёгких ядер хорошо аппроксимирует волномеханическое выражение и даёт хорошее среднее значение эмпирических результатов.

Статистическая теория атомного ядра в существенных своих чертах основывается на поведении нуклеонного газа при абсолютном нуле температуры и на взаимодействии между нуклеонами. Поэтому ниже мы займёмся прежде всего общими положениями статистического метода рассмотрения свободного нуклеонного газа и, в связи с этим, рассмотрим кинетическую энергию свободного нуклеонного газа. Затем последуют общие положения теории взаимодействия нуклеонов и статистическое вычисление энергии взаимодействия. Исходя из этих основ при помощи вариационных методов будет развита затем статистическая модель ядра и проведено вычисление энергии и плотности распределения нуклеонов, начиная с самых лёгких и кончая самыми тяжёлыми ядрами. Будет также вычислена энергия некоторых изобаров.

§ 2. Основы статистического метода рассмотрения свободного нуклеонного газа

В статистической модели атомного ядра нуклеоны рассматриваются в виде нуклеонного газа, находящегося при абсолютном нуле температуры, и описываются при помощи статистических методов. Статистическая теория нейтронного или протонного газов основывается на статистике Ферми-Дирака, которая в свою очередь основывается на принципе Паули и на факте неразличимости частиц. Принцип Паули, как известно, означает, что в полностью проквантованной системе каждое квантовое состояние может быть занято не более чем одной частицей. Квантовое состояние при этом определяется при помощи задания состояния пространственного движения и знака спина. Связь между квантовой теорией и статистикой даётся известным положением о том, что на объём h^3 фазового пространства приходится, учитывая спин, два нейтронных квантовых состояния с антипараллельными спинами и два протонных квантовых состояния также с антипараллельными спинами; здесь h означает константу Планка. Ячейка фазового пространства объёма h^3 таким образом может быть занята самое большое двумя нейтронами и двумя протонами.

В дальнейшем мы займёмся свободным нуклеонным газом, состоящим из Q_n нейтронов и Q_p протонов, которые находятся в объёме Ω . Относительно стенок этого объёма мы предположим, что они непроницаемы для нуклеонов. Нуклеонный газ, как уже говорилось, мы будем считать свободным, т. е. предположим, что внутри Ω имеется постоянный потенциал, который можно положить равным нулю. Мы здесь ограничимся случаем очень низких температур, т. е. тем случаем, когда частицы занимают наиболее низкие уровни энергии. При очень низких температурах возникают значительные упрощения, поскольку в этом случае статистика Ферми-Дирака практически сводится к условию, что в элементарной ячейке с объёмом h^3 может находиться самое большее два нейтрона и два протона.

Самые низкие уровни энергии мы можем описывать следующим образом. Согласно нашему предположению, пространство, в котором находятся нуклоны, не содержит потенциалов, вследствие чего энергия какого-либо нуклона является чисто кинетической энергией и для неё имеет место соотношение

$$u = p^2/2M, \quad (1)$$

где p означает величину импульса, а M — массу нуклона; M можно здесь предположить одинаковой для протона и нейтрона и равной среднему значению масс протона и нейтрона. Величина u является функцией от p и не зависит от координат. Вследствие этого можно ограничиться рассмотрением в импульсном пространстве.

Рассмотрим прежде всего случай нейтронов: для протонов всё будет совершенно аналогично. Ввиду того, что пространство свободно от сил, все направления движения нейтронов являются равноправными. Так как, кроме того, энергия нейтронов зависит лишь от величины импульса p , но не зависит от направления импульса, то наиболее низкие энергетические квантовые состояния находятся в импульсном пространстве внутри шара, центр которого совпадает с началом пространства импульсов и радиус которого $p_{\mu n}$ равен величине максимального импульса нейтронов. Каждое из этих наиболее низких энергетических квантовых состояний при абсолютном нуле температур занято самое большее одним нейтроном, все же квантовые состояния вне указанного шара свободны.

Величину $p_{\mu n}$ можно определить следующим образом. Объём шара в пространстве импульсов равен $\frac{4}{3} \pi p_{\mu n}^3$. Нейтронам, находящимся в объёме Ω , соответствует объём фазового пространства, равный $\Omega \frac{4}{3} \pi p_{\mu n}^3$. Число квантовых состояний получается путём деления

этой величины на $\frac{1}{2} h^3$. Так как каждое из рассматриваемых квантовых состояний содержит по одному нейтрону, то имеем:

$$2 \frac{4\pi p_{\mu n}^3}{3h^3} \Omega = Q_n. \quad (2)$$

Отсюда получается для $p_{\mu n}$

$$p_{\mu n} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} h \varrho_n^{1/3}, \quad (3)$$

где

$$\varrho_n = Q_n / \Omega \quad (4)$$

означает плотность нейтронного газа.

Для протонов всё протекает совершенно аналогичным образом. Если обозначить величину максимального импульса протонов через $p_{\mu p}$, то будет иметь место зависимость

$$p_{\mu p} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} h \varrho_p^{1/3}, \quad (5)$$

где

$$\varrho_p = Q_p / \Omega \quad (6)$$

обозначает плотность протонного газа.

§ 3. Кинетическая энергия нуклеонного газа

Мы переходим теперь к вычислению кинетической энергии нуклеонного газа и прежде всего займёмся уже описанным в предыдущем параграфе свободным нуклеонным газом, который находится в объёме Ω и состоит из Q_n нейтронов и Q_p протонов. Сперва мы рассмотрим один нейтронный газ. Поскольку нейтроны можно считать совершенно свободными, кинетическая энергия нейтронного газа U_K^n есть не что иное, как так называемая кинетическая энергия Ферми, которая может быть представлена в виде^{1,2}

$$U_K^n = \int u \, dn, \quad (7)$$

где u является функцией от p , а dn обозначает число нейтронных квантовых состояний, которым соответствует величина импульса между p и $p + dp$; интегрирование распространяется на все занятые нейтронами квантовые состояния. Учитывая (1) и зависимость

$$dn = \frac{8\pi\Omega}{h^3} p^2 dp, \quad (8)$$

для фермиевской кинетической энергии нейтронов получаем:

$$U_K^n = \frac{4\pi\Omega}{Mh^3} \int_0^{p_{\mu n}} p^4 dp = \frac{4\pi\Omega}{5Mh^3} p_{\mu n}^5. \quad (9)$$

Подставляя сюда выражение (3) для $p_{\mu n}$, находим:

$$U_K^n = \kappa_K \varrho_n^{5/3} \Omega, \quad (10)$$

где κ_K обозначает константу

$$\kappa_K = \frac{3}{40} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{\hbar^2}{M}. \quad (11)$$

Для протонного газа всё протекает совершенно аналогично, соответственно чему получаем для фермиевской кинетической энергии протонов выражение

$$U_K^p = \kappa_K \rho_p^{5/3} \Omega. \quad (12)$$

Фермиевская кинетическая энергия всего нуклеонного газа таким образом равна

$$U = U_K^n + U_K^p = \kappa_K (\rho_n^{5/3} + \rho_p^{5/3}) \Omega. \quad (13)$$

Всё вышеизложенное относилось к совершенно свободному нуклеонному газу, т. е. к нуклеонному газу с постоянной плотностью распределения. Сразу возникает вопрос, какой вид принимает фермиевская кинетическая энергия для несвободного нуклеонного газа? Для вывода этого выражения разделим объём, занимаемый нуклеонным газом, при помощи системы перегородок на частичные объёмы таким образом, чтобы в каждом частичном элементе объёма dv находилось ещё много нейтронов и протонов и чтобы в этом элементе объёма потенциал был практически постоянным. Тогда можно рассматривать нуклеоны, находящиеся в отдельных элементах объёма, как свободный нуклеонный газ. Если обозначить плотность нейтронов или протонов в dv через ρ_n или ρ_p , то для фермиевской кинетической энергии нейтронного (или протонного) газа, находящегося в dv , получится, согласно (10) и (12), выражение $\kappa_K \rho_n^{5/3} dv$ (или $\kappa_K \rho_p^{5/3} dv$). Фермиевская кинетическая энергия всех нейтронов (или всех протонов) получается при помощи интегрирования этого выражения по всему объёму. Таким образом имеем:

$$U_K^n = \kappa_K \int \rho_n^{5/3} dv, \quad U_K^p = \kappa_K \int \rho_p^{5/3} dv. \quad (14)$$

Для фермиевской кинетической энергии всего нуклеонного газа следует выражение

$$U_K = U_K^n + U_K^p = \kappa_K \int (\rho_n^{5/3} + \rho_p^{5/3}) dv. \quad (15)$$

Для совершенно свободного нуклеонного газа, т. е. в случае постоянной плотности распределения, эти выражения, конечно, переходят в соответствующие выражения (10), (12) и (13).

Выражение (15) даёт полную кинетическую энергию нуклеонного газа только тогда, когда нуклеоны в элементе объёма dv являются совершенно свободными. Если же нуклеоны в элементе объёма dv не могут считаться вполне свободными, тогда необходимо дополнить это выражение так называемой «поправкой на неоднородность»

Вайцекера. Эта поправка была детально обоснована Вайцекером^{*}), и мы не будем здесь входить в подробности. Вместо этого мы выберём весьма упрощённый путь вывода этой поправки, который как раз из-за своей простоты позволяет очень хорошо выяснить существо дела.

Рассмотрим опять сначала нейтроны. Без учёта принципа Паули, т. е. в случае статистики Бозе, все нейтроны при равновесии заполнили бы самый низкий энергетический квантовый уровень. Если обозначить собственную функцию этого состояния через ψ , то при этом для плотности ρ_n и шредингеровской кинетической энергии U_n^j нейтронов будем иметь:

$$\rho_n = Q_n |\psi|^2, \quad (16)$$

$$U_n^j = Q_n \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} \int |\text{grad } \psi|^2 dv. \quad (17)$$

Исключая ψ , получим:

$$U_n^j = \kappa_j \int \frac{(\text{grad } \rho_n)^2}{\rho_n} dv, \quad (18)$$

где κ_j обозначает константу

$$\kappa_j = \frac{\hbar^2}{32\pi^2 M}. \quad (19)$$

Для M здесь также можно взять среднее значение масс протона и нейтрона.

U_n^j и есть вайцекеровская поправка на неоднородность для нейтронов.

Совершенно аналогичным образом получим поправку на неоднородность для протонов

$$U_p^j = \kappa_j \int \frac{(\text{grad } \rho_p)^2}{\rho_p} dv. \quad (20)$$

Поправка на неоднородность для всего нуклеонного газа таким образом равна

$$U_j = U_n^j + U_p^j. \quad (21)$$

Очевидно, что U_j исчезает для постоянной плотности распределения нуклеонов.

Как следует из вывода, U_j является кинетической энергией нуклеонного газа, для частиц которого не имеет места принцип Паули. Учёт принципа Паули, согласно которому не все частицы могут находиться в энергетически наиболее низком квантовом состоянии, происходит таким образом, что рядом с величиной U_j во всех вычислениях необходимо взять также и фермиевскую кинетическую энергию U_K , которая является следствием принципа Паули. При помощи энергии U_K частицы будут занимать, в согласии с принципом Паули,

^{*}) См., например, ³, а также ¹², где приведён список относящейся сюда литературы.

более высокие энергетические квантовые состояния. При этом делается предположение, что $\text{grad } p_n$ и $\text{grad } p_p$ не зависят от вектора импульса, т. е. не зависят от квантового состояния. Все это демонстрирует весьма наглядно роль обеих составных частей кинетической энергии.

При одновременном учёте обеих частей U_J и U_K кинетической энергии всё же совершается некоторая ошибка, которую проще всего можно обнаружить для случая двух нейтронов и двух протонов. В этом случае как оба нейтрона, так и оба протона находятся в наиболее низком энергетическом квантовом состоянии, так что энергия U_J представляет собой полную кинетическую энергию частиц, в то время как энергия U_K должна исчезать. Это следует также и из того, что в этом случае принцип Паули не играет никакой роли, так как ни одна из частиц не обязана подниматься в более высокое энергетическое состояние, а потому обусловленная принципом Паули часть энергии U_K должна исчезать. В действительности U_K всё же не исчезает. Это обстоятельство является следствием выбранного нами статистического метода исследования, согласно которому в фазовом пространстве или, соответственно, в импульсном пространстве, уже одной единственной частице соответствует конечный объём, вследствие чего кинетическая энергия двух частиц в наиболее низком квантовом состоянии содержится не только в U_K , но также и в U_J . Отсюда сразу видно, что эта ошибка имеет место не только для случая двух нейтронов и двух протонов, но также и для любых других чисел частиц. Конечно, она значительна лишь для малых чисел частиц, в то время как для больших чисел частиц ошибка мала по сравнению с полной кинетической энергией.

Возникает вопрос, каким образом наиболее просто можно исправить эту ошибку¹²? Один из путей к этому состоит в том, чтобы фермиевскую кинетическую энергию частицы, находящейся в самом низком энергетическом квантовом состоянии, приравнять средней фермиевской кинетической энергии, приходящейся на одну частицу, и вычесть эту величину для обоих нейтронов и протонов, находящихся в самом низком энергетическом состоянии. Средняя фермиевская кинетическая энергия, приходящаяся на один нейтрон или на один протон, есть U_K^n/Q_n или же U_K^p/Q_p . Поправка, согласно нашему предположению, состоит тогда в том, что из энергии U_K вычитается величина $2U_K^n/Q_n + 2U_K^p/Q_p$, или, что то же, в (15) величина U_K^n умножается на фактор $k_n = 1 - \frac{2}{Q_n}$, а U_K^p на фактор $k_p = 1 - \frac{2}{Q_p}$. Полная кинетическая энергия нашего нуклеонного газа, таким образом, примет вид

$$U_K = k_n U_K^n + k_p U_K^p + U_J. \quad (22)$$

Факторы k_n и k_p для $Q_n=2$ и $Q_p=2$ обращаются в нуль, вследствие чего в этом случае U_K исчезает и поправка здесь приводит, таким образом, к точному значению кинетической энергии. Далее, величина $k_n U_K^n$ должна исчезать также и при $Q_n=1$, а величина $k_p U_K^p$ при $Q_p=1$, что, однако, не обеспечивается поправочными факторами. Вследствие этого мы должны сделать дополнительное предписание о том, что поправочный фактор k_n также и при $Q_n < 2$, а поправочный фактор k_p также и при $Q_p < 2$ должны быть положены равными нулю. Кинетическая энергия тогда и в этих случаях даётся выражением U_p , которое в этих случаях в действительности представляет собой точное выражение кинетической энергии. Для больших чисел частиц эта поправка становится неточной, что, однако, является несущественным, так как для больших чисел частиц она оказывается незначительной по сравнению с полной кинетической энергией.

§ 4. Общие основы вычисления взаимодействия нуклонов

Прежде всего мы займёмся вычислением в самом общем виде взаимодействия нуклеонов на основе волновой механики, что пригодится нам для статистического вычисления энергии взаимодействия нуклеонов. Мы опять предположим, что наш нуклеонный газ состоит из Q_n нейтронов и Q_p протонов. Для волномеханического описания полной системы мы будем исходить из приближения Хартри-Фока, т. е. будем описывать систему при помощи одночастичных собственных функций, а именно, мы предположим, что Q_n функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{Q_n}$ являются собственными функциями Q_n нейтронных состояний, а Q_p функций $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{Q_p}$ являются собственными функциями Q_p протонных состояний. С учётом принципа Паули можно тогда представить собственную функцию полной системы в следующем виде¹⁸:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{Q_n! Q_p!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(q_n^1) & \varphi_1(q_n^2) & \dots & \varphi_1(q_n^{Q_n}) \\ \varphi_2(q_n^1) & \varphi_2(q_n^2) & \dots & \varphi_2(q_n^{Q_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{Q_n}(q_n^1) & \varphi_{Q_n}(q_n^2) & \dots & \varphi_{Q_n}(q_n^{Q_n}) \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \psi_1(q_p^1) & \psi_1(q_p^2) & \dots & \psi_1(q_p^{Q_p}) \\ \psi_2(q_p^1) & \psi_2(q_p^2) & \dots & \psi_2(q_p^{Q_p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{Q_p}(q_p^1) & \psi_{Q_p}(q_p^2) & \dots & \psi_{Q_p}(q_p^{Q_p}) \end{vmatrix}, \quad (23)$$

где q_n^i представляет собой пространственные $\mathbf{r}_n^i(x_n^i, y_n^i, z_n^i)$ и спиновые σ_n^i координаты i -го нейтрона, в то время как q_p^i обозначает пространственные $\mathbf{r}_p^i(x_p^i, y_p^i, z_p^i)$ и спиновые σ_p^i координаты i -го протона; $\mathbf{r}_n^i$ и $\mathbf{r}_p^i$ обозначают координатные векторы i -го нейтрона или i -го протона. Относительно одночастичных собственных функций φ_i и ψ_i мы, без ограничения общности, можем предположить, что как нейтронные собственные функции φ_i между собой, так и протонные собственные функции ψ_i между собой являются ортогональными. Кроме того, мы предположим, что они также и нормированы, тогда и Ψ будет нормированной.

В нижеследующем выводе общего выражения энергии взаимодействия нуклонов мы сперва отвлечёмся от кулоновского взаимодействия протонов и ограничимся рассмотрением одного лишь ядерного взаимодействия нуклонов. Для вывода общего выражения энергии взаимодействия нуклонов необходимо сделать некоторое предположение относительно нуклонного взаимодействия. Это взаимодействие должно быть выбрано с учётом экспериментальных данных, которые свидетельствуют, во-первых, о свойстве насыщения ядерных сил и, во-вторых, об их очень малом радиусе действия. Первый факт можно учесть посредством соответствующего выбора механизма взаимодействия, а именно, путём допущения некоторого обменного взаимодействия между нуклеонами (ср. § 6). Второй факт можно учесть посредством соответствующего выбора потенциала взаимодействия нуклонов. Относительно энергии взаимодействия нуклонов прежде всего мы сделаем совершенно общее предположение о том, что она складывается из парных взаимодействий частиц следующим образом:

$$W = \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k=1}^{Q_p} G_{ik}(q_n^i, q_p^k) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k \neq 1}^{Q_n} N_{ik}(q_n^i, q_n^k) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k \neq 1}^{Q_p} P_{ik}(q_p^i, q_p^k), \quad (24)$$

где G_{ik} обозначает энергию взаимодействия i -го нейтрона и k -го протона, N_{ik} — энергию взаимодействия i -го и k -го нейтронов, P_{ik} — энергию взаимодействия i -го и k -го протонов. Множители $1/2$ перед второй и третьей суммами в правой части (24) стоят для того, чтобы избежать двойного счёта нейтронных и протонных пар.

При помощи выражения (24) и собственной функции (23) волномеханическое вычисление математического ожидания энергии взаимодействия W_A нуклонов происходит совершенно аналогично случаю энергии взаимодействия электронов в многоэлектронных атомах¹³.

Получаем:

$$\begin{aligned}
 W_A = & \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k \neq i}^{Q_p} \iint \varphi_i^*(q_n) \psi_k^*(q_p) G_{ik}(q_n, q_p) \varphi_i(q_n) \psi_k(q_p) d\tau_n d\tau_p + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k \neq i}^{Q_n} \iint \varphi_i^*(q_n) \varphi_k^*(q'_n) N_{ik}(q_n, q'_n) \varphi_i(q_n) \varphi_k(q'_n) d\tau_n d\tau'_n - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k \neq i}^{Q_n} \iint \varphi_k^*(q_n) \varphi_i^*(q'_n) N_{ik}(q_n, q'_n) \varphi_i(q_n) \varphi_k(q'_n) d\tau_n d\tau'_n + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k \neq i}^{Q_p} \iint \psi_i^*(q_p) \psi_i^*(q'_p) P_{ik}(q_p, q'_p) \psi_i(q_p) \psi_k(q'_p) d\tau_p d\tau'_p - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k \neq i}^{Q_p} \iint \psi_k^*(q_p) \psi_i^*(q'_p) P_{ik}(q_p, q'_p) \psi_i(q_p) \psi_k(q'_p) d\tau_p d\tau'_p, \quad (25)
 \end{aligned}$$

где при интегрировании по τ_n , τ_p и т. д., кроме интегрирования по пространственным координатам нейтронов и протонов, подразумевается также и суммирование по спиновым координатам. Первая из пяти двойных сумм даёт энергию взаимодействия нейтронов и протонов между собой, вторая и третья дают энергию взаимодействия нейтронов и, наконец, четвёртая и пятая дают энергию взаимодействия протонов. Следует отметить, что третья и пятая двойные суммы представляют собой так называемую обменную энергию соответственно нейтронов и протонов. Она имеет место лишь между одинаковыми частицами и соответствующие члены возникают из-за детерминантного представления собственной функции этих частиц.

Как можно показать (см. § 6), свойство насыщения действующих между нуклонами сил можно учесть тем, что в качестве взаимодействия между нуклонами предположить чистое обменное взаимодействие. Соответственно этому мы придадим членам G_{ik} вид некоторого обменного взаимодействия, а именно, выберем для них взаимодействие майорановского типа*), т. е. мы предположим, что при перемене положения протона и нейтрона спин оказывается связанным с зарядом. При помощи оператора G_{ik} могут обмениваться тогда лишь пространственные координаты i -го нейтрона и k -го протона. Таким образом имеем:

$$G_{ik}(q_n, q_p) = J_{np}(r_{np}) \Pi(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_p), \quad (26)$$

где $\Pi(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_p)$ обозначает перестановочный оператор, который

*) Подробнее относительно различных типов ядерных сил см., например, ¹⁰ или ¹¹.

переставляет лишь положения нейтрона и протона, но оставляет неизменными спиновые координаты; $J_{np}(r_{np})$ есть обычная функция, зависящая только от взаимного расстояния $r_{np} = |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p|$ нейтрона и протона; подробнее о ней мы будем говорить ниже. При помощи этого выражения для G_{ik} имеем:

$$G_{ik}(q_n, q_p) \varphi_i(\mathbf{r}_n, \sigma_n) \psi_k(\mathbf{r}_p, \sigma_p) = \varphi_i(\mathbf{r}_p, \sigma_n) \psi_k(\mathbf{r}_n, \sigma_p) J_{np}(r_{np}). \quad (27)$$

Если считать состояние пространственного движения не зависящим в первом приближении от спинового состояния, то можно представить собственные функции φ_i и ψ_i в виде произведения двух функций: одной — зависящей лишь от пространственных координат, и другой — зависящей лишь от спиновой координаты:

$$\varphi_i = u_i(\mathbf{r}) \eta(\sigma), \quad \psi_i = w_i(\mathbf{r}) \eta(\sigma). \quad (28)$$

Здесь $u_i(\mathbf{r})$ и $w_i(\mathbf{r})$ — зависящие лишь от пространственных координат части нейтронной и соответственно протонной собственных функций; $\eta(\sigma)$ обозначает спиновую функцию, которую мы для обоих значений спиновой координаты $\sigma = +1/2$ и $\sigma = -1/2$ обозначим при помощи η_+ и η_- , соответственно. При помощи (27) и (28) можно легко провести суммирование по спиновым координатам в первом интеграле выражения (25) и получить для энергии взаимодействия i -го нейтрона и k -го протона результат

$$\varepsilon_{ik}^{np} = \iint u_i^*(\mathbf{r}_n) w_k^*(\mathbf{r}_p) u_i(\mathbf{r}_p) w_k(\mathbf{r}_n) J_{np}(r_{np}) dv_n dv_p, \quad (29)$$

где dv_n и dv_p обозначают элементы объёма соответствующих координатных пространств. Как легко убедиться, ε_{ik}^{np} имеет вид обменной энергии, возникающей из-за обмена нейтрона и протона.

Мы перейдём теперь к обсуждению взаимодействия нейтрон — нейтрон и протон — протон, т. е. к последним четырём двойным суммам в выражении (25). Это взаимодействие между одинаковыми частицами можно предположить либо зависящим, либо не зависящим от спинов, причём напомним ещё раз, что мы здесь пока отвлекаемся от рассмотрения, не зависящего от спинов кулоновского взаимодействия. В случае не зависящего от спинов взаимодействия наряду с обменной энергией взаимодействия появилась бы обычная энергия взаимодействия частиц, что привело бы к совершенно неправильной зависимости энергии связи атомных ядер от числа частиц. Поэтому необходимо допустить, что взаимодействие одинаковых частиц зависит от спинов. Оказывается целесообразным сделать следующее предположение:

$$N_{ik}(q_n, q'_n) = -\frac{1}{3} J_{nn}(r_{nn'}) (S, S'). \quad (30)$$

$$P_{ik}(q_p, q'_p) = -\frac{1}{3} J_{pp}(r_{pp'}) (S, S'). \quad (31)$$

Здесь q_n и q'_n обозначают координаты i -го и k -го нейтронов, причём в q_n , q'_n включены также и спиновые координаты частиц; $r_{nn'}$ обозначает взаимное расстояние двух нейтронов, т. е. $r_{nn'} = |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'}|$; наконец, S и S' обозначают спиновые операторы Паули, относящиеся к обеим частицам. Стоящие в (31) величины с индексами p, p' относятся к i -му и k -му протону и имеют для них совершенно аналогичные значения. Фактор $-1/3$ введён для того, чтобы взаимодействие между двумя нейтронами с противоположно направленными спинами, так же как и между двумя протонами с противоположно направленными спинами, равнялось J_{nn} или соответственно J_{pp} . Легко видеть, что это действительно выполняется, так как в этом случае $S + S'$ равно нулю, вследствие чего имеет место зависимость *)

$$2(S, S') = (S + S')^2 - S^2 - S'^2 = -6. \quad (32)$$

Для вычисления энергии взаимодействия одинаковых частиц мы снова представим собственную функцию частицы в виде произведения функции, зависящей лишь от пространственных координат, и спиновой функции (ср. (28)). Для последующих целей отметим, что спиновые функции удовлетворяют соотношениям:

$$S_x \eta_{\pm} = \eta_{\mp}, \quad S_x \eta_{\mp} = \eta_{\pm}, \quad (33)$$

$$S_y \eta_{\pm} = i\eta_{\mp}, \quad S_y \eta_{\mp} = -i\eta_{\pm}, \quad (34)$$

$$S_z \eta_{\pm} = \eta_{\pm}, \quad S_z \eta_{\mp} = -\eta_{\mp}. \quad (35)$$

Отсюда следует, например,

$$(S, S') \eta_{\pm}(\sigma) \eta_{\pm}(\sigma') = \eta_{\pm}(\sigma) \eta_{\pm}(\sigma') \quad (36)$$

и

$$(S, S') \eta_{\pm}(\sigma) \eta_{\mp}(\sigma') = -\eta_{\pm}(\sigma) \eta_{\mp}(\sigma') + 2\eta_{\mp}(\sigma) \eta_{\pm}(\sigma'). \quad (37)$$

При помощи этих соотношений можно очень легко вычислить энергию взаимодействия одинаковых частиц. Мы проведём здесь вычисления лишь для случая нейтронов; для протонов всё будет совершенно аналогично. Прежде всего вычислим энергию взаимодействия нейтрона с положительным спином, находящегося в состоянии $\varphi_i = u_i \eta_{+}$, с двумя нейтронами, находящимися в состояниях $\varphi_{k_1} = u_{k_1} \eta_{+}$ и $\varphi_{k_2} = u_{k_2} \eta_{-}$, отличающихся друг от друга лишь направлениями спина.

Обычная энергия взаимодействия обеих нейтронных пар согласно второй строчке формулы (25) представляется в виде суммы следу-

*) S есть удвоенный спиновый момент нуклеона, измеренный в единицах $\hbar/2\pi$. Учитывая, что собственное значение квадрата спинного момента в единицах $\hbar/2\pi$ равно $l(l+1) = 3$, получаем $S^2 = 3$.

ющих двойных интегралов:

$$-\frac{1}{3} \iint |u_l(\mathbf{r})|^2 |u_k(\mathbf{r}')|^2 \eta_+(\sigma) \eta_+(\sigma') \times \\ \times (S, S') \eta_+(\sigma) \eta_+(\sigma') J_{nn}(r_{nn'}) d\tau_n d\tau'_n, \quad (38)$$

$$-\frac{1}{3} \iint |u_l(\mathbf{r})|^2 |u_k(\mathbf{r}')|^2 \eta_+(\sigma) \eta_-(\sigma') \times \\ \times (S, S') \eta_+(\sigma) \eta_-(\sigma') J_{nn}(r_{nn'}) d\tau_n d\tau'_n, \quad (39)$$

где необходимо помнить, что указанное интегрирование обозначает также и суммирование по спиновым координатам. Учитывая (36) и (37), а также то обстоятельство, что спиновые функции η_+ и η_- ортогональны друг другу, мы найдём, что суммирование по спиновым координатам даёт $+1$ в первом интеграле и -1 во втором интеграле. Так как в остальном оба интеграла тождественны, то двойные интегралы во второй двойной сумме выражения (25) взаимно сокращаются. Вместе с тем исчезает и вся вторая двойная сумма в (25), т. е. обычная энергия взаимодействия нейтронов.

Обменная энергия обеих нейтронных пар получается согласно третьей строке (25) в виде суммы следующих двойных интегралов:

$$+\frac{1}{3} \iint u_k^*(\mathbf{r}) u_i^*(\mathbf{r}') u_l(\mathbf{r}) u_k(\mathbf{r}') \eta_+(\sigma) \eta_+(\sigma') \times \\ \times (S, S') \eta_+(\sigma) \eta_+(\sigma') J_{nn}(r_{nn'}) d\tau_n d\tau'_n, \quad (40)$$

$$+\frac{1}{3} \iint u_k^*(\mathbf{r}) u_i^*(\mathbf{r}') u_l(\mathbf{r}) u_k(\mathbf{r}') \eta_-(\sigma) \eta_+(\sigma') \times \\ \times (S, S') \eta_+(\sigma) \eta_-(\sigma') J_{nn}(r_{nn'}) d\tau_n d\tau'_n. \quad (41)$$

Таким же образом, как и в предыдущем случае, получается после суммирования по спиновым координатам в первом интеграле $+1$ и во втором $+2$. Так как в остальном интегралы также и здесь тождественны, то для суммы обменных энергий обеих нейтронных пар, т. е. для суммы (40) и (41) получим:

$$\iint u_k^*(\mathbf{r}) u_i^*(\mathbf{r}') u_l(\mathbf{r}) u_k(\mathbf{r}') J_{nn}(r_{nn'}) dv dv'. \quad (42)$$

Это выражение представляет собой обменную энергию нейтрона, находящегося в состоянии $\psi_i = u_l \eta_{l+}$, с двумя нейтронами, находящимися в состояниях $\psi_{k_1} = u_k \eta_{k+}$ и $\psi_{k_2} = u_k \eta_{k-}$, т. е. с двумя нейтронами, которые находятся в одном и том же состоянии пространственного движения, но обладают антипараллельными спинами. Средняя обменная энергия между нейтронами i и k таким образом равна

$$\varepsilon_{ik}^{nn} = \frac{1}{2} \iint u_k^*(\mathbf{r}) u_i^*(\mathbf{r}') u_l(\mathbf{r}) u_k(\mathbf{r}') J_{nn}(r_{nn'}) dv dv'. \quad (43)$$

При помощи предположения (31) все вычисления для протонов проводятся совершенно аналогично. Обычная энергия взаимодействия исчезает также и в случае протонов и для средней обменной энергии двух протонов i и k получается выражение

$$\varepsilon_{ik}^{pp} = \frac{1}{2} \iint \omega_k^*(\mathbf{r}) \omega_i^*(\mathbf{r}') \omega_i(\mathbf{r}) \omega_k(\mathbf{r}') J_{pp}(r_{pp'}) d\mathbf{v} d\mathbf{v}'. \quad (44)$$

Для полной энергии W_A^{np} , возникающей из-за взаимодействия нейтрон—протон, так же как и для полных энергий W_A^{nn} или W_A^{pp} , возникающих из-за взаимодействия нейтрон—нейтрон или соответственно протон—протон, получаем:

$$\begin{aligned} W_A^{np} &= \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k=1}^{Q_p} \varepsilon_{ik}^{np}, & W_A^{nn} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k \neq i}^{Q_n} \varepsilon_{ik}^{nn}, \\ W_A^{pp} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k \neq i}^{Q_p} \varepsilon_{ik}^{pp}. \end{aligned} \quad (45)$$

Отсюда для полной энергии, возникающей из-за взаимодействия всех нуклеонов, получаем:

$$W_A = W_A^{np} + W_A^{nn} + W_A^{pp}. \quad (46)$$

Теперь мы должны ещё определить более подробно те части нуклеонного взаимодействия, которые зависят только от взаимного расстояния между нуклеонами, т. е. функции $J_{np}(r_{np})$, $J_{nn}(r_{nn})$ и $J_{pp}(r_{pp})$. Так как согласно экспериментальным данным ядерные силы обладают очень малым радиусом действия, а именно, область их действия составляет по порядку величины 10^{-13} см, то для J_{np} , J_{nn} и J_{pp} необходимо выбрать функции, которые очень быстро спадают при увеличении взаимного расстояния нуклеонов. Мы выберем здесь для взаимодействия нуклеонов скалярный центральный потенциал Юкавы, т. е. мы предположим, что обменное взаимодействие нейтронов с протонами осуществляется при помощи обмена электрически заряженными мезонами, а именно, π -мезонами, а обменное взаимодействие между одинаковыми нуклеонами осуществляется при помощи обмена электрически нейтральными мезонами с такой же массой. Далее мы предположим, что зависящая лишь от взаимного расстояния нуклеонов часть взаимодействия между нейтронами — протонами, нейтронами — нейтронами и протонами — протонами одинакова для всех трёх случаев. Другими словами, мы положим:

$$J_{np} = J_{nn} = J_{pp} = J = \gamma \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/r_0}, \quad (47)$$

где $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ обозначает взаимное расстояние между соответствующими нуклеонами, а γ — некоторая константа размерности энергии,

умноженной на длину; r_0 — также некоторая константа, равная, согласно теории Юкавы, комптоновской длине волны π -мезона, деленной на 2π . Если взять для массы π -мезона, M_π , значение 285 электронных масс¹⁴, то имеем:

$$r_0 = \frac{h}{2\pi M_\pi c} = 1,355 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (48)$$

где c обозначает скорость света. Константой γ , которая пока не определена подробнее, мы будем распоряжаться в дальнейшем.

Здесь можно отметить, что в применениях статистической теории к атомным ядрам в большинстве работ для энергии взаимодействия двух нуклонов обычно выбиралось выражение

$$J = -\epsilon e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/r_0} \quad (49)$$

или

$$J = -\epsilon e^{-(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/r_0)^2}, \quad (50)$$

где ϵ — некоторая константа размерности энергии, а r_0 — снова некоторая длина порядка 10^{-13} см.

Кроме обсуждавшегося до сих пор взаимодействия между нуклонами, имеется также ещё и кулоновское электростатическое взаимодействие между протонами, являющееся следствием наличия электрического заряда у протонов. Это взаимодействие в свою очередь образуется известным образом из парных взаимодействий частиц, совершенно аналогично тому, что мы предположили относительно рассматривавшегося до сих пор взаимодействия нуклонов и следствием чего явилась формальная запись выражения (24). В то время как в этом отношении оба взаимодействия ведут себя одинаково, в другом отношении между ними имеется существенное отличие. Действительно, рассматривавшееся выше взаимодействие между одинаковыми нуклонами необходимо было предположить зависящим от спинов, в то время как электростатическое кулоновское взаимодействие протонов спиновой зависимости не имеет. Соответственно, в этом случае появляется не только обменная энергия, но также и обычная энергия взаимодействия частиц. Для вычисления кулоновской энергии взаимодействия необходимо подставить в выражение (25) вместо P_{jk} кулоновскую энергию взаимодействия двух протонов $e^2/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, где e обозначает элементарный положительный заряд. Для обычной электростатической кулоновской энергии взаимодействия протонов тогда получаем:

$$W_C = \frac{1}{2} e^2 \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k \neq i}^{Q_p} \iint |\psi_i(q_p)|^2 |\psi_k(q_p')|^2 \frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_p'|} d\tau_p d\tau_p' \quad (51)$$

и для возникающей из электростатического взаимодействия обменной

энергии имеем:

$$W_R = -\frac{1}{2} e^2 \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k \neq i}^{Q_p} \iint \psi_k^*(q_p) \psi_i^*(q'_p) \psi_i(q_p) \psi_k(q'_p) \times \\ \times \frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p|} d\tau_p d\tau'_p. \quad (52)$$

Предполагая (28), получим для W_C выражение

$$W_C = \frac{1}{2} e^2 \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k \neq i}^{Q_p} \iint |\psi_i(\mathbf{r}_p)|^2 |\psi_k(\mathbf{r}'_p)|^2 \frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p|} dv_p dv'_p. \quad (53)$$

Для W_R при предположении (28) получается, что лишь те интегралы не исчезают, в которых интегрирование распространено на состояния с параллельными спинами. Получаем:

$$W_R = -\frac{1}{2} e^2 \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{\substack{k \neq i \\ \tau_k = \tau_i}}^{Q_p} \iint \psi_k^*(\mathbf{r}_p) \psi_i^*(\mathbf{r}'_p) \psi_i(\mathbf{r}_p) \psi_k(\mathbf{r}'_p) \times \\ \times \frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p|} dv_p dv'_p, \quad (54)$$

где двойная сумма должна быть распространена лишь на два состояния, которые обладают параллельными спинами. То, что в W_R в противоположность W_A^{pp} (или W_A^{nn}) обменное взаимодействие возникает из взаимодействия частиц лишь с параллельными спинами, следует из факта независимости кулоновского взаимодействия от спинов, в отличие от нуклеонного взаимодействия P_{ik} (или N_{ik}).

Итак, мы имеем в своём распоряжении волномеханическое выражение энергии взаимодействия между нуклеонами. Относительно обычной кулоновской энергии взаимодействия W_C мы не будем говорить ничего большего. Однако мы должны ещё подробно рассмотреть вычисление обменной энергии, в особенности обменной энергии свободного нуклеонного газа.

Напомним здесь, что мы до сих пор ещё не показали, каким образом обменное взаимодействие приводит к свойству насыщения ядерных сил. Об этом мы будем говорить в одном из ближайших параграфов, причём проще всего это удаётся показать на основе явного выражения для энергии обменного взаимодействия.

§ 5. Энергия взаимодействия нуклеонного газа

В этом параграфе мы займёмся конкретным вычислением энергии взаимодействия частиц уже рассмотренного ранее свободного нуклеонного газа, который состоит из Q_n нейтронов и Q_p протонов и находится в объёме Ω . Мы снова предположим, что газ находится при

абсолютном нуле температуры, т. е. в самом низшем энергетическом состоянии. Это означает, что каждое нейтронное состояние движения занято двумя нейтронами с антипараллельными спинами и каждое протонное состояние движения занято двумя протонами с антипараллельными спинами *). Каждое-либо k -е состояние движения свободного нейтрона или протона можно описать, например, при помощи плоских волн

$$u_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{2\pi i}{h} (\mathbf{p}_k \mathbf{r})}, \quad w_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{2\pi i}{h} (\mathbf{p}_k \mathbf{r})}, \quad (55)$$

где $\mathbf{p}_k$ обозначает вектор импульса нейтрона или протона. Эти волновые функции не удовлетворяют граничным условиям исчезновения собственных функций на плоскостях, ограничивающих объём Ω . Если, однако, предположить Ω очень большим, то можно удовлетворить этим граничным условиям уже при помощи малого изменения волновых функций, а именно, посредством интегрирования волновых функций по бесконечно малой области изменения вектора распространения. Благодаря этому обеспечивается исчезновение волновых функций на бесконечности. Далее, собственные функции различных нейтронных состояний, так же как и различных протонных состояний, должны быть ортогональны между собой. Это достигается при помощи того, что, например, для нейтронов мы будем считать в фазовом пространстве векторы импульсов $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_k$ принадлежащими различным ячейкам импульсного пространства.

Для вычисления обменной энергии W_A нашего свободного нуклеонного газа мы введём для простоты следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{ik}^{np}(\mathbf{r}) &= u_i^*(\mathbf{r}) w_k(\mathbf{r}), \\ \rho_{ik}^{nn}(\mathbf{r}) &= u_i^*(\mathbf{r}) u_k(\mathbf{r}), \\ \rho_{ik}^{pp}(\mathbf{r}) &= w_i^*(\mathbf{r}) w_k(\mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

При помощи этих обозначений можно записать ε_{ik}^{np} , ε_{ik}^{nn} и ε_{ik}^{pp} в следующем виде:

$$\varepsilon_{ik}^{np} = \iint \rho_{ik}^{np}(\mathbf{r}) \rho_{ik}^{np*}(\mathbf{r}') J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dv dv', \quad (57)$$

$$\varepsilon_{ik}^{nn} = \iint \rho_{ik}^{nn}(\mathbf{r}) \rho_{ik}^{nn*}(\mathbf{r}') J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dv dv', \quad (58)$$

$$\varepsilon_{ik}^{pp} = \iint \rho_{ik}^{pp}(\mathbf{r}) \rho_{ik}^{pp*}(\mathbf{r}') J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dv dv'. \quad (59)$$

Для нахождения W_A нам необходимо вычислить эти три интеграла,

*) В том случае, когда число нейтронов или протонов нечётно, относительно самое высокое энергетическое состояние занято лишь одной частицей, что, однако, ниже не играет никакой роли ввиду предположения большого числа частиц.

причём в плотности переходов ρ_{ik}^{np} , ρ_{ik}^{nn} и ρ_{ik}^{pp} мы подставим плоские волны вида (55).

Мы начнем с вычисления ε_{ik}^{np} , т. е. обменной энергии i -го нейтрона и k -го протона, которая, с учётом (47), может быть записана в следующем виде:

$$\varepsilon_{ik}^{np} = -\gamma \int \rho_{ik}^{np}(\mathbf{r}) \rho_{ik}^{np*}(\mathbf{r}') \frac{e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/r_0}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv dv', \quad (60)$$

причём

$$\rho_{ik}^{np}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Omega} e^{\frac{2\pi i}{h}(\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_i, \mathbf{r})}. \quad (61)$$

В качестве потенциала распределения $\rho_{ik}^{np*}(\mathbf{r})$ можно ввести величину

$$V_{ik}(\mathbf{r}) = \int \rho_{ik}^{np*}(\mathbf{r}') \frac{e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/r_0}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' \quad (62)$$

и при помощи неё представить ε_{ik}^{np} в виде

$$\varepsilon_{ik}^{np} = -\gamma \int \rho_{ik}(\mathbf{r}) V_{ik}(\mathbf{r}) dv. \quad (63)$$

Вычисление потенциала V_{ik} не представляет затруднений. Совершенно аналогично тому, как потенциал некоторого пространственного распределения зарядов с кулоновскими силами удовлетворяет уравнению Пуассона, так и потенциал V_{ik} распределения ρ_{ik}^{np*} с юкавскими силами удовлетворяет обобщённому уравнению Пуассона вида

$$\Delta V_{ik} - \frac{1}{r_0^2} V_{ik} = -4\pi \rho_{ik}^{np*}. \quad (64)$$

Решение этого уравнения есть

$$V_{ik}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{1}{p_0^2 + |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k|^2} \rho_{ik}^{np*}, \quad (65)$$

где

$$p_0 = \frac{\hbar}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_0}. \quad (66)$$

Подставляя (65) в (63), получим:

$$\varepsilon_{ik}^{np} = -\frac{\gamma \hbar^2}{2\pi} \frac{1}{p_0^2 + |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k|^2}. \quad (67)$$

Возникающая из обменного взаимодействия нейтронов и протонов полная обменная энергия W_A^{np} получается согласно (45)

суммированием ε_{ik}^{np} по всем полностью занятым нейтронным и протонным состояниям, т. е. при помощи суммирования по всем импульсам нейтронов $\mathbf{p}_i$ и по всем импульсам протонов $\mathbf{p}_k$.

Вывод выражения для ε_{ik}^{np} мы осуществили в предыдущих параграфах на основе волновой механики, вычисление же W_A^{np} , т. е. суммирование по нейтронным и протонным импульсам, мы проведём на основании статистических соображений. Это означает, что суммирование по $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_k$ мы заменим интегрированием, что можно сделать следующим образом. Если обозначить абсолютные величины $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_k$ через p_i и p_k , а угол между $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_k$ — через ϑ , то будем иметь

$$|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k|^2 = p_i^2 + p_k^2 - 2 p_i p_k \cos \vartheta. \quad (68)$$

Введём полярную систему координат с полярной осью, направленной по $\mathbf{p}_i$. Число нейтронов, направления импульсов которых лежат между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$, а величины импульсов лежат в пределах p_i и $p_i + dp_i$, равно

$$dn = \frac{4\pi\Omega}{h^3} p_i^2 \sin \vartheta dp_i d\vartheta. \quad (69)$$

При помощи (69) можно заменить суммирование по p_i следующим интегрированием:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{Q_n} \varepsilon_{ik}^{np} &= -\frac{4\gamma}{h} \int_0^{p_{\mu n}} dp_i p_i^2 \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{p_0^2 + p_i^2 + p_k^2 - 2 p_i p_k \cos \vartheta} = \\ &= -\frac{2\gamma}{h} \left[\frac{1}{2p_k} (p_{\mu n}^2 - p_k^2 - p_0^2) \ln \frac{(p_{\mu n} + p_k)^2 + p_0^2}{(p_{\mu n} - p_k)^2 + p_0^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2p_{\mu n} - 2p_0 \operatorname{arctg} \frac{p_{\mu n} + p_k}{p_0} - 2p_0 \operatorname{arctg} \frac{p_{\mu n} - p_k}{p_0} \right], \quad (70) \end{aligned}$$

где $p_{\mu n}$ обозначает величину максимального импульса нейтронов.

Это выражение даёт обменную энергию всех Q_n нейтронов с протоном, имеющим импульс $\mathbf{p}_k$. Полная энергия, возникающая из обменного взаимодействия всех Q_n нейтронов со всеми Q_p протонами, получится, если просуммировать это выражение по протонным импульсам $\mathbf{p}_k$. Это суммирование мы снова заменим интегрированием. Для этого мы должны умножить выражение, стоящее в правой части (70), на $8\pi\Omega p_k^2/h^3$ и проинтегрировать по p_k от нуля до $p_{\mu p}$, где $p_{\mu p}$ обозначает величину максимального импульса протонов.

После довольно утомительного интегрирования получается

$$\begin{aligned}
 W_A^{np} &= \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k=1}^{Q_p} \varepsilon_{ik}^{np} = \\
 &= -\frac{16\pi\gamma\Omega}{h^4} \int_0^{p_{\mu p}} \left[2p_{\mu n} + \frac{1}{2p_k} (p_{\mu n}^2 - p_k^2 + p_0^2) \ln \frac{p_0^2 + (p_{\mu n} + p_k)^2}{p_0^2 + (p_{\mu n} - p_k)^2} - \right. \\
 &\quad \left. - 2p_0 \operatorname{arctg} \frac{p_{\mu n} + p_k}{p_0} - 2p_0 \operatorname{arctg} \frac{p_{\mu n} - p_k}{p_0} \right] p_k^2 dp_k = \\
 &= -\frac{16\pi\gamma\Omega}{h^4} \left\{ \frac{1}{2} (p_{\mu n}^3 p_{\mu p} + p_{\mu n} p_{\mu p}^3) - \frac{1}{6} p_0^2 p_{\mu n} p_{\mu p} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{24} [p_0^4 + 6p_0^2 (p_{\mu n}^2 + p_{\mu p}^2) - 3(p_{\mu n}^2 - p_{\mu p}^2)^2] \ln \frac{p_0^2 + (p_{\mu n} + p_{\mu p})^2}{p_0^2 + (p_{\mu n} - p_{\mu p})^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{3} p_0 (p_{\mu n}^3 + p_{\mu p}^3) \operatorname{arctg} \frac{p_{\mu n} + p_{\mu p}}{p_0} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3} p_0 (p_{\mu n}^3 - p_{\mu p}^3) \operatorname{arctg} \frac{p_{\mu n} - p_{\mu p}}{p_0} \right\}. \quad (71)
 \end{aligned}$$

Если ввести безразмерные функции

$$\omega_n = \frac{p_{\mu n}}{p_0} = (3\pi^2)^{1/3} r_0 p_n^{1/3} \quad \text{и} \quad \omega_p = \frac{p_{\mu p}}{p_0} = (3\pi^2)^{1/3} r_0 p_p^{1/3}, \quad (72)$$

то можно записать W_A^{np} в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 W_A^{np} &= -\frac{\gamma\Omega}{r_0^4} \frac{1}{6\pi^3} \left\{ 3(\omega_n^3 \omega_p + \omega_n \omega_p^3) - \omega_n \omega_p + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} [1 + 6(\omega_n^2 + \omega_p^2) - 3(\omega_n^2 - \omega_p^2)^2] \{ \ln [1 + (\omega_n + \omega_p)^2] - \right. \\
 &\quad \left. - \ln [1 + (\omega_n - \omega_p)^2] \} - 4(\omega_n^3 + \omega_p^3) \operatorname{arctg} (\omega_n + \omega_p) + \right. \\
 &\quad \left. + 4(\omega_n^3 - \omega_p^3) \operatorname{arctg} (\omega_n - \omega_p) \right\}. \quad (73)
 \end{aligned}$$

Вычисление W_A^{nn} и W_A^{pp} ведётся совершенно аналогичным образом. Прежде всего также и в этих случаях вычисляются ε_{ik}^{nn} и ε_{ik}^{pp} , для которых получаются формально такие же выражения, как для $1/2 \varepsilon_{ik}^{np}$ [см. (67)], с тем, однако, существенным отличием, что в выражении для ε_{ik}^{nn} оба импульса $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_k$ обозначают нейтронные импульсы, а в выражении для ε_{ik}^{pp} они обозначают протонные импульсы. Далее всё происходит совершенно аналогично вычислению W_A^{np} , только в случае W_A^{nn} приходится интегрировать по p_i и p_k оба раза от нуля до $p_{\mu n}$, а в случае W_A^{pp} оба раза от нуля

до $p_{\mu p}$. Учитывая (45), получим:

$$W_A^{nn} = -\frac{4\pi\gamma\Omega}{h^4} \left[p_{\mu n}^4 - \frac{1}{6} p_0^2 p_{\mu n}^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{24} (p_0^4 + 12 p_0^2 p_{\mu n}^2) \ln \frac{p_0^2 + 4 p_{\mu n}^2}{p_0^2} - \frac{4}{3} p_0 p_{\mu n}^2 \operatorname{arctg} \frac{2 p_{\mu n}}{p_0} \right], \quad (74)$$

$$W_A^{pp} = -\frac{4\pi\gamma\Omega}{h^4} \left[p_{\mu p}^4 - \frac{1}{6} p_0^2 p_{\mu p}^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{24} (p_0^4 + 12 p_0^2 p_{\mu p}^2) \ln \frac{p_0^2 + 4 p_{\mu p}^2}{p_0^2} - \frac{4}{3} p_0 p_{\mu p}^2 \operatorname{arctg} \frac{2 p_{\mu p}}{p_0} \right]. \quad (75)$$

Если ввести и здесь безразмерные функции ω_n и ω_p , то получим:

$$W_A^{nn} = -\frac{\gamma\Omega}{r_0^4} \frac{1}{24\pi^3} \left[6\omega_n^4 - \omega_n^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (1 + 12\omega_n^2) \ln (1 + 4\omega_n^2) - 8\omega_n^3 \operatorname{arctg} 2\omega_n \right], \quad (76)$$

$$W_A^{pp} = -\frac{\gamma\Omega}{r_0^4} \frac{1}{24\pi^3} \left[6\omega_p^4 - \omega_p^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (1 + 12\omega_p^2) \ln (1 + 4\omega_p^2) - 8\omega_p^3 \operatorname{arctg} 2\omega_p \right]. \quad (77)$$

Всё вышеизложенное справедливо лишь для случая свободного нуклеонного газа, т. е. для случая, когда плотность распределения нуклеонов является постоянной. Для несвободного нуклеонного газа обменную энергию можно вычислять аналогично тому, как мы поступали в случае фермиевской кинетической энергии несвободного газа. Как и тогда мы разделим объём, занимаемый газом, при помощи некоторой системы перегородок на частичные объёмы dv , содержащие ещё много нейтронов и протонов, которые можно рассматривать уже как свободный нуклеонный газ, т. е. нуклеонный газ с постоянной плотностью. Обменную энергию нуклеонов в отдельных частичных объёмах можно представить в виде (73), (76) и (77) с тем отличием, что вместо Ω повсюду стоит dv . Полная обменная энергия тогда получится при помощи интегрирования по всему занимаемому нуклеонным газом объёму. Если для сокращения ввести обозначение

$$f(\omega_n, \omega_p) = \frac{1}{24\pi^3} \left\{ 3(\omega_n^3 \omega_p + \omega_n \omega_p^3) - \omega_n \omega_p + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} [1 + 6(\omega_n + \omega_p)^2 - 3(\omega_n^2 - \omega_p^2)^2] \{ \ln [1 + (\omega_n + \omega_p)^2] - \right. \\ \left. - \ln [1 + (\omega_n - \omega_p)^2] \} - 4(\omega_n^3 + \omega_p^3) \operatorname{arctg} (\omega_n + \omega_p) + \right. \\ \left. + 4(\omega_n^3 - \omega_p^3) \operatorname{arctg} (\omega_n - \omega_p) \right\}, \quad (78)$$

то будем иметь:

$$W_A^{np} = - \frac{4\gamma}{r_0^4} \int f(\omega_n, \omega_p) dv, \quad (79)$$

$$W_A^{nn} = - \frac{\gamma}{r_0^4} \int f(\omega_n, \omega_n) dv, \quad (80)$$

$$W_A^{pp} = - \frac{\gamma}{r_0^4} \int f(\omega_p, \omega_p) dv. \quad (81)$$

В то время как в (45) в выражениях для W_A^{nn} и W_A^{pp} члены, возникающие из-за самообмена нейтронов или протонов, выпадают ввиду сокращения членов с $k=i$ в двойной сумме, выражения (80) и (81), как и предшествующие им соответствующие выражения, содержат также и энергию, возникающую из-за самообмена, так как в обоих случаях приходится интегрировать дважды по одному и тому же интервалу импульсов. Ввиду отсутствия точного метода для введения поправки на самообмен, можно поступить таким образом, что энергию, возникающую из-за самообмена одного нейтрона или протона, приравнять средней обменной энергии, приходящейся на один нейтрон или протон, т. е. величине W_A^{nn}/Q_n^2 или W_A^{pp}/Q_p^2 .

Таким образом энергии, возникающая из-за самообмена всех нейтронов или протонов, есть W_A^{nn}/Q_n или W_A^{pp}/Q_p . Для поправки на самообмен мы должны вычесть эти энергии из (80) и (81), и таким образом поправка на самообмен состоит в том, что выражения (80) и (81) просто умножаются на величины $s_n = 1 - \frac{1}{Q_n}$ или соответственно на $s_p = 1 - \frac{1}{Q_p}$. Итак, для полной обменной энергии получается

$$W_A = W_A^{np} + s_n W_A^{nn} + s_p W_A^{pp}. \quad (82)$$

Конечно, введенная таким образом поправка очень груба, хотя всё же следует подчеркнуть, что для случая $Q_n=1$ и $Q_p=1$, когда поправка играет относительно наиболее значительную роль, получается точное значение, так как в этом случае поправочные множители s_n и s_p обращаются в нуль, а вместе с ними исчезают и исправленные выражения $s_n W_A^{nn}$ и $s_p W_A^{pp}$, как это и должно быть. Для больших чисел частиц эта поправка даёт лишь грубо приближённое значение, что, однако, мало существенно, так как, очевидно, чем больше число частиц, тем меньшее значение имеет эта поправка.

Для полноты мы приведём здесь ещё функции $f(\omega_n, \omega_p)$ для случая энергии взаимодействия вида (49) и (50). В случае энергии

взаимодействия (49) имеем:

$$f(\omega_n, \omega_p) = \frac{r_0}{24\pi^3} \left\{ 4\omega_n\omega_p - [1 + 3(\omega_n^2 + \omega_p^2)] \{ \ln[1 + (\omega_n + \omega_p)^2] - \right. \\ \left. - \ln[1 + (\omega_n - \omega_p)^2] \} + 4(\omega_n^3 + \omega_p^3) \operatorname{arctg}(\omega_n + \omega_p) - \right. \\ \left. - 4(\omega_n^3 - \omega_p^3) \operatorname{arctg}(\omega_n - \omega_p) \right\} \quad (83)$$

и в случае энергии взаимодействия (50) найдём:

$$f(\omega_n, \omega_p) = \frac{r_0}{6\pi^{5/2}} \left[\frac{\pi^{1/2}}{2} (\omega_n^3 + \omega_p^3) \Phi\left(\frac{\omega_n + \omega_p}{2}\right) + \right. \\ \left. + (\omega_n^2 + \omega_p^2 - \omega_n\omega_p - 2) e^{-\frac{\omega_n^2 + \omega_p^2}{2}} - \right. \\ \left. - \frac{\pi^{1/2}}{2} (\omega_n^3 - \omega_p^3) \Phi\left(\frac{\omega_n - \omega_p}{2}\right) - \right. \\ \left. - (\omega_n^2 + \omega_p^2 + \omega_n\omega_p - 2) e^{-\frac{(\omega_n - \omega_p)^2}{2}} \right], \quad (84)$$

где $\Phi(x)$ обозначает гауссовскую трансцендентную функцию

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^x e^{-u^2} du. \quad (85)$$

Вывод этих выражений, т. е. обменных энергий для случаев взаимодействий (49) и (50), можно провести несколько иным образом, чем в рассмотренном нами случае юкавского взаимодействия. Вычисление ε_{ik}^{pp} в этих случаях можно осуществить при помощи прямого интегрирования выражения (60)⁹. Для энергии взаимодействия (49), например, можно найти W_A^{ip} , W_A^{nn} и W_A^{pp} также и при помощи дифференцирования соответствующих юкавскому взаимодействию (47) выражений (71), (76) и (77) по параметру $-1/r_0$, т. е. $-2\pi p_0/\hbar$, что непосредственно видно из сравнения (47) и (49).

Возникающая из-за электростатического кулоновского взаимодействия протонов обменная энергия W_R может быть легко вычислена для случая свободных протонов при помощи выражения для ε_{ik}^{pp*}). Двойной интеграл в (54), который мы для краткости обозначим через ε_{ik}^R , для протонов с параллельными спинами как раз равен $2\varepsilon_{ik}^{pp}$, если в выражении для ε_{ik}^{ip} подставить вместо констант γ и $1/r_0$ значения $\gamma = e^2$ и $1/r_0 = 0$, т. е. $p_0 = 0$. При этом $J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ как раз переходит в кулоновское взаимодействие

^{*}) Относительно выражения для ε_{ik}^{pp} сравни, например, § 9.

$\frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$. Таким образом для протонов с параллельными спинами получается

$$\varepsilon_{ik}^R = -\frac{e^2 h^2}{\Omega \pi} \frac{1}{|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k|^2}. \quad (86)$$

Для протонов с антипараллельными спинами $\varepsilon_{ik}^R = 0$.

Для вычисления W_R необходимо просуммировать ε_{ik}^R по всем протонным состояниям с параллельными спинами. Суммирование можно заменить интегрированием, совершенно аналогично вычислению W_A^{pp} , причём, однако, необходимо отметить, что теперь суммирование, т. е. интегрирование, распространено лишь на протонные состояния с параллельными спинами. Получим¹²

$$W_R = -\frac{1}{2} e^2 \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{\substack{k \neq i \\ \sigma_k = \sigma_i}}^{Q_p} \varepsilon_{ik}^R = -\frac{4 \pi e^2 \Omega}{h^4} p_{\mu p}^4. \quad (87)$$

Если также и здесь вместо $p_{\mu p}$ ввести безразмерную функцию ω_p , то для свободного протонного газа следует

$$W_R = -\frac{e^2 \Omega}{r_0^4} \frac{1}{4\pi^3} \omega_p^4. \quad (88)$$

Для несвободного протонного газа, т. е. для протонного газа с произвольной плотностью распределения, получим, совершенно аналогично (79) — (81), выражение

$$W_R = -\frac{e^2}{r_0^4} \frac{1}{4\pi^3} \int \omega_p^4 dv. \quad (89)$$

Совершенно так же, как в (80) и (81), в этом выражении, по тем же самым причинам как и там, содержится энергия, возникающая из-за самообмена протонов. Совершаемую благодаря этому ошибку всё же нет необходимости специально исправлять, а можно поступить следующим образом. Восстановим в обычном выражении для кулоновской энергии W_C члены, соответствующие электростатическому самодействию, чего всё равно нельзя избежать при статистическом методе рассмотрения. Это значит, что в выражении (53) мы учтём члены также и с $k=i$, вследствие чего для произвольного, т. е. как свободного, так и несвободного протонного газа, получим выражение

$$\begin{aligned} W_C &= \frac{1}{2} e^2 \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k=1}^{Q_p} \iint |\omega_i(\mathbf{r})|^2 |\omega_k(\mathbf{r})|^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv' = \\ &= \frac{1}{2} e^2 \iint \frac{\rho_p(\mathbf{r}) \rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv', \end{aligned} \quad (90)$$

где согласно волномеханическому определению плотности частиц подставлено

$$\sum_{i=1}^{Q_p} |\psi_i(\mathbf{r})|^2 = \rho_p(\mathbf{r}). \quad (91)$$

Члены с $k=i$ в W_C , отвлекаясь от знаков, в точности те же, что и члены с $k=i$ в W_R , что легко можно установить сравнением (90) с (54). Так как, кроме того, эти члены в W_C и W_R обладают различными знаками, то получается, что они в сумме $W_C + W_R$ а только такая сумма и будет встречаться нам в дальнейшем — полностью сокращаются. Правда, это сокращение происходит полностью лишь в волномеханических выражениях, в статистических же выражениях оно только частичное. Об этом всё же не приходится беспокоиться, поскольку эти энергии самодействия имеют значение лишь для малых чисел протонов, а при этом, как можно показать, как W_C , так и W_R малы по сравнению с W_A .

Относительно выражения (90) следует ещё отметить, что W_C может быть записано также и в виде

$$W_C = \frac{1}{2} e \int V(\mathbf{r}) \rho_p(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (92)$$

где

$$V(\mathbf{r}) = e \int \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (93)$$

обозначает электростатический потенциал протонов в точке $\mathbf{r}$.

§ 6. Свойство насыщения обменных сил

Как известно, экспериментальные данные говорят о том, что энергия ядра приблизительно пропорциональна числу нуклеонов. Это указывает на то, что действующие между нуклеонами силы притяжения, совершенно так же как и химические валентные силы, должны обладать некоторым насыщением, т. е. при помощи этих сил один нуклеон может связать лишь ограниченное число нуклеонов. Здесь мы хотим показать, что описанные выше обменные силы, в противоположность обычным силам, обладают таким свойством насыщения, причём мы продемонстрируем это косвенным образом, при помощи исследования зависимости обменной энергии от числа частиц. Поправочный фактор s мы при этом можем положить равным единице.

Рассмотрим снова уже разбиравшийся случай Q_n нейтронов и Q_p протонов, находящихся в объёме Ω и обладающих постоянной плотностью распределения. Кроме того, мы сделаем ещё упрощение, пред-

положив, что числа нейтронов и протонов одинаковы, т. е. $Q_n = Q_p = Q/2$, где Q — полное число нуклеонов. Тогда будем иметь:

$$\rho_n = \rho_p = \frac{1}{2} \rho = \frac{Q}{2\Omega} \quad \text{и} \quad \omega_n = \omega_p = \omega = \left(\frac{3\pi^2 r_0^3}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{Q}{\Omega} \right)^{1/3}, \quad (94)$$

где ρ обозначает полную плотность нуклеонов.

Для обменной энергии нуклеонов получается из (73), (76) и (77) с учётом (94) выражение

$$W_A = W_A^{np} + W_A^{nn} + W_A^{pp} = -\frac{6\gamma}{r_0^4} f(\omega, \omega) \Omega = \\ = -\frac{3}{8\pi} \frac{\gamma}{r_0} Q \left[6\omega - \frac{1}{\omega} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\omega^3} + \frac{12}{\omega} \right) \times \right. \\ \left. \times \ln(1 + 4\omega^2) - 8 \operatorname{arctg} 2\omega \right]. \quad (95)$$

Как видно из этого выражения, для больших ω имеем:

$$W_A \simeq -\frac{9}{4} \frac{\gamma}{r_0} Q\omega. \quad (96)$$

Таким образом, для больших ω W_A пропорциональна $Q\omega$. Так как, далее, ввиду постоянной плотности, ω пропорционально $Q^{1/3}$, то оказывается, что W_A пропорциональна $Q^{4/3}$.

Итак, в то время как обычная энергия взаимодействия нуклеонов пропорциональна ω^2 , т. е. Q^2 , W_A пропорциональна Q в степени лишь $4/3$. В этом находит своё выражение свойство насыщения обменных сил. Правда, в этом случае насыщение не полное, так как при полном насыщении сил взаимодействия энергия взаимодействия должна была бы быть пропорциональна числу частиц, т. е. пропорциональна Q , в то время как в нашем случае получается пропорциональность $Q^{4/3}$. Это является следствием того, что мы энергию взаимодействия между двумя нуклеонами представили в виде (47). Если же мы взяли бы энергию взаимодействия в виде (49) или (50), то обменная энергия при $\omega \gg 1$ оказалась бы¹⁴ пропорциональной Q , и насыщение в этих случаях при $\omega \gg 1$ таким образом получилось бы полное.

Всё это легко можно показать. В самом деле, нам нужно получить выражение полной обменной энергии W_A для взаимодействий (49) и (50), аналогичное выражению (95). При помощи (83) и (84) и с учётом (94) для случая энергии взаимодействия (49) получается

$$W_A = -\frac{3}{8\pi} \varepsilon Q \left[\frac{4}{\omega} - \left(\frac{1}{\omega^3} + \frac{6}{\omega} \right) \ln(1 + 4\omega^2) + 8 \operatorname{arctg} 2\omega \right] \quad (97)$$

и в случае энергии взаимодействия (50) получается

$$W_A = -\frac{3}{2\pi^{1/3}} \varepsilon Q \left[\pi^{1/2} \Phi(\omega) + \left(\frac{1}{\omega} - \frac{2}{\omega^3} \right) e^{-\omega^2} - \frac{3}{\omega} + \frac{2}{\omega^3} \right]. \quad (98)$$

Для больших ω эти выражения переходят асимптотически соответственно в

$$W_A \cong -\frac{3}{8\pi} \varepsilon Q 8 \operatorname{arctg} 2\omega \cong -\frac{3}{2} \varepsilon Q \quad (99)$$

и

$$W_A \cong -\frac{3}{2\pi^{1/2}} \varepsilon Q \pi^{1/2} \Phi(\omega) \cong -\frac{3}{2} \varepsilon Q. \quad (100)$$

В обоих случаях, таким образом, W_A пропорциональна Q .

Для случаев (95), (99) и (100) величина W_A/Q как функция ω представлена на рис. 1, который отчётливо поясняет зависимости.

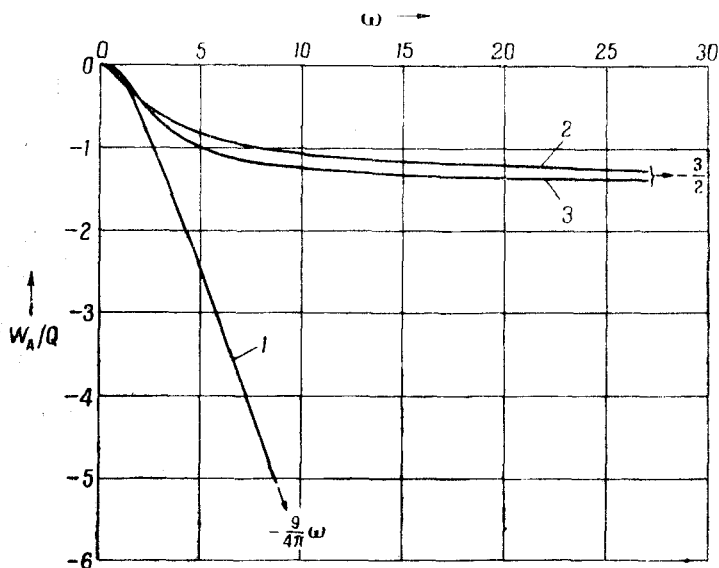


Рис. 1. Приходящаяся на одну частицу обменная энергия W_A/Q нуклеонного газа с постоянной плотностью как функция ω :
 кривая 1 — W_A/Q , вычисленная из (95) в единицах γ/r_0 ,
 кривая 2 — W_A/Q , вычисленная из (97) в единицах ε ,
 кривая 3 — W_A/Q , вычисленная из (98) в единицах ε .

По отношению к большим ω , таким образом, имеется существенное различие между энергиями взаимодействия (49) и (50), с одной стороны, и положенной нами в основу юкавской энергией взаимодействия (47), с другой стороны. Частично основываясь на этом различии, можно надеяться, что проводимые в дальнейшем в настоящей работе вычисления приведут к результатам более удовлетворительным, чем те, которые удавалось получать при помощи других упомянутых энергий взаимодействия.

Причина этого различного асимптотического поведения указанных энергий взаимодействия лежит, очевидно, в том, что при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 0$ энергии взаимодействия (49) и (50) переходят в некоторую постоянную, в то время как энергия взаимодействия (47) стремится к бесконечности как $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

§ 7. Статистическая модель атомного ядра

Статистическая теория атомного ядра основывается на предположении, что нуклоны ядра можно рассматривать как вырожденный нейтронный и протонный газ при абсолютном нуле температуры. Принимается, что в этом нуклеонном газе частицы распределены непрерывно, т. е. считается, что частицы распылены по всему объёму. Нуклеонный газ удерживается компактно при помощи подробно обсуждённых в двух предыдущих параграфах обменных энергий. Энергии отталкивания, которые уравнивают притяжение, это не что иное, как обсуждавшиеся в § 3 кинетические энергии нуклеонного газа и рассмотренная в § 4 и конце § 5 кулоновская энергия взаимодействия протонов. Соответственно сущности статистического метода рассмотрения индивидуальные свойства нуклонов в статистической модели ядра полностью сглажены. Из основных предпосылок теории следует, далее, что она может быть применена лишь к таким ядрам, в которых число нейтронов и протонов велико, а, следовательно, статистический метод рассмотрения оправдан.

В дальнейшем мы будем рассматривать ядро, состоящее из N нейтронов и Z протонов. Полное число нуклонов в ядре, т. е. массовое число, обозначим через A ; таким образом имеем:

$$A = N + Z. \quad (101)$$

Вследствие уже обсуждавшихся выше поправок к фермиевской кинетической энергии и обменной энергии одинаковых частиц мы можем рассматривать не только тяжёлые ядра, но принять во внимание также и лёгкие ядра.

Основная проблема заключается в определении энергии ядра и нахождении плотности распределения нуклонов в ядре. Решение этой проблемы можно найти при помощи некоторого вариационного принципа. К этому вариационному принципу мы подойдём после того, как образуем выражения для энергии ядра. Для вывода этого выражения введём систему перегородок, при помощи которых мы разделим нуклеонный газ, совершенно так же, как и в §§ 3 и 5, на частичные объёмы dv , таким образом, чтобы каждый пространственный элемент объёма содержал бы ещё много нейтронов и протонов, которые будем рассматривать как свободный нейтронный или протонный газ. От той трудности, что это условие не выполняется в областях, значительно удалённых от центра ядра, ввиду малого числа нуклонов, мы пока отвлекаемся, так как эти области

при вычислении энергии ядра, интересующей нас в первую очередь, имеют малое значение. Отдельные составляющие энергии ядра мы можем сразу же указать при помощи результатов, полученных в §§ 3 и 5. Прежде чем мы это сделаем, выскажем ещё несколько частично упрощающих дело общих положений.

При вычислении энергии удобно выражать все составные части энергии в одних и тех же энергетических единицах. Мы положим $g = 4e$ и выберем в качестве единицы энергии величину

$$\epsilon_0 = \frac{g^2}{r_0} = 2,724 \cdot 10^{-5} \text{ эрг} = 17,01 \text{ Мэв.} \quad (102)$$

Это практически вдвое больше средней энергии связи, приходящейся на один нуклеон ядра.

Далее, мы упростим выражение фермиевской кинетической энергии и выражение обменной энергии одинаковых частиц посредством введения следующих упрощений для поправочных факторов: k_n , k_p , s_n и s_p . Эти поправочные факторы имеют значение лишь для лёгких ядер. В наиболее стабильных лёгких ядрах $N = Z = A/2$, поэтому при вычислении энергии наиболее стабильных лёгких ядер мы можем положить

$$k_n = k_p = k = 1 - \frac{4}{A} \quad \text{для } A \geq 4, \quad (103)$$

$$k_n = k_p = k = 0 \quad \text{для } A < 4, \quad (104)$$

а также

$$s_n = s_p = s = 1 - \frac{2}{A} \quad \text{для } A \geq 2, \quad (105)$$

$$s_n = s_p = s = 0 \quad \text{для } A < 2. \quad (106)$$

Эти упрощённые поправочные факторы k и s мы можем сохранить также и для тяжёлых ядер, в которых $N \neq Z$, ибо для них вся поправка не существенна. Случаи $A < 4$ или $A < 2$ указаны лишь ради полноты, практически же они не имеют значения, так как при таких малых числах частиц статистическая теория становится совершенно неприемлемой и мы в наших дальнейших вычислениях лишь как самый предельный случай будем рассматривать величину $A = 4$. Поэтому в дальнейшем мы положим просто

$$k = 1 - \frac{4}{A} \quad \text{и} \quad s = 1 - \frac{2}{A}.$$

Наконец, в составных частях энергии вместо функций плотности φ_n и φ_p мы введём повсюду безразмерные функции ω_n и ω_p , которые определены посредством (72).

Учитывая всё вышесказанное, мы приведём теперь отдельные составные части энергии. Если обозначить фермиевскую кинетическую энергию нуклеонов через E_K , вайцекерскую поправку кинетической

энергии на неоднородность через E_J , возникающую из-за взаимодействия нейтрон — протон обменную энергию через E_A^{np} , возникающую из-за взаимодействия нейтрон — нейтрон обменную энергию через E_A^{nn} , возникающую из-за взаимодействия протон — протон обменную энергию через E_A^{pp} , обычную электростатическую кулоновскую энергию взаимодействия протонов через E_C и, наконец, возникающую из этого взаимодействия обменную энергию через E_R , то будем иметь:

$$E_K = \kappa_K \int (\rho_n^{5/3} + \rho_p^{5/3}) dv = \frac{\kappa_K}{(3\pi^2)^{2/3} r_0^5} \int (\omega_n^5 + \omega_p^5) dv = \\ = \frac{\kappa_K}{(3\pi^2)^{2/3} r_0^5} \varepsilon_0 \int (\omega_n^5 + \omega_p^5) dv, \quad (107)$$

$$E_J = \chi_J \int \left[\frac{1}{\rho_n} \left(\frac{d\rho_n}{dr} \right)^2 + \frac{1}{\rho_p} \left(\frac{d\rho_p}{dr} \right)^2 \right] dv = \\ = \frac{3\chi_J}{\pi^2 r_0^3} \int \left[\omega_n \left(\frac{d\omega_n}{dr} \right)^2 + \omega_p \left(\frac{d\omega_p}{dr} \right)^2 \right] dv = \\ = \frac{3\chi_J}{\pi^2 r_0^3} \varepsilon_0 \int \left[\omega_n \left(\frac{d\omega_n}{dr} \right)^2 + \omega_p \left(\frac{d\omega_p}{dr} \right)^2 \right] dv, \quad (108)$$

$$E_A^{np} = -\frac{4\gamma}{r_0^4} \int f(\omega_n, \omega_p) dv = -\frac{4\lambda}{r_0^3} \varepsilon_0 \int f(\omega_n, \omega_p) dv, \quad (109)$$

$$E_A^{nn} = -\frac{\gamma_S}{r_0^4} \int f(\omega_n, \omega_n) dv = -\frac{\lambda_S}{r_0^3} \varepsilon_0 \int f(\omega_n, \omega_n) dv, \quad (110)$$

$$E_A^{pp} = -\frac{\gamma_S}{r_0^4} \int f(\omega_p, \omega_p) dv = -\frac{\lambda_S}{r_0^3} \varepsilon_0 \int f(\omega_p, \omega_p) dv, \quad (111)$$

$$E_C = \frac{1}{2} e^2 \iint \frac{\rho_p(\mathbf{r}) \rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv' = \frac{e^2}{18\pi^4 r_0^6} \iint \frac{\omega_p^3(\mathbf{r}) \omega_p^3(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv' = \\ = \frac{1}{2} \frac{e}{3\pi^2 r_0^3} \int V(\mathbf{r}) \omega_p^3(\mathbf{r}) dv = \frac{1}{96\pi^2 e r_0^2} \varepsilon_0 \int V(\mathbf{r}) \omega_p^3(\mathbf{r}) dv, \quad (112)$$

$$E_R = -\frac{e^2}{4\pi^3 r_0^4} \int \omega_p^4 dv = -\frac{1}{64\pi^3 r_0^3} \varepsilon_0 \int \omega_p^4 dv. \quad (113)$$

Здесь μ_K , μ_J и λ обозначают следующие безразмерные величины:

$$\mu_K = \frac{\kappa_K}{r_0^2 \varepsilon_0} = 3,814; \quad \mu_J = \frac{\chi_J}{r_0^2 \varepsilon_0} = 0,1660; \quad \lambda = \frac{\gamma}{r_0 \varepsilon_0} = \frac{\gamma}{g^3}. \quad (114)$$

$V(\mathbf{r})$ — определённый при помощи (93) электростатический потенциал протонов; интегрирование распространено на все области, где не исчезают ρ_n и ρ_p .

Вместо γ таким образом была введена величина λ , которая является пока не определённым безразмерным параметром, причём она является единственным произвольным параметром в теории, значение которого мы определим, исходя из экспериментальных данных.

Полная энергия E ядра есть

$$E = E_K + E_J + E_A^{np} + E_A^{nn} + E_A^{pp} + E_C + E_R. \quad (115)$$

Проблема состоит в том, чтобы определить такие функции распределения ρ_n и ρ_p или ω_n и ω_p , которые дают минимум энергии ядра, причём необходимо помнить, что для ρ_n и ρ_p или ω_n и ω_p имеют место добавочные условия

$$\int \rho_n dv = \frac{1}{3\pi^2 r_0^3} \int \omega_n^3 dv = N, \quad (116)$$

$$\int \rho_p dv = \frac{1}{3\pi^2 r_0^3} \int \omega_p^3 dv = Z, \quad (117)$$

посредством которых устанавливается полное число нейтронов или протонов в ядре. Проблема, таким образом, может быть сформулирована в форме следующего вариационного принципа:

$$\delta(E + b_n N + b_p Z) = 0, \quad (118)$$

где b_n и b_p обозначают множители Лагранжа, а вариация должна производиться либо относительно ρ_n и ρ_p , либо, соответственно, относительно ω_n и ω_p . Далее, следует заметить, что электростатический потенциал протонов должен удовлетворять уравнению Пуассона

$$\Delta V = -4\pi e \rho_p = -\frac{4e}{3\pi r_0^3} \omega_p^3. \quad (119)$$

Нетрудно было бы вывести для нахождения ρ_n и ρ_p или ω_n и ω_p соответствующую систему дифференциальных уравнений с некоторыми граничными условиями. Однако решение этой системы уравнений привело бы к весьма длинным и трудным численным расчётам, которых можно избежать прямым решением вариационной проблемы при помощи метода Ритца, что мы и сделаем в ближайших параграфах. При этом, наряду с условиями (116) и (117), достаточно учесть ещё следующие граничные условия. Во-первых, по соображениям симметрии должны выполняться следующие условия:

$$\left(\frac{\partial \rho_n}{\partial r}\right)_{r=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial \rho_p}{\partial r}\right)_{r=0} = 0, \quad (120)$$

или условия

$$\left(\frac{\partial \omega_n}{\partial r}\right)_{r=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial \omega_p}{\partial r}\right)_{r=0} = 0, \quad (121)$$

где r обозначает расстояние от центра ядра. Во-вторых, ρ_n и ρ_p или ω_n и ω_p должны исчезать при бесконечном удалении от ядра.

§ 8. Статистическое ядро с постоянной плотностью нуклеонов

Прежде чем приступить к решению вариационной задачи при помощи метода Ритца, мы обсудим сперва нулевое приближение, точным решением которого является всюду постоянная плотность распределения. Это нулевое приближение получается, если в выражении для полной энергии (115) учитывать лишь важнейшие составные части энергии, которыми являются E_K и $E_A = E_A^{np} + E_A^{nn} + E_A^{pp}$. Если не рассматривать совсем лёгкие ядра, то по сравнению с этими величинами все остальные составляющие энергии являются лишь поправками и ими можно в нулевом приближении пренебречь. Соответственным образом можно также положить поправочные факторы k и s равными единице. Кроме того, мы сделаем ещё упрощающее предположение, приняв числа нейтронов и протонов равными друг другу, т. е. $N = Z = A/2$. Тогда

$$\rho_n = \rho_p = \frac{1}{2} \rho \quad \text{и} \quad \omega_n = \omega_p = \omega, \quad (122)$$

где ρ — полная плотность нуклеонов.

Для энергии ядра согласно этой упрощённой модели получается

$$E = \frac{2\mu_K \varepsilon_0}{(3\pi^2)^{5/3} r_0^3} \int \omega^3 dv + \frac{6\lambda \varepsilon_0}{r_0^3} \int f(\omega, \omega) dv, \quad (123)$$

причём ω должно удовлетворять дополнительному условию

$$\int \rho dv = \frac{2}{3\pi^2 r_0^3} \int \omega^3 dv = A. \quad (124)$$

Вариационный принцип теперь гласит

$$\delta(E + bA) = 0, \quad (125)$$

где b обозначает множитель Лагранжа.

Из (125) получается зависимость

$$\frac{10}{3} \frac{\mu_K \varepsilon_0}{(3\pi^2)^{5/3}} \omega^4 + 6\lambda \varepsilon_0 \frac{\partial f}{\partial \omega} + b \frac{2}{3\pi^2} \omega^3 = 0. \quad (126)$$

Учитывая, что $\frac{\partial f}{\partial \omega}$ является функцией одного лишь ω , а множитель Лагранжа b есть константа, получаем, что ω , т. е. ρ , постоянно.

Этот результат, который мы вывели из вариационного принципа, можно было бы получить также и без всяких вычислений. Из выражения (123) для энергии нулевого приближения получается, что плотность энергии, т. е. энергия в единице объёма в каждой точке, зависит лишь от плотности частиц в этой самой точке и совершенно не зависит от распределения плотности в окрестности

упомянутой точки. Таким образом, в ядре нет ни одной энергетически выделенной точки, откуда следует, в согласии с полученным выше результатом, что во всём ядре существует повсюду одна и та же плотность и именно та, которая приводит к наименьшей энергии.

Для постоянной плотности нуклеонов из условия нормировки (124) следует, что плотность существует лишь внутри некоторого шара, вне которого она обращается всюду в нуль. Если обозначить объём этого шара через Ω , то из (124) получается соотношение

$$\rho = \frac{2}{3\pi^2 r_0^3} \omega^3 = \frac{A}{\Omega}. \quad (127)$$

Учитывая, что ω постоянно, получим при помощи (127) из (123) для энергии ядра

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\mu_K \varepsilon_0}{(3\pi^2)^{1/2} r_0^3} \omega^2 \Omega - \frac{6\lambda \varepsilon_0}{r_0^3} f(\omega, \omega) \Omega = \\ &= A \varepsilon_0 \left\{ \frac{\mu_K}{(3\pi^2)^{1/2}} \omega^2 - \frac{3\lambda}{8\pi} \frac{1}{\omega^3} \left[6\omega^4 - \omega^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} (1 + 12\omega^2) \ln(1 + 4\omega^2) - 8\omega^3 \arctg 2\omega \right] \right\}. \quad (128) \end{aligned}$$

Единственный произвольный параметр в этом выражении есть λ . Если положить

$$\lambda = 3,31, \quad (129)$$

то для минимума энергии получается соотношение

$$E_0 = -0,50 A \varepsilon_0 = -8,5 A \text{ Мэв}, \quad (130)$$

которое, исключая случай самых лёгких ядер, в среднем хорошо подтверждается экспериментальными данными.

Минимум энергии лежит при следующем значении ω :

$$\omega = 2,39, \quad (131)$$

которому соответствует плотность

$$\rho = 0,922 \frac{1}{r_0^3}. \quad (132)$$

Для граничного радиуса, до которого распространена плотность, получается из (124) при $\omega = \omega_0$

$$R = \frac{(9\pi)^{1/2}}{2\omega_0} A^{1/3} r_0 = 0,637 A^{1/3} r_0. \quad (133)$$

Таким образом, граничный радиус в этом приближении, в согласии с найденными экспериментально ядерными радиусами, оказывается пропорциональным $A^{1/3}$, а также имеет правильный порядок величины. О том, насколько допустимо непосредственно сравнивать этот граничный радиус с экспериментальными ядерными радиусами, мы будем говорить в конце § 9.

§ 9. Вычисление распределения плотности и энергии ядра при помощи метода Ритца

Мы приступим теперь к решению полной вариационной проблемы (64) при помощи метода Ритца. Метод Ритца состоит в том, что неизвестные функции — в нашем случае плотности распределения ρ_n и ρ_p или ω_n и ω_p — предполагаются имеющими какую-либо форму, удовлетворяющую граничным условиям и содержащую некоторые первоначально неопределённые параметры. При помощи этого предположения вычисляется энергия как функция этих параметров, а сами параметры определяются из требования минимума энергии. Таким образом, весь метод сводится к обычной задаче на минимум. Для точного определения искомых функций необходимо было бы ввести бесконечно много первоначально неопределённых параметров, например путём разложения искомой функции в ряд по подходящим образом выбранным функциям f_i с первоначально неопределёнными коэффициентами, т. е. путём представления искомой функции в виде $\sum c_i f_i$. Функции f_i должны удовлетворять тем же самым

граничным условиям, что и искомая функция, в остальном же они могут быть произвольными. Так как обычно поведение искомой функции приблизительно известно, практически наиболее целесообразно задаться такой формулой интерполирующих функций, которая наиболее близко аппроксимирует точную функцию. На этом пути удастся получить хорошее приближение неизвестной функции большей частью уже при помощи небольшого числа параметров. Интеграл, минимум которого ищется — в нашем случае энергия — довольно быстро приближается к точному значению, тем скорее, чем ближе откetchают аппроксимирующие функции точному решению. Значения энергии, которые получаются в приближённых решениях при помощи метода Ритца, лежат, естественно, выше точного значения энергии.

Наша задача обладает шаровой симметрией, так что мы имеем лишь одну независимую переменную, а именно, расстояние от центра ядра r . Оказывается целесообразным ввести вместо r безразмерную переменную

$$x = \frac{1}{3^{1/2}} a \frac{r}{r_0}, \quad (134)$$

где a обозначает некоторый вариационный параметр^{*)}.

Для ω_n и ω_p мы сделаем следующие предположения:

$$\omega_n = \omega_{n0} e^{-x^2} \sum_{i=0}^m \gamma_i n i x^{2i}, \quad \omega_p = \omega_{p0} e^{-x^2} \sum_{i=0}^m \gamma_i p i x^{2i}, \quad (135)$$

^{*)} Множитель $\frac{1}{3^{1/2}}$ введён для упрощения численных коэффициентов.

где ω_{n0} и ω_{p0} — нормировочные множители, а коэффициенты γ_{ni} и γ_{pi} обозначают дальнейшие вариационные параметры; коэффициенты γ_{n0} и γ_{p0} мы положим равными единице. Нормировочные множители определяются при помощи нормировочных условий (116) и (117). Вариационные параметры a , γ_{ni} и γ_{pi} определяются из требования минимума энергии. Указанные предположения удовлетворяют граничным условиям, ибо, с одной стороны, функции (135), как легко видеть, удовлетворяют условиям (121), а, с другой стороны, фактор e^{-x^2} в ω_n и ω_p гарантирует исчезновение этих функций на бесконечности. Для $m=1, 2, 3, \dots$, т. е., учитывая 1, 2, 3, ... членов сумм в выражениях (135), получим приближения растущей шаг за шагом степени. Мы ограничимся здесь простейшим случаем, когда все коэффициенты γ_{ni} и γ_{pi} , за исключением γ_{n0} и γ_{p0} , равны нулю. Тогда имеем

$$\omega_n = \omega_{n0} e^{-x^2}, \quad \omega_p = \omega_{p0} e^{-x^2}. \quad (136)$$

Это означает, что мы предполагаем одинаковыми распределения плотности нейтронов и протонов и лишь постольку допускаем некоторое отличие в функциях плотности, поскольку нормируем их по-разному, в соответствии с разными числами нейтронов и протонов.

Предположения (136) содержат лишь один вариационный параметр, а именно, параметр a , который, согласно (134), явно содержится в x и, естественно, входит также и в нормировочные множители ω_{n0} и ω_{p0} , для которых, ввиду (116) и (117), имеют место соотношения

$$\omega_{n0} = (9\pi)^{1/6} N^{1/3} a, \quad \omega_{p0} = (9\pi)^{1/6} Z^{1/3} a. \quad (137)$$

В дальнейшем, для сокращения и упрощения некоторых формул, полезным оказывается ввести следующие обозначения:

$$c_n = 2\omega_{n0} = 2(9\pi)^{1/6} N^{1/3} a, \quad (138)$$

$$c_p = 2\omega_{p0} = 2(9\pi)^{1/6} Z^{1/3} a, \quad (139)$$

$$c = 2(9\pi)^{1/6} \left(\frac{N+Z}{2} \right)^{1/3} a = 2(9\pi)^{1/6} \left(\frac{A}{2} \right)^{1/3} a, \quad (140)$$

$$c_1 = \frac{1}{2} (c_n + c_p), \quad (141)$$

$$c_d = \frac{1}{2} (c_n - c_p). \quad (142)$$

Далее, целесообразно выразить ω_n и ω_p , как и ρ_n и ρ_p , через параметры c_n или c_p , а также представить ρ_n и ρ_p в виде функций от r . Имеем:

$$\omega_n = \frac{1}{2} c_n e^{-x^2}, \quad \omega_p = \frac{1}{2} c_p e^{-x^2}, \quad (143)$$

$$\rho_n = \frac{1}{3\pi^2 r_0^3} \omega_n^3 = \frac{1}{24\pi^3 r_0^3} c_n^3 e^{-3x^2} = \frac{N}{\pi^{3/2} r_0^3} a^3 e^{-a^2 r^2 / r_0^2}, \quad (144)$$

$$\rho_p = \frac{1}{3\pi^2 r_0^3} \omega_p^3 = \frac{1}{24\pi^3 r_0^3} c_p^3 e^{-3x^2} = \frac{Z}{\pi^{3/2} r_0^3} a^3 e^{-a^2 r^2 / r_0^2}. \quad (145)$$

После всех этих приготовлений мы перейдем к обсуждению нашей первоначальной задачи вычисления энергии как функции вариационных параметров, для чего удобно вместо a в качестве вариационного параметра ввести пропорциональную a величину c .

Мы исходим из формул (107) — (113). Составные части энергии E_K , E_J , E_C и E_R после проведения элементарного интегрирования можно очень просто выразить как функции c .

Для E_K получается

$$E_K = \frac{4 \cdot 3^{1/2} \pi \mu_K k}{(3\pi^2)^{1/3} r_0^5 a^3} \int_0^\infty (\omega_n^5 + \omega_p^5) x^2 dx =$$

$$= \frac{3}{20} \left(\frac{3}{5} \right)^{1/2} \frac{\mu_K}{(3\pi^2)^{1/3}} 2^{2/3} \frac{N^{1/3} + Z^{1/3}}{A^{1/3}} k A c^2 \varepsilon_0. \quad (146)$$

Выражение $2^{2/3} (N^{1/3} + Z^{1/3}) / A^{1/3}$, которое при $N=Z$ равно единице, можно упростить. Если обозначить избыток нейтронов через n , т. е. положить

$$n = N - Z \quad (147)$$

и упомянутое выражение разложить в ряд по степеням n/A , то получится

$$2^{2/3} \frac{N^{1/3} + Z^{1/3}}{A^{1/3}} = 1 + \frac{5}{9} \left(\frac{n}{A} \right)^2 + \frac{5}{243} \left(\frac{n}{A} \right)^4 + \dots \quad (148)$$

Если этот ряд оборвать после второго члена и полученное таким образом выражение подставить в (146), то будем иметь:

$$E_K = \frac{3}{20} \left(\frac{3}{5} \right)^{1/2} \frac{\mu_K}{(3\pi^2)^{1/3}} \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{n}{A} \right)^2 \right] k A c^2 \varepsilon_0 =$$

$$= 0,04630 \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{n}{A} \right)^2 \right] k A c^2 \varepsilon_0. \quad (149)$$

Для E_J получается

$$E_J = \frac{12 \cdot 3^{1/2} \mu_J}{\pi r_0^2} \frac{1}{a} \int_0^\infty \left[\omega_n \left(\frac{d\omega_n}{dx} \right)^2 + \omega_p \left(\frac{d\omega_p}{dx} \right)^2 \right] x^2 dx =$$

$$= \frac{3\mu_J}{(18\pi)^{1/3}} A^{1/3} c^2 \varepsilon_0 = 0,1297 A^{1/3} c^2 \varepsilon_0. \quad (150)$$

Составляющую энергию E_C после простых выкладок можно представить в виде

$$\begin{aligned} E_C &= -\frac{2e}{3\pi r_0^3} \int_0^\infty V(x) \omega_p^3(x) x^2 dx = -\frac{e^2}{(2\pi)^{1/2} r_0} Z^2 a = \\ &= -\frac{1}{(32)^{1/3} (72 \pi^4)^{1/6}} \left(\frac{2Z}{A} \right)^2 A^{1/3} c \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (151)$$

где $V(x)$ — определённый при помощи (93) электростатический потенциал плотности электрического заряда $er_p = \frac{e}{3\pi^2 r_0^3} \omega_p^3$ в точке x . Если фактор $2Z/A$ при помощи (147) и зависимости $A = N + Z$ выразить через n и A , то оказывается

$$\frac{2Z}{A} = 1 - \frac{n}{A}. \quad (152)$$

После подстановки в (151) следует

$$\begin{aligned} E_C &= -\frac{1}{(32 \pi)^{1/3} (72 \pi^4)^{1/6}} \left[1 - 2 \frac{n}{A} + \left(\frac{n}{A} \right)^2 \right] A^{1/3} c \varepsilon_0 = \\ &= 0,002250 \left[1 - 2 \frac{n}{A} + \left(\frac{n}{A} \right)^2 \right] A^{1/3} c \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (153)$$

Для E_R получается

$$\begin{aligned} E_R &= -\frac{3^{3/2} e^2}{\pi^2 r_0} - \frac{1}{a^3} \int_0^\infty \omega_p^4 x^2 dx = -\frac{27}{32\pi} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{1/6} \frac{e^2}{r_0} Z^{1/3} a = \\ &= -\frac{27}{2048 \cdot 3^{1/2} \pi} \left(\frac{2Z}{A} \right)^{1/3} A c \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (154)$$

Фактор $(2Z/A)^{1/3}$ можно разложить в ряд по степеням n/A . Учитывая (152), получим:

$$\left(\frac{2Z}{A} \right)^{1/3} = 1 - \frac{4}{3} \frac{n}{A} + \frac{2}{9} \left(\frac{n}{A} \right)^2 + \dots \quad (155)$$

Если оборвать этот ряд после третьего члена и полученное таким образом выражение подставить в (154), то следует

$$\begin{aligned} E_R &= -\frac{27}{2048 \cdot 3^{1/2} \pi} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{n}{A} + \frac{2}{9} \left(\frac{n}{A} \right)^2 \right] A c \varepsilon_0 = \\ &= -0,002423 \left[1 - \frac{4}{3} \frac{n}{A} + \frac{2}{9} \left(\frac{n}{A} \right)^2 \right] A c \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (156)$$

Нам нужно вычислить ещё обменные энергии E_A^{np} , E_A^{nn} и E_A^{pp} как функции c , что является несколько более сложным. Из (109), (110)

и (111) при учёте (78) получается в обозначениях (138) — (142)

$$\begin{aligned}
 E_A^{np} &= -16 \cdot 3^{3/2} \pi \frac{\gamma}{r_0} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty f(\omega_n, \omega_p) x^2 dx = \\
 &= -\frac{24}{\pi} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} A \lambda \varepsilon_0 \frac{1}{c^3} \left\{ \frac{3\pi^{1/2}}{512} (c_n^3 c_p + c_n c_p^3) - \frac{1}{32} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} c_n c_p + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{4} [L(c_s) - L(c_d)] + \frac{3}{8} (c_n^2 + c_p^2) [K(c_s) - K(c_d)] - \\
 &\quad - \frac{3}{64} (c_n^4 - 2c_n^2 c_p^2 + c_p^4) [H(c_s) - H(c_d)] - \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} (c_n^3 + c_p^3) M(c_s) + \frac{1}{2} (c_n^3 - c_p^3) M(c_d) \right\}, \quad (157)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_A^{nn} &= -4 \cdot 3^{3/2} \pi \frac{\gamma}{r_0} \frac{s}{a^3} \int_0^\infty f(\omega_n, \omega_n) x^2 dx = \\
 &= -\frac{6}{\pi} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} s A \lambda \varepsilon_0 \frac{1}{c^3} \left[\frac{6\pi^{1/2}}{512} c_n^4 - \frac{1}{32} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} c_n^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} L(c_n) + \frac{3}{4} c_n^2 K(c_n) - c_n^3 M(c_n) \right], \quad (158)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_A^{pp} &= -4 \cdot 3^{3/2} \frac{\gamma}{r_0} \frac{s}{a^3} \int_0^\infty f(\omega_p, \omega_p) x^2 dx = \\
 &= -\frac{6}{\pi} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} s A \lambda \varepsilon_0 \frac{1}{c^3} \left[\frac{6\pi^{1/2}}{512} c_p^4 - \frac{1}{32} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} c_p^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} L(c_p) + \frac{3}{8} c_p^2 K(c_p) - c_p^3 M(c_p) \right], \quad (159)
 \end{aligned}$$

где L , K , H и M обозначают следующие интегралы:

$$L(q) = \int_0^\infty x^2 \ln(1 + q^2 e^{-2x^2}) dx, \quad (160)$$

$$K(q) = \int_0^\infty x^2 e^{-2x^2} \ln(1 + q^2 e^{-2x^2}) dx, \quad (161)$$

$$H(q) = \int_0^\infty x^2 e^{-4x^2} \ln(1 + q^2 e^{-2x^2}) dx, \quad (162)$$

$$M(q) = \int_0^\infty x^2 e^{-3x^2} \operatorname{arctg}(1 + qe^{-x^2}) dx, \quad (163)$$

а параметр q стоит вместо c_s , c_d , c_n и c_p .

При $q > 1$ эти интегралы не удаётся вычислить в замкнутом виде и приходится прибегать для их нахождения к численным или графическим методам.

Мы нашли численным методом с большой точностью значения интегралов $L(q)$, $K(q)$ и $M(q)$ для 18 различных значений q в существенном для наших вычислений интервале $1,3 < q < 11$. Значения интеграла $H(q)$, который, как будет видно, играет в выражении (157) лишь подчинённую роль, мы нашли для 8 различных значений q . Результаты представлены в табл. IV Математического приложения. Для интегралов $K(q)$, $H(q)$ и $M(q)$ можно вывести простые приближённые формулы, которые в важнейшем для вычислений интервале значений q дают максимальную ошибку 0,7%. Интеграл $L(q)$ можно выразить при помощи некоторого удобного приближённого выражения. Об этом мы также будем говорить в приложении.

Для $q \leq 1$ эти интегралы можно представить в виде следующих рядов:

$$L(q) = \frac{\pi^{1/2}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(2k)^{6/2}} q^{2k}, \quad (164)$$

$$K(q) = \frac{\pi^{1/2}}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k(2k+2)^{1/2}} q^{2k}, \quad (165)$$

$$H(q) = \frac{\pi^{1/2}}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k(2k+4)^{3/2}} q^{2k}, \quad (166)$$

$$M(q) = \frac{\pi^{1/2}}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(2k-1)(2k+2)^{3/2}} q^{2k-1}. \quad (167)$$

Теперь мы снова возвратимся к выражениям (157) — (159). Наша цель состоит в том, чтобы преобразовать эти выражения и представить E_A^{np} , E_A^{nn} и E_A^{pp} в виде функций от s . Это можно сделать шаг за шагом следующим образом.

Прежде всего мы займёмся величиной E_A^{np} и введём в выражении для E_A^{np} вместо c_n и c_p сперва параметры c_s и c_d . Ввиду (138), (139), (141) и (142) имеют место соотношения

$$c_n = c_s + c_d \text{ и } c_p = c_s - c_d, \quad (168)$$

при помощи которых встречающиеся в (157) и указанные ниже

выражения можно преобразовать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} c_n^3 c_p + c_n c_p^3 &= 2c_s^4 - 2c_d^4, \\ c_n c_p &= c_s^2 - c_d^2, \\ c_n^2 + c_p^2 &= 2c_s^2 + 2c_d^2, \\ c_n^4 + c_p^4 - 2c_n^2 c_p^2 &= 16c_s^2 c_d^2, \\ c_n^3 + c_p^3 &= 2c_s^3 + 6c_s c_d, \\ c_n^3 - c_p^3 &= 6c_s^2 c_d + 2c_d^3. \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

Если для сокращения ввести обозначения

$$F(q) = \frac{36}{\pi} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{q^3} \left[\frac{6\pi^{1/2}}{512} q^4 - \frac{1}{32} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} q^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} L(q) + \frac{3}{4} q^2 K(q) - q^3 M(q) \right], \quad (170)$$

$$S(q) = \frac{72}{\pi} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{q^3} \left[\frac{1}{4} q^4 H(q) + \right. \\ \left. + q^3 M(q) - \frac{1}{4} q^2 K(q) \right], \quad (171)$$

то можно записать E_A^{np} , принимая во внимание (169), в виде

$$E_A^{np} = - \left[\frac{2}{3} \left(\frac{c_s}{c} \right)^3 F(c_s) - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \left(\frac{c_d}{c} \right)^3 F(c_d) + \frac{c_s}{c} \left(\frac{c_d}{c} \right)^3 S(c_s) + \frac{c_d}{c} \left(\frac{c_s}{c} \right)^3 S(c_d) \right] A \lambda \varepsilon_0. \quad (172)$$

Существенное упрощение этого выражения можно произвести при помощи учёта следующих двух обстоятельств. Во-первых, из входящих в это выражение параметров c , c_s и c_d параметр c_d имеет меньший порядок величины, чем параметры c_s и c , которые имеют одинаковый порядок величин*); именно, повсюду $c_d/c < 1/10$; при $N = Z$ c_d исчезает. Во-вторых, в существенной для дальнейших вычислений области $c \cong 6,5$ параметр c_d постоянно меньше единицы. Учитывая всё это, можно разложить E_A^{np} по степеням c_d/c в быстро сходящийся ряд, который, как оказывается, без какой-либо заметной ошибки можно оборвать уже после члена с $(c_d/c)^3$.

Как легко убедиться, главным членом в (172) является первый член, следующие же три члена играют роль поправок**). Мы разложим по c_d/c сперва эти поправочные члены.

*) Относительно этого см. уравнения (140) — (142), а также уравнения (182) и (183).

**) Относительно F и S см. приведенные ниже выражения (187), (188) с учётом (189).

Во втором члене в (172) разложение $F(c_d)$ сводится к разложению $L(c_d)$, $K(c_d)$ и $M(c_d)$, которое может быть проведено при помощи формул (164), (165) и (167). Оказывается, что в $F(c_d)$ первый не исчезающий член имеет порядок c_d^3 . Учитывая это, имеем, что второй член в (172) имеет порядок $c_d^3(c_d/c)^3$ и по сравнению с первым членом совершенно не заметен, ввиду чего его можно отбросить.

Третий член в (172), собственно говоря, нет нужды разлагать в ряд по c_d/c , так как c_d в нём входит лишь в виде множителя $(c_d/c)^3$. Можно, однако, — поскольку мы имеем дело лишь с поправочным членом — провести некоторые упрощения, так чтобы в этом члене вместо c_s стояло всюду c . Разность между c_s и c в основном пропорциональна c_d^2 *, таким образом, различие между c_s и c в этом поправочном члене проявится лишь в величине, пропорциональной $(c_d/c)^4$, чем можно пренебречь. Таким образом, имеем:

$$\frac{c_s}{c} \left(\frac{c_d}{c} \right)^2 S(c_s) = \left(\frac{c_d}{c} \right)^2 S(c). \quad (173)$$

В четвёртом члене в (172) можно интегралы $K(c_d)$, $H(c_d)$ и $M(c_d)$ снова разложить относительно c_d при помощи формул (165)–(170). С учётом того, что также и здесь, как и в третьем члене в (172), можно положить $c_s = c$, после простых вычислений получится:

$$\frac{c_d}{c} \left(\frac{c_s}{c} \right)^2 S(c_d) = \tau c \left(\frac{c_d}{c} \right)^2, \quad (174)$$

где

$$\tau = \frac{72}{\pi} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/2} - \frac{3\pi^{1/2}}{128} = \frac{27 \cdot 3^{1/2}}{16\pi} = 0,93037. \quad (175)$$

Следующий не исчезающий член разложения левой части (174) был бы величиной пропорциональной $(c_d/c)^4$, а следовательно, пренебрежимо мал по сравнению с членом, стоящим в правой части (174).

Учитывая все эти результаты, получим таким образом из (172):

$$E_A^{np} = -\frac{2}{3} \left(\frac{c_s}{c} \right)^3 F(c_s) A\lambda\varepsilon_0 + [S(c) - \tau c] \left(\frac{c_d}{c} \right)^2 A\lambda\varepsilon_0. \quad (176)$$

Прежде чем преобразовать в этом выражении $F(c_s)$ от переменной c_s к переменной c , целесообразно принять во внимание также и составляющие энергии E_A^{nn} и E_A^{pp} и затем уже произвести указанное преобразование в общем выражении для полной обобщенной энергии.

Определённые в (158) и (159) выражения для энергии E_A^{nn} и E_A^{pp} можно записать в обозначениях (170) в следующей форме:

$$\begin{aligned} E_A^{nn} &= -\frac{s}{6} \left(\frac{c_n}{c} \right)^3 F(c_n) A\lambda\varepsilon_0, \\ E_A^{pp} &= -\frac{s}{6} \left(\frac{c_p}{c} \right)^3 F(c_p) A\lambda\varepsilon_0. \end{aligned} \quad (177)$$

* Об этом мы будем говорить ниже, ср. (182) и (183).

При помощи соотношений (168) можно преобразовать эти выражения от переменных c_n и c_p к переменной c_d и затем E_A^{nn} и E_A^{pp} разложить в ряд по степеням c_d/c , который мы снова оборвём после членов с $(c_d/c)^3$. После простых выкладок следует

$$E_A^{nn} + E_A^{pp} = -\frac{s}{3} \left(\frac{c_s}{c} \right)^3 F(c_s) A \lambda \epsilon_0 - \left[F(c) + c F'(c) + \frac{1}{6} c^3 F''(c) \right] \left(\frac{c_d}{c} \right)^2 A \lambda \epsilon_0. \quad (178)$$

Здесь опять самым существенным является первый член, а второй играет роль поправки и в нём, так же как в (173) и (174), положено $c_s = c$; F' и F'' обозначают первую и вторую производные от $F(c)$ по c . В поправочном члене поправочный фактор s положен равным единице.

При помощи (176) и (178) мы можем теперь следующим образом представить полную обменную энергию:

$$E_A = E_A^{np} + E_A^{nn} + E_A^{pp} = -\left(\frac{2}{3} + \frac{s}{3} \right) \left(\frac{c_s}{c} \right)^3 F(c_s) A \lambda \epsilon_0 + \left\{ S(c) - \tau c - \left[F(c) + c F'(c) + \frac{1}{6} c^3 F''(c) \right] \right\} \left(\frac{c_d}{c} \right)^2 A \lambda \epsilon_0. \quad (179)$$

Нам остаётся ещё преобразовать первый член от переменной c_s к переменной c .

Прежде чем сделать этот последний шаг и при помощи тождества $c_s = c + (c_s - c)$ разложить первый член в правой части (179) в ряд по малой величине $(c_s - c)/c$ и одновременно ввести вместо c_s переменную c , является целесообразным выразить c_d/c и $(c_s - c)/c$ через избыток нейтронов $n = N - Z$ и массовое число $A = N + Z$. Это может быть сделано очень просто.

Для этого выразим N и Z через n и A ; имеем:

$$N = \frac{1}{2} (A + n), \quad Z = \frac{1}{2} (A - n). \quad (180)$$

Если подставить эти выражения в (138) или (139), разложить $N^{1/2}$ или $Z^{1/2}$ в ряд по величине n/A и оборвать ряд после линейного по n/A члена, то для c_d/c следует

$$\frac{c_d}{c} = \frac{c_n - c_p}{2c} = \frac{1}{3} \frac{n}{A}. \quad (181)$$

Следующий исчезающий член разложения был бы по порядку величины $(n/A)^3$ и им можно пренебречь.

Для вычисления $(c_s - c)/c$ мы аналогично предыдущему разложим c_s в ряд по величине n/A . Если оборвать ряд после члена с $(n/A)^2$,

то получим:

$$c_s = \frac{1}{2} (c_n + c_p) = c - c \frac{1}{9} \left(\frac{n}{A} \right)^2, \quad (182)$$

$$\frac{c_s - c}{c} = -\frac{1}{9} \left(\frac{n}{A} \right)^2 = -\left(\frac{c_d}{c} \right)^2. \quad (183)$$

Следующий исчезающий член разложения пропорционален $(n/A)^4$ и может быть откинут. Таким образом, в то время как c_d/c пропорционально n/A , величина $(c_s - c)/c$ оказывается пропорциональной $(n/A)^2$.

Учитывая это, а также наше положение о том, что в выражении для энергии членами по порядку величины меньшими, чем $(c_d/c)^2 \sim \frac{1}{10} (n/A)^2$, мы пренебрегаем, можно разложение выражения для энергии (179) по $c_s - c$ оборвать после линейного относительно $c_s - c$ члена. Таким образом, зависящую от c_s часть первого члена в (179) можно представить в следующем виде:

$$\left(\frac{c_s}{c} \right)^3 F(c_s) = F(c) - \frac{1}{3} F'(c) \left(\frac{n}{A} \right)^2 - \frac{1}{9} c F''(c) \left(\frac{n}{A} \right)^2. \quad (184)$$

В этом выражении самым существенным является первое слагаемое, члены же, содержащие $(n/A)^2$, играют роль поправки.

При подстановке этого выражения в (179) можно в поправочном члене снова приравнять единице поправочный фактор s . Если, далее, в полученном таким образом соотношении выразить при помощи (181) c_d/c через n/A , то для E_A , как функции c , окончательно получается

$$E_A = - \left(\frac{2}{3} + \frac{s}{3} \right) F(c) A \lambda_{\varepsilon_0} + \frac{1}{9} \left[S(c) - \tau c + 2F(c) - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} c^2 F''(c) \right] \left(\frac{n}{A} \right)^2 A \lambda_{\varepsilon_0}. \quad (185)$$

Необходимая для знания этой энергии функция $F(c)$ приведена в Математическом приложении с точностью до четырёх знаков для 18 различных значений c (см. табл. IV).

При помощи некоторых ориентировочных вычислений легко установить, что все значения определяемой из требования минимума энергии величины c лежат в интервале

$$5,4 < c < 7,5 \quad (186)$$

для ядер, начиная от самых лёгких и кончая самыми тяжёлыми; мы можем, таким образом, в дальнейшем ограничиться значениями c из этого интервала. Для упрощения вычислений можно поступить так, чтобы в этом интервале аппроксимировать функции $F(c)$ и $S(c)$, которые содержатся в интегралах (160)—(163), при помощи более простых функций. Аппроксимацию $F(c)$ следует провести с особенной тщательностью, ибо при помощи $F(c)$ определяется главнейшая часть E_A . Оказывается, что как раз эта аппроксимация производится

наиболее легко, ввиду того, что в интервале (186) $F(c)$ изменяется приблизительно линейно. Относительно этого см. рис. 2, на котором $F(c)$ представлена графически. Находим, что обе функции могут быть представлены в следующей форме:

$$F(c) = a_1 c^2 + a_2 c + a_3, \quad (187)$$

$$S(c) = b_1 c^2 + b_2 c, \quad (188)$$

причём тем самым мы не совершаем в результатах никакой сколько-

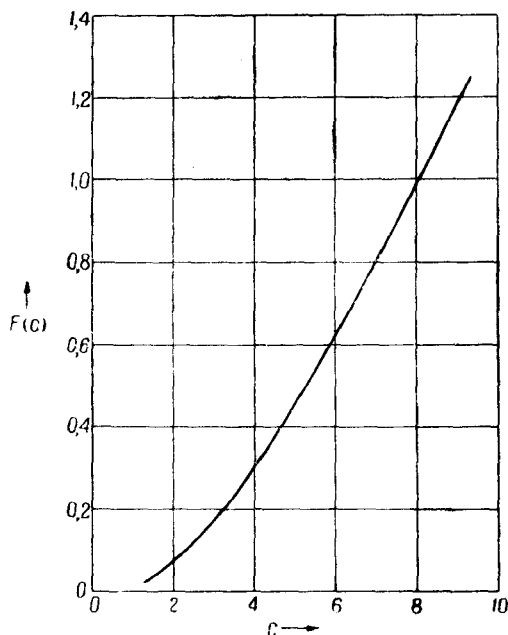


Рис. 2. Поведение функции $F(c)$.

нибудь заметной ошибки. Для коэффициентов при помощи метода наименьших квадратов получаются значения

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 0,006238, & b_1 &= 0,05375, \\ a_2 &= 0,09723, & b_2 &= 0,93456. \\ a_3 &= -0,1858, \end{aligned} \right\} \quad (189)$$

С такими коэффициентами оба полинома в интервале (186) превосходно аппроксимируют точные функции*), максимальная ошибка

*) Можно было бы поступить и так, что для интегралов L , K , M в $F(c)$ подставить приведённые в приложении приближённые выражения. Однако так полученное приближённое выражение для $F(c)$ менее точно, чем выражение (187).

в обоих случаях меньше 0,2%. Упомянем ещё, что в поправочный член в E_A входит вторая производная от $F(c)$ и для неё, естественно, аппроксимация менее точна, чем для $F(c)$. Однако это не имеет значения, поскольку мы имеем дело лишь с поправочным членом.

При помощи функций (187) и (188) после подстановки значения $s = 1 - \frac{2}{A}$ для поправочного фактора получается E_A в интервале (186) в следующем окончательном виде:

$$E_A = - \left\{ \left(1 - \frac{2}{3A} \right) (a_1 c^2 + a_2 c + a_3) - \frac{1}{9} \left[\left(\frac{5}{3} a_1 + b_1 \right) c^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + (2a_2 + b_2 - c) c + 2a_3 \right] \left(\frac{n}{A} \right)^2 \right\} A \lambda \varepsilon_0 = \\ = - \left[\left(1 - \frac{2}{3A} \right) (0,006238c^2 + 0,09723c - 0,1858) - \right. \\ \left. - (0,007127c^2 + 0,02208c - 0,04129) \left(\frac{n}{A} \right)^2 \right] A \lambda \varepsilon_0. \quad (190)$$

После суммирования выражений для энергии (149), (150), (153), (156) и (190) можно представить полную энергию ядра E как функцию c в следующей форме:

$$E = E_K + E_J + E_A + E_C + E_R = (P_1 c^2 + P_2 c + P_3) A \varepsilon_0, \quad (191)$$

где P_1 , P_2 и P_3 зависят лишь от массового числа A и отношения n/A и имеют следующий вид:

$$P_1 = \alpha_0 + \alpha_2 \left(\frac{n}{A} \right)^2; \quad P_2 = \beta_0 + \beta_1 \frac{n}{A} + \beta_3 \left(\frac{n}{A} \right)^2; \\ P_3 = \gamma_0 + \gamma_2 \left(\frac{n}{A} \right)^3, \quad (192)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= 0,04630 - 0,0062380\lambda - 0,1297 \frac{1}{A^{2/3}} - \\ &\quad - (0,1852 - 0,004159\lambda) \frac{1}{A}, \\ \alpha_2 &= 0,02572 + 0,007127\lambda - 0,1029 \frac{1}{A}, \\ \beta_0 &= 0,09723\lambda + 0,002423 - \\ &\quad - 0,002250 A^{2/3} - 0,06482\lambda \frac{1}{A}, \\ \beta_1 &= -0,003231 + 0,004500 A^{2/3}, \\ \beta_2 &= -0,02208\lambda + 0,00054 - 0,002250 A^{2/3}, \\ \gamma_0 &= 0,1858\lambda - 0,1239\lambda \frac{1}{A}, \\ \gamma_2 &= 0,04129\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

причём отметим, что для поправочного фактора k подставлено значение $k = 1 - \frac{4}{A}$. Величины $\alpha_0, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0$ и γ_2 таким образом являются функциями одного лишь A . В выражениях для P_1, P_2 и P_3 члены, содержащие n/A или $(n/A)^2$, снова представляют собой поправки, исчезающие при обращении избытка нейтронов в нуль.

Определение вариационного параметра c происходит при помощи требования минимума энергии E , т. е. из уравнения

$$\frac{dE}{dc} = 2P_1c - P_2 = 0, \quad (194)$$

из которого следует

$$c_0 = \frac{P_2}{2P_1}. \quad (195)$$

При помощи этого значения c для минимума E получается выражение

$$E_0 = - \left(\frac{P_2^2}{4P_1} - P_3 \right) A \varepsilon_0, \quad (196)$$

которое так же, как и c_0 , является функцией A и n/A .

§ 10. Результаты, относящиеся к энергии и распределению плотности ядра

Энергия ядра даётся выражением для E_0 . После подстановки (192) и (193) в (196) E_0 получается в виде функции массового числа $A = N + Z$ и избытка нейтронов $n = N - Z$. Для заданного A , таким образом, энергия ядра является ещё функцией от n , которая даёт энергию изобаров с массовым числом A .

Последовательность наиболее стабильных ядер, т. е. такие значения n или Z , которые дают минимум энергии при заданном значении A , получается из требования

$$\left(\frac{\partial E_0}{\partial n} \right)_A = 0. \quad (197)$$

Чтобы вычислить отсюда Z как функцию A , разложим E_0 в ряд по n/A и оборвём его после члена с $(n/A)^2$. Будем иметь

$$E_0 = - \left[\frac{1}{4} \frac{\beta_0^2}{\alpha_0} - \gamma_0 + \frac{1}{2} \frac{\beta_1 \beta_2}{\alpha_0} \left(\frac{n}{A} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{1}{\alpha_0} \left(\beta_1^2 + 2\beta_0 \beta_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \beta_0^2 - 4\alpha_0 \gamma_2 \right) \left(\frac{n}{A} \right)^2 \right] A \varepsilon_0. \quad (198)$$

Таблица I

Сравнение вычисленных значений заряда и энергии ядер с экспериментальными данными для ядер, которые обладают наименьшей энергией. Энергии выражены в Мэв *)

A	Вычисленные				Экспериментальные	
	c_{00}	$Z_{эфф}$	Z	$-E_{00}/A$	Z	$-E_{00}/A$
4	5,546	1,97	2	4,769	2	7,05
5	5,254	2,45	2	4,098	(2)	5,48
6	5,556	2,94	3	5,039	3	5,32
7	5,470	3,42	3	4,891	3	5,59
8	5,680	3,91	4	5,516	(4)	7,039
9	5,660 ₅	4,39	4	5,542	4	6,442
10	5,814	4,87	5	5,972	5	6,443
11	5,822	5,35	5	6,072	5	6,709
12	5,938	5,83	6	6,372	6	7,515
13	5,959	6,30	6	6,506	6	7,435
14	6,050	6,78	7	6,718	7	7,477
15	6,077	7,26	7	6,871	7	7,671
16	6,149	7,73	8	7,015	8	7,948
17	6,180	8,21	8	7,177	8	7,724
20	6,316	9,62	10	7,498	10	7,999
21	6,350	10,09	10	7,663	10	7,933
28	6,540	13,37	13	8,203	14	8,426
40	6,803	18,89	19	8,788	18	8,556
41	6,796	19,35	19	8,804	19	8,551
52	6,928	24,33	24	9,040	24	8,830
60	7,010	27,90	28	9,126	28	8,752
64	7,042	29,67	30	9,141	28	8,760
80	7,113	36,67	37	9,130	34; 36	—
96	7,150	43,52	44	9,119	40; 42; 44	—
100	7,134	45,21	45	8,984	42; 44	—
110	7,132	49,40	49	8,873	46; 48	—
120	7,157	53,53	54	8,759	50; 52	—
125	7,153	55,58	56	8,697	52	—
140	7,135	61,64	62	8,494	58	—
160	7,105	69,52	70	8,209	64; 66	8,202
170	7,059	73,39	73	8,051	68; 70	—
180	7,042	77,19	77	7,907	72; 74	—
200	7,005	84,63	85	7,610	80	—
209	6,972	87,90	88	7,473	83	7,799
215	6,951	90,05	90	7,384	(85)	7,719
220	6,941	91,83	92	7,308	(86)	7,669
240	6,879	98,78	99	7,014	(96)	7,496
242	6,854	99,46	99	6,973	(96)	7,488

*) В тех случаях, когда ввиду отсутствия экспериментальных данных для заданного A ядро с наименьшей энергией не установлено, приведены значения зарядов ядер всех стабильных изобаров; значения зарядов ядер нестабильных изобаров взяты в скобки.

Подставляя (198) в (197), дифференцируя по n и заменяя затем, согласно определению, n на $N - Z$, получим для порядкового числа наиболее стабильных ядер выражение

$$Z_{\text{эфф}} = \left(1 + \frac{\alpha_0^2 \beta_1}{\alpha_0^2 \beta_1^2 + 2 \alpha_0^2 \beta_2 - \alpha_2^2 \beta_0^2 - 4 \alpha_0^2 \gamma_2} \right) \frac{A}{2}. \quad (199)$$

Так как вычисленное таким образом порядковое число не является целым, то в качестве истинного порядкового числа наиболее стабильного ядра с массовым числом A мы будем брать такое целое число, которое ближе всего лежит к $Z_{\text{эфф}}$, а в качестве избытка нейтронов будем брать величину, полученную из этого целого Z при помощи соотношения $n = A - 2Z$.

Учитывая это, мы можем найти порядковое число Z или избыток нейтронов $n = A - 2Z$ для самых стабильных ядер при любом значении A . Энергия E_{00} самых стабильных ядер получается, если для каждого заданного A вычислить из (196) энергию при помощи n , округлённого указанным образом до целого числа.

Конечно, эти вычисления можно выполнить лишь тогда, когда будет установлена до сих пор ещё не определённая константа λ . Мы выберем её так, чтобы вычисленные энергии наиболее стабильных ядер во всём интервале от самых лёгких до самых тяжёлых ядер возможно меньше отклонялись от соответствующих экспериментальных значений. Мы положим

$$\lambda = 4,140; \quad (200)$$

для этого значения наше требование выполняется весьма удовлетворительным образом. То обстоятельство, что полученное здесь значение λ оказывается больше, чем соответствующее значение, полученное в § 8 для модели ядра с постоянной плотностью, является следствием того, что там мы пренебрегали энергиями отталкивания E_J и E_C . В проведённом же здесь точном расчёте они были приняты во внимание, вследствие чего их пришлось компенсировать при помощи увеличения энергии притяжения, т. е. путём увеличения значения λ .

В табл. I приведены средние вычисленные энергии E_{00}/A , приходящиеся на одну частицу ядра, которое обладает самой низкой для данного A энергией (наиболее стабильные изобары), а также соответствующие экспериментальные значения*); далее, приведены значения c_0 для этих ядер, обозначенные нами через c_{00} . Кроме того, E_{00}/A как функция A представлена графически на рис. 3, где даны также и экспериментальные значения. В качестве средней экспериментальной энергии ядра для заданного A мы привели

*) Относительно экспериментальных значений ср.¹¹.

приходящуюся на одну частицу среднюю энергию стабильного ядра с наименьшей энергией. Для таких значений A , для которых не существует стабильных ядер, мы указали приходящуюся на одну частицу среднюю энергию нестабильного ядра с наименьшей энергией. Как видно из сравнения, вычисленные энергии очень хорошо согласуются с экспериментальными значениями. Для средних и тяжёлых ядер максимальное отклонение вычисленных энергий от экспериментальных повсюду меньше 7%. Для лёгких ядер статистическая теория, естественно, может дать лишь некоторое

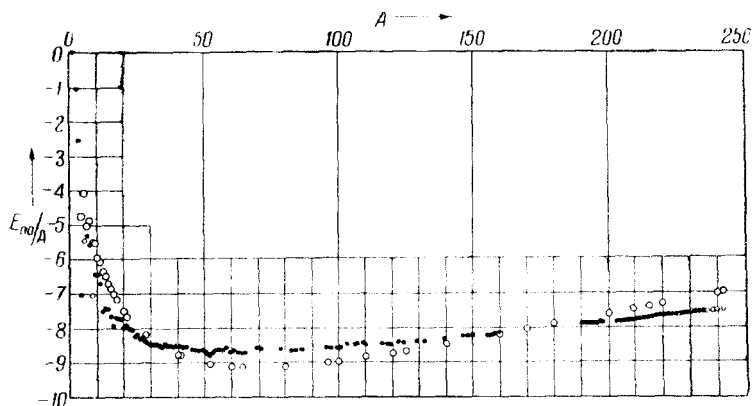


Рис. 3. Приходящаяся на одну частицу средняя энергия E_{00}/A как функция от A для ядер, обладающих при заданном A наименьшей энергией: $\circ$ — вычисленные значения, $\bullet$ — экспериментальные значения для стабильных ядер, $\circ$ — экспериментальные значения для нестабильных ядер.

среднее сильно скачущим эмпирическим значениям, что и имеет место в действительности весьма удовлетворительным для теории образом. Вышеупомянутое округление значений $Z_{\text{эфф}}$, вычисленных из (199), приводит к тому, что для совсем лёгких ядер, где разность энергии отдельных изобаров относительно велика, наблюдаются скачки в поведении энергии. В самом деле, приходящиеся на одну частицу средние энергии E_{00}/A наиболее стабильных изобаров со следующими друг за другом значениями A не лежат на какой-либо гладкой кривой, а, напротив, для чётных массовых чисел эти энергии лежат несколько ниже, а для нечётных несколько выше, чем это соответствовало бы гладкому поведению.

Причина того, что теория приводит к столь удовлетворительным результатам также и для лёгких ядер, заключается, в основном, в том, что мы, с одной стороны, исправили выражение кинетической энергии, при помощи чего она переходит для $A \leq 4$ в точное волномеханическое выражение, а с другой стороны, мы

ввели поправку также и к обменной энергии одинаковых частиц, устранив тем самым самообмен частиц.

При обсуждении полученных результатов необходимо подчеркнуть, что они достигнуты при помощи лишь одного единственного эмпирического параметра — параметра λ .

Формула для энергии (196), ввиду (193), справедлива только при $A \geq 4$. Можно теперь, в основном для ориентировки, распространить вычисления также и на случай ядер с $A < 4$, причём необходимо учесть, что при $A < 4$ определённый формулами (103) и (104) поправочный фактор k должен быть положен равным нулю. Знаменательно, что эти вычисления никоим образом не приводят к бессмысленным результатам, что можно отнести за счёт упомянутых выше двух поправок.

В табл. I мы привели также вычисленные при помощи (199) значения $Z_{\text{эфф}}$ для наиболее стабильных ядер, которые, как было уже упомянуто, в общем не являются целыми числами. Теоретические значения Z , т. е. целые числа, ближе всего лежащие к $Z_{\text{эфф}}$, указаны в четвёртом столбце таблицы. Для сравнения в таблице приведены также и экспериментальные порядковые числа¹¹ наиболее стабильных изобаров. В тех случаях, когда ввиду отсутствия экспериментальных данных наиболее стабильный изобар не установлен, указаны порядковые числа всех стабильных изобаров. Сравнение теоретических значений Z с экспериментальными приводит нас также и в этом случае к весьма удовлетворительному результату — максимальное отклонение вычисленных порядковых чисел от эмпирических составляет меньше 8%.

Кроме указанных здесь результатов представляют также интерес величины отдельных составных частей, из которых складывается энергия ядра. Они приведены в табл. II (см. стр. 436) снова для случая наиболее стабильных изобаров. Как можно видеть из этих данных, за исключением самых лёгких ядер, важнейшими составными частями энергии являются E_A и E_K , составляющие же E_J , E_C и особенно E_R по сравнению с ними имеют значительно меньший вес. Исключение составляют лишь самые лёгкие ядра, для которых наряду с E_A и E_K , а E_J является важнейшим членом. Следует ещё заметить, что из составляющих энергии E_J и E_C первая обладает относительно большим значением для лёгких, а вторая — для тяжёлых ядер, как это непосредственно видно также и из формул (150) и (151), согласно которым, ввиду практического постоянства значений c , энергия E_J пропорциональна $A^{1/3}$, а энергия E_C пропорциональна $A^{5/3}$.

Вычисления, которые мы приводили здесь для случая наиболее стабильных изобаров, можно, конечно, распространить и на любые другие ядра. Например, можно для последовательности изобаров с постоянным A вычислить энергию при различных заданных значениях Z . Мы сделали это для случаев малого, среднего и большого

Таблица II

Полная энергия и составные части энергии для различных ядер. Все энергии выражены в $M\text{эв}$

A	Z	$-E_A$	E_K	E_J	E_C	$-E_R$	$-E_{(0)}$
4	2	128,012	0	107,726	2,140	0,914	19,060
5	2	147,935	22,227	104,155	1,882	0,804	20,475
6	3	205,457	48,629	123,770	4,213	1,374	30,219
7	3	234,623	71,490	126,266	3,940	1,285	34,212
8	4	293,192	101,638	142,359	6,957	1,873	44,111
9	4	328,799	127,038	147,039	6,666	1,794	49,850
10	5	388,030	159,736	160,673	10,328	2,396	59,689
12	6	488,073	222,170	178,107	14,295	2,937	76,438
16	8	699,63	357,33	210,20	23,91	4,05	112,24
20	10	922,27	502,90	239,00	35,63	5,21	149,95
40	19	2113,87	1313,80	349,14	109,93	10,47	351,47
60	28	3343,73	2172,66	424,43	214,92	15,81	547,53
80	37	4573,39	3037,24	480,87	345,95	21,14	730,47
100	45	5739,13	3868,94	521,12	476,45	25,78	898,40
120	54	6930,5	4705,1	557,4	647,7	30,8	1051,1
140	62	8038,4	5492,4	583,2	808,6	35,0	1189,2
160	70	9116,0	6255,7	604,6	981,7	39,2	1313,2
180	77	10083,0	6953,0	617,7	1132,0	42,4	1422,7
200	85	11102,7	7668,8	633,1	1324,9	46,5	1522,4
220	92	12006,3	8316,8	641,8	1489,8	49,6	1607,7
240	99	12883,4	8943,8	648,7	1660,8	52,6	1682,7

массового числа, а именно для $A=16$, $A=80$ и $A=200$; соответствующие кривые энергии представлены на рис. 4, 5 и 6. Как видно из сравнения этих рисунков, кривая энергии для тяжёлых изобаров имеет значительно более пологий вид, чем для лёгких. Минимум энергии для изобара $A=16$ лежит при $Z=8$, для изобара $A=80$ при $Z=37$ и для изобара $A=200$ при $Z=86$. То, что последнее значение Z отклоняется примерно на 1% от значения Z , вычисленного из формулы (199) (см. табл. I), является следствием использования при выводе формулы (199) разложения (198) выражения энергии (196), в то время как в основу проведённых здесь вычислений было положено общее выражение энергии (196).

Мы перейдём теперь к обсуждению плотности распределения нуклеонов в ядре. При помощи уравнений (144) и (145), а также (138) — (140) можно представить плотность распределения всех нуклеонов (нейтронов + протонов) следующим образом:

$$\rho = \rho_n + \rho_p = \rho_0 e^{-3x^2} = \rho_0 e^{-a^2(r/r_0)^2}, \quad (201)$$

где

$$\rho_0 = \frac{c_n^3 + c_p^3}{24\pi^2 r_0^3} = \frac{c^3}{12\pi^2 r_0^3} \quad (202)$$

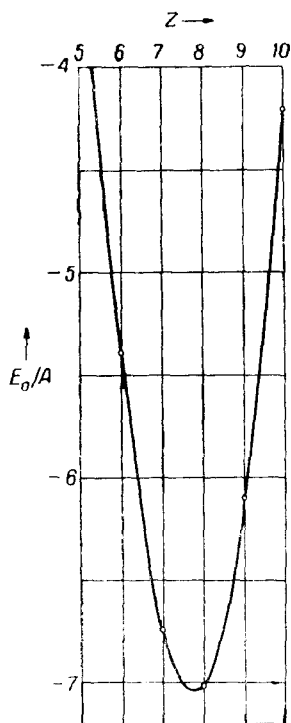


Рис. 4. Приходящаяся на одну частицу средняя энергия E_0/A как функция от Z для изобара $A=16$.

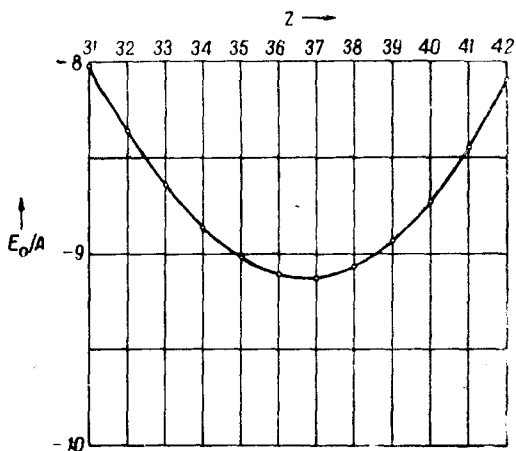


Рис. 5. Приходящаяся на одну частицу средняя энергия E_0/A как функция от Z для изобара $A=80$.

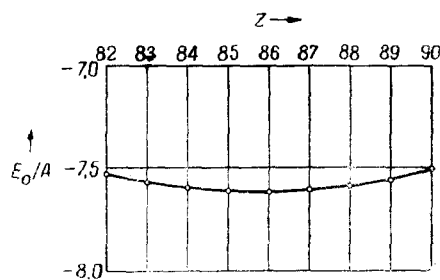


Рис. 6. Приходящаяся на одну частицу средняя энергия E_0/A как функция от Z для изобара $A=200$.

обозначает плотность нуклеонов в центре ядра. Для параметров c и a возьмём соответствующие минимуму энергии значения этих параметров c_0 и a_0 , причём между c_0 и a_0 , согласно (140), имеется зависимость

$$a_0 = \frac{2^{1/3}}{2(9\pi)^{1/6}} \frac{c_0}{A^{1/3}}. \quad (203)$$

Согласно (202) ρ_0 пропорциональна c^3 с универсальным, не зависящим от A фактором пропорциональности.

Значения c_{00} для некоторых наиболее стабильных изобаров приведены в табл. I. Как видно, c_{00} практически не зависит от A при $A > 50$, т. е. для средних и тяжёлых ядер. Для этих ядер c_{00} имеет максимальное относительное уклонение от значения $c_{00} \cong 7,0$ порядка $\pm 2\%$. Вследствие такого поведения c_{00} при $A > 50$ получается, что для этих ядер также и плотность нуклеонов

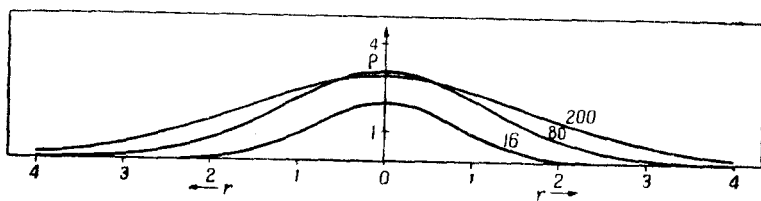


Рис. 7. Нуклеонная плотность ρ как функция от r для ядер $A=16$, $Z=8$; $A=80$, $Z=37$; $A=200$, $Z=83$. Стоящие около кривых числа — массовые числа соответствующих ядер.

в центре ядра, ρ_0 , практически постоянна, имея максимальное относительное уклонение от значения

$$\rho_0 = \frac{7^3}{12\pi^2 r_0^3} = 2,90 \frac{1}{r_0^3} = 1,16 \cdot 10^{39} \text{ см}^{-3} \quad (204)$$

порядка $\pm 6\%$. В области $A > 50$ ρ_0 имеет очень плоский максимум при $A \cong 120$. От $A=50$ до $A=4$ зависимость плотности нуклеонов в центре ядра от массового числа проявляется значительно сильнее, а именно, ρ_0 монотонно спадает в направлении меньших массовых чисел и достигает при $A=4$ примерно половины значения (204). Относительно всего этого см. табл. III, где приведены значения ρ_0 . Для самых лёгких ядер в поведении ρ_0 как функции A наблюдаются скачки, причём значения ρ_0 для чётных A лежат несколько выше, а для нечётных A несколько ниже, чем это соответствовало бы гладкому поведению. Причина этого та же самая, что и в случае упоминавшихся выше скачков средних энергий.

В постоянстве плотности нуклеонов в центре ядра для средних и тяжёлых ядер находит своё выражение известный эмпири-

Таблица III

Ядерные радиусы и плотности нуклеонов в центре ядра. R в единицах r_0 ,
 ρ_0 в единицах $1/r_0^3$

A	Теоретические				Эмпириче- ское R
	Z	ρ_0	R , вычис- ленное из (208)	R , вычис- ленное из (210)	
4	2	1,44	1,79	1,34	1,67
5	2	1,22	2,04	1,59	1,80
6	3	1,45	2,04	1,65	1,91
8	4	1,55	2,20	1,87	2,10
10	5	1,66	2,32	2,03	2,26
12	6	1,77	2,41	2,16	2,40
16	8	1,96	2,56	2,39	2,65
20	10	2,13	2,69	2,56	2,85
40	19	2,66	3,14	3,26	3,59
60	29	2,91	3,49	3,74	4,11
80	37	3,04	3,79	4,17	4,52
100	45	3,07	4,07	4,55	4,87
120	54	3,10	4,31	4,88	5,18
140	62	3,07	4,55	5,21	5,45
160	70	3,03	4,78	5,54	5,70
180	77	2,95	5,01	5,85	5,93
200	85	2,90	5,22	6,13	6,14
220	92	2,82	5,44	6,46	6,34
240	99	2,75	5,65	6,76	6,53

ческий закон, согласно которому для таких ядер плотность нуклеонов внутри ядра не зависит от массового числа.

После констатации указанных фактов мы займёмся теперь рассмотрением поведения плотности нуклеонов в различных ядрах и в связи с этим вычислением ядерных радиусов. Плотность ρ как функция от r представлена на рис. 7 для случаев лёгкого, среднего и тяжёлого ядер, а именно, для ядер с массовыми числами 16, 80 и 200.

Кроме плотности ρ имеет значение также и радиальная плотность распределения

$$D = 4\pi r^2 \rho, \quad (205)$$

которую мы представили на рис. 8 также для ядер с массовыми числами 16, 80 и 200. В то время как ρ представляет собой число нуклеонов в единице объёма, Ddr даёт число нуклеонов, находящихся между поверхностями сфер, с радиусами r и $r + dr$.

После того как мы ознакомились с поведением плотности и радиальным распределением нуклеонов в лёгких, средних и тяжёлых ядрах, мы будем теперь говорить об ядерных радиусах, определение которых далеко не так просто, как это предполагается в некоторых работах.

В случае постоянной ядерной плотности обычно определяют в качестве радиуса ядра такой радиус, до которого простирается постоянная ядерная плотность. Согласно (133) этот радиус оказывается пропорциональным $A^{1/3}$. Таким образом, в этом случае радиус ядра совпадает с радиусом однородно заполненной нуклеонами сферы. Если исходить из этого определения, то можно было бы принять в общем случае в качестве радиуса ядра такое

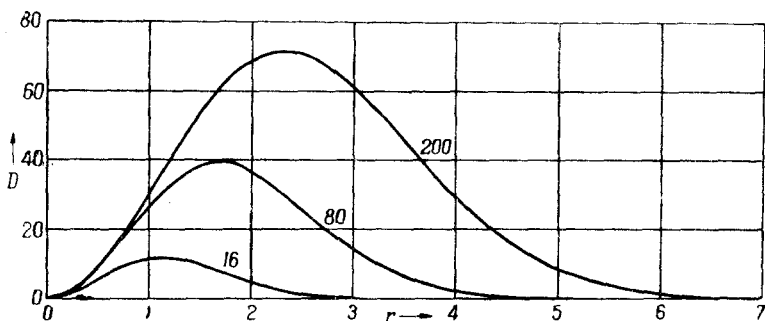


Рис. 8. Радиальная нуклеонная плотность D как функция от r для ядер $A=16$, $Z=8$; $A=80$, $Z=37$; $A=200$, $Z=85$. Числа, стоящие около кривых, показывают массовые числа соответствующих ядер.

значение r , для которого при приближении к ядру плотность начинает становиться заметной по величине. Однако теперь, когда плотность нуклеонов (в противоположность упомянутому выше случаю постоянной плотности) не является постоянной, а спадает непрерывным образом до нуля, для определения радиуса ядра имеется уже несколько возможностей, из которых мы обсудим две представляющиеся нам наиболее обоснованными.

Первая возможность состоит в предположении, что ядерный радиус R пропорционален среднему статистическому значению r . Для среднего статистического значения r получается, с учетом (201), (202) и (140),

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{1}{A} \int r \rho \, dv = \frac{4\pi}{A} \int_0^\infty r^3 \, dr = \frac{4\pi \rho_0}{A} \int_0^\infty r^3 e^{-a^2 r^2 / r_0^2} \, dr = \\ &= 4 \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{c_0} A^{1/3} r_0. \end{aligned} \quad (206)$$

Если ограничиться средними и тяжёлыми наиболее стабильными ядрами, то можно для c_0 подставить здесь значение $c_{00} = 7$, причем

совершаемая ошибка не превышает 2%, и получить

$$\bar{r} = 0,447 A^{1/3} r_0. \quad (207)$$

Для $A = 80$ и $A = 200$ отсюда получается $\bar{r} = 1,92 r_0$ и соответственно $\bar{r} = 2,61 r_0$. Как видно из рис. 7, при этих расстояниях радиальные нуклеонные плотности далеко ещё не исчезают, а имеют значительную величину, поэтому $\bar{r}$ не может быть принятым за радиус ядра. Однако из рис. 7 легко убедиться, что длину, примерно вдвое большую чем $\bar{r}$, с большим успехом можно было бы принять в качестве радиуса ядра. Тогда имели бы

$$R = 2\bar{r} = 8 \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{1/3} \frac{1}{c_0} A^{1/3} r_0, \quad (208)$$

откуда для средних и тяжёлых ядер при $c_0 = c_{00} = 7,0$ следует выражение

$$R = 0,894 A^{1/3} r_0. \quad (209)$$

За исключением лёгких ядер, таким образом, ядерные радиусы получились бы пропорциональными $A^{1/3}$. Для лёгких ядер, однако, эта пропорциональность не имеет места, так как для них величина c_{00} не может считаться постоянной; об этом свидетельствуют, в частности, представленные во втором столбце табл. III значения R , которые вычислены из (208) при помощи указанных в табл. I значений c_{00} .

Другая возможность дать определение радиуса ядра в вышеупомянутом смысле состоит в том, что в качестве него принимается радиус такого шара, вне которого находится одинаковое для всех ядер количество нуклеонов η (порядка одного нуклеона). Таким образом R определяется при помощи уравнения

$$\int_R^\infty D dr = \eta. \quad (210)$$

Величина R , ввиду крутого падения D для больших r , не очень чувствительна к изменению η . Например, для указанного в табл. I ядра $A = 120$, $Z = 54$ ($c_{00} = 7,157$) при $\eta = 1$ получается значение $R = 4,63 r_0$, а при $\eta = \frac{1}{2}$ получается значение $R = 4,88 r_0$.

Мы положили $\eta = \frac{1}{2}$ и получили тогда результаты, приведённые в третьем столбце табл. III, причём для Z и c_{00} были использованы значения, указанные в четвёртом и соответственно пятом столбце табл. I.

При сравнении полученных таким путём ядерных радиусов с эмпирическими мы наталкиваемся на трудность, которая имеется

не только здесь, но и везде, где в качестве радиуса ядра сходным образом принимается такое значение r , для которого при приближении к ядру плотность нуклеонов начинает становиться заметной. Трудность состоит в том, что эмпирические ядерные радиусы получены из опытов по рассеянию α -частиц и нейтронов, а также из данных по α -распаду, причём в качестве радиуса ядра рассматривалось такое значение r , при котором становились незаметными действующие между двумя нуклеонами кулоновские силы. Такое определение согласуется, конечно, по порядку величины с вышеприведённым теоретическим определением, ввиду очень малой области действия ядерных сил, однако точного совпадения нельзя ожидать. Всё же можно надеяться, что теоретические ядерные радиусы покажут такую же зависимость от A , что и эмпирические. Чтобы прийти к ядерным радиусам, определённым таким же образом, что и эмпирические, пришлось бы вычислить способность рассеяния относительно α -частиц, протонов или нейтронов шара, наполненного нуклеонным газом с определённым распределением плотности. Такое вычисление предполагается провести в последующей работе.

Здесь мы удовлетворимся сравнением вычисленных выше ядерных радиусов с эмпирическими, которые могут быть представлены при помощи формулы

$$R = 1,42 A^{1/3} 10^{-13} \text{ см} = 1,05 A^{1/3} r_0, \quad (211)$$

свидетельствующей о пропорциональности эмпирических ядерных радиусов величине $A^{1/3}$. Полученные из этой формулы ядерные радиусы для некоторых значений A помещены в шестом столбце табл. III. Как можно видеть, полученные выше теоретические значения хорошо согласуются с экспериментальными. С учётом сказанного выше представляется важным не столько хорошее численное совпадение, сколько то обстоятельство, что теоретические ядерные радиусы показывают практически ту же зависимость от A , что и эмпирические. В этом отношении особенно удовлетворительно ведут себя ядерные радиусы, вычисленные при помощи формулы (210) и помещённые в пятом столбце табл. III. Это тем более удовлетворительно, что лежащее в основе формулы (210) определение ядерных радиусов, вследствие ее сравнительно незначительной зависимости от η , физически представляется весьма вероятным.

§ 11. Сравнение с результатами волномеханического расчёта дейтерона

Представляет также интерес сравнить полученный выше параметр λ с соответствующим параметром, получающимся на основе волновой механики для какого-нибудь совсем лёгкого ядра, например для дейтерона. Для этого мы вычислим при предположении

(47) шредингеровскую энергию дейтерона. Получается

$$E = 4\pi \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M r_0} \int_0^\infty P'^2 dr + 4\pi \int_0^\infty J(r) P^2 dr, \quad (212)$$

где $M_r = \frac{1}{2} M$; P — умноженная на r собственная функция, нормированная на единицу; P' — производная от P по r .

Мы определим также и здесь E и параметр λ при помощи метода Ритца, для чего сделаем предположение

$$P = \left(\frac{a}{2r_0} \right)^{3/2} \frac{1}{\pi^{1/2}} r e^{-a \frac{r}{2r_0}}, \quad (213)$$

где a обозначает вариационный параметр.

Учитывая (213), а также (47), (19), (114) и (102), можно представить энергию в следующем виде:

$$E = 2\chi_f \frac{1}{r_0^2} a^2 - \frac{\gamma}{2r_0} \frac{a^3}{(1+a)^2} = \left[2\mu_K a^2 - \frac{\lambda}{2} \frac{a^3}{(1+a)^2} \right] \varepsilon_0. \quad (214)$$

Теперь следует найти такое значение a , для которого E имеет минимум, и определить свободный параметр так, чтобы этот минимум совпал с экспериментальным значением энергии связи дейтерона $E_0 = -2,19$ Мэв. Получается

$$a = 167 \text{ и } \lambda = 3,228. \quad (215)$$

Это значение λ примерно лишь на 3% меньше, чем то, которое мы получили в § 8 для статистической модели ядра с постоянной плотностью. По сравнению со значением λ (200), полученным при помощи точного выражения для энергии, различие больше, однако даже и в этом случае оно составляет лишь около 22%. Это различие уменьшится в следующем приближении статистической модели, когда плотности нейтронов и протонов варьируются независимо друг от друга и учитывается корреляция нуклонов (ср. § 10), так как при этом возникает добавочное притяжение, приводящее к уменьшению полученного в § 10 значения λ .

§ 12. Обсуждение результатов и дальнейших возможностей

Результаты для энергии и радиусов ядер, полученные при помощи развитого здесь первого приближения вариационного метода, можно считать весьма удовлетворительными, особенно если учесть, что был использован только один эмпирический параметр и нигде не делалось никаких произвольных предположений. Достоин внимания также и то обстоятельство, что значения эмпирического параметра λ в случае статистической модели и в случае волномеханической модели дейтерона мало отличаются друг от

друга, причём это различие становится ещё меньше в следующих приближениях.

Возникает вопрос, в чём состоят эти следующие приближения и что можно от них ожидать? Следующим шагом было бы независимое друг от друга варьирование нейтронной и протонной плотностей, благодаря чему возникает некоторое уменьшение кулоновской энергии отталкивания. Это уменьшение энергии становится заметным главным образом для тяжёлых ядер, для которых кулоновская энергия относительно велика. Таким образом, в этом втором приближении можно ожидать небольшого уменьшения энергии, растущего по величине с увеличением A . При этом подъём кривой энергии от средних к тяжёлым ядрам несколько уменьшится. Если полученную таким образом кривую энергии сдвинуть в направлении роста энергии, что может быть достигнуто за счёт некоторого уменьшения параметра λ , то новая кривая энергии будет ещё лучше аппроксимировать эмпирические значения.

Дальнейшее улучшение поведения плотности в высших приближениях вариационного метода достигается при помощи уточнения вариационного предположения (136), причём в выражении (135) должны учитываться следующие члены суммы, и, следовательно, функция плотности будет обладать лучшими возможностями для аппроксимации истинной функции.

Несколько иное уточнение приведённых в настоящей работе предположений состоит во введении поправки к энергии притяжения путём дополнения её энергией, возникающей из-за корреляции нуклонов¹⁵ (ср. также¹³); это приводит к появлению некоторого добавочного притяжения.

Можно было бы улучшить также и выражение для кинетической энергии путём подразделения нуклонов по побочному квантовому числу^{*)}.

Далее, можно попытаться представить себе, что часть нуклонов находится в ядре в виде готовых α -частиц, и определить процент этих нуклонов опять из принципа минимальности.

Наконец, следует ещё упомянуть, что согласно Гайзенбергу¹⁴ необходимо предположить, что ядерные силы, весьма вероятно, обусловлены не одним единственным сортом частиц, но целым спектром тяжёлых частиц (мезонов) различных масс и свойств. Из этих частиц π -мезоны выделяются лишь тем, что они являются самыми лёгкими, а, следовательно, обусловленные ими силы обладают наибольшим радиусом действия. Отсюда следует, что предположение (47) справедливо лишь для не слишком малых расстояний между частицами. Учёт теорией этих дополнительных сил с очень малыми радиусами действия может быть осуществлён

*) Это можно сделать таким же образом, как в случае атомов. См. по поводу этого¹³ и далее¹⁶.

только тогда, когда свойства этих сил будут подробнее исследованы.

Относительно тех высших приближений или уточнений теории, которые могут быть проведены без дальнейших дискуссий, предполагается говорить в последующих работах.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление интегралов $L(q)$, $K(q)$, $H(q)$ и $M(q)$

Интегралы $L(q)$, $K(q)$, $H(q)$ и $M(q)$ определены при помощи (160) — (163). Для $q > 1$ они не могут быть вычислены аналитически. Мы определили значения интегралов $L(q)$, $K(q)$ и $M(q)$ численным методом с точностью до четырёх знаков для 18 различных значений q ($q > 1$) и интеграла $H(q)$ для 8 различных значений q ($q > 1$). Значения интегралов, так же как и вычисленной при помощи них функции $F(q)$, представлены в табл. IV. Приведённые в § 10 результаты мы получили при помощи этих значений интегралов.

Таблица IV

Значения интегралов $L(q)$, $K(q)$, $H(q)$ и $M(q)$, а также значения функции $F(q)$, найденные численным способом с точностью до 4-х знаков.

q	$L(q)$	$K(q)$	$H(q)$	$M(q)$	$F(q)$
1,3355	0,2228	0,07044	0,03619	0,05908	0,02530
1,8951	0,3889	0,1149	0,05735	0,07302	0,06126
2,8427	0,6930	0,1857	0,08901	0,08818	0,1526
3,6000	0,9392	0,2357	0,1111*	0,09602	0,2464
4,0998	1,099	0,2656	0,1227	0,09991	0,3164
4,7378	1,300	0,3006	0,1369	0,1039	0,4131
5,4000	1,503	0,3336	0,1510*	0,1071	0,5205
6,0000	1,682	0,3611	0,1619*	0,1096	0,6229
6,6329	1,865	0,3879	0,1714	0,1117	0,7349
7,1000	1,997	0,4064	0,1794*	0,1130	0,8203
7,5000	2,107	0,4215	0,1852*	0,1141	0,8945
7,7500	2,176	0,4306	0,1888*	0,1147	0,9416
8,0000	2,242	0,4394	0,1921*	0,1152	0,9891
8,2500	2,310	0,4481	0,1954*	0,1158	1,037
8,5280	2,384	0,4574	0,1990*	0,1163	1,091
9,0000	2,505	0,4727	0,2048*	0,1172	1,183
9,3636	2,601	0,4840	0,2079	0,1178	1,255
11,9173	3,216	0,5540	0,2340	0,1211	1,774

Звёздочкой отмечены те значения $H(q)$, которые вычислены при помощи приближённой формулы (222); эти приближённые значения примерно на 0,7% больше точных

Для интегралов $K(q)$, $H(q)$ и $M(q)$ можно вывести приближённые формулы, которые хорошо аппроксимируют точные интегралы в важнейшем для вычислений интервале q ($5 < q < 8$). Если ограничиться этим интервалом, то подинтегральные выражения во всех трёх интегралах будут являться произведением некоторой функции, имеющей узкий и крутой максимум типа $f(x) = x^2 e^{-nx^2}$ ($n = 2, 3, 4$) и обращающейся практически в нуль везде, за исключением окрестности этого максимума, а также функции $\ln(1 + q^2 e^{-2x^2})$ или $\operatorname{arctg}(1 + qe^{-x^2})$, которая в окрестности максимума $f(x)$ сравнительно медленно изменяется и для которой мы введём сокращённое обозначение $g(x)$. Согласно теореме интегрального

исчисления о среднем значении можно в интеграле $\int_0^{\infty} f(x) g(x) dx$

заменить одну из функций, например медленно изменяющуюся функцию $g(x)$, на соответственным образом выбранное постоянное значение. Ввиду описанного выше поведения функции $f(x)$ для интеграла получится хорошее приближённое значение, если для постоянного значения функции $g(x)$ выбрать такую величину, которую принимает функция $g(x)$ в точке x_m крутого максимума $f(x)$. Таким образом получается

$$\int_0^{\infty} f(x) g(x) dx = g(x_m) \int_0^{\infty} f(x) dx = g(x_m) \frac{\pi^{1/2}}{4n^{3/2}}, \quad (216)$$

$$x_m = \frac{1}{n^{1/2}}. \quad (217)$$

Точность этого приближения для наших целей ещё не достаточна. Однако мы тотчас получим приближённую формулу, обладающую достаточной точностью, если в формуле (216) заменим $g(x_m)$ на $\frac{1}{2} [g(x_1) + g(x_2)]$, где x_1 и x_2 — те значения x , при которых $f(x)$ равна половине величины в максимуме, т. е. равна $\frac{1}{2} f(x_m)$. Тогда имеем:

$$\int_0^{\infty} f(x) g(x) dx = \frac{1}{2} [g(x_1) + g(x_2)] \frac{\pi^{1/2}}{4n^{3/2}}, \quad (218)$$

где x_1 и x_2 обозначают оба корня трансцендентного уравнения

$$f(x) = x^2 e^{-n^2 x^2} = \frac{1}{2} f(x_m) = \frac{1}{2n} e^{-1}, \quad (219)$$

откуда следует

$$x_1 = \left(\frac{0,2320}{n} \right)^{1/2}, \quad x_2 = \left(\frac{2,678}{n} \right)^{1/2}. \quad (220)$$

Если в (216) для $f(x)$ и $g(x)$ подставить исходные функции, то для $K(q)$, $H(q)$ и $M(q)$ получаются следующие очень хорошие приближённые формулы:

$$K(q) = \int_0^{\infty} x^3 e^{-2x^2} \ln(1 + q^2 e^{-2x^2}) dx = \\ = \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \left[\ln(1 + q^2 e^{-2x_1^2}) + \ln(1 + q^2 e^{-2x_2^2}) \right], \quad (221)$$

где

$$x_1 = \left(\frac{0,2320}{2} \right)^{1/2}, \quad x_2 = \left(\frac{2,678}{2} \right)^{1/2};$$

$$H(q) = \int_0^{\infty} x^3 e^{-4x^2} \ln(1 + q^2 e^{-2x^2}) dx = \\ = \frac{\pi^{1/2}}{64} \left[\ln(1 + q^2 e^{-2x_1^2}) + \ln(1 + q^2 e^{-2x_2^2}) \right], \quad (222)$$

где

$$x_1 = \left(\frac{0,2320}{4} \right)^{1/2}, \quad x_2 = \left(\frac{2,678}{4} \right)^{1/2};$$

$$M(q) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-3x^2} \operatorname{arctg}(1 + q e^{-x^2}) dx = \\ = \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{1/2} \left[\operatorname{arctg}(1 + q e^{-x_1^2}) + \operatorname{arctg}(1 + q e^{-x_2^2}) \right], \quad (223)$$

где

$$x_1 = \left(\frac{0,2320}{3} \right)^{1/2}, \quad x_2 = \left(\frac{2,678}{3} \right)^{1/2}.$$

Приближённая формула для $K(q)$ даёт максимальное отклонение от точного значения в интервале $5,4 < q < 10$ меньше 0,6% и в интервале $4 < q < 5,4$ меньше 1,2%. Приближённая формула для $H(q)$ даёт максимальную ошибку в интервале $4 < q < 10$ меньше 0,7%. Наилучшая аппроксимация достигается приближённой формулой для $M(q)$, дающей максимальную ошибку в интервале $1,5 < q < 10$ меньше 0,4%.

Так как интеграл $H(q)$ входит в выражение для энергии ядра только в члене, имеющем подчинённое значение, можно для $H(q)$ вместо точного значения использовать приближённую формулу (222). Некоторые значения, вычисленные при помощи этой приближённой формулы, приведены в табл. IV.

Для интеграла $L(q)$, конечно, нельзя применить выведенное здесь приближение, так как в подынтегральном выражении в этом

случае отсутствует фактор $e^{-\lambda x^2}$, который обеспечивает существенное для нашего приближения быстрое исчезновение $f(x)$ при росте x . Так как $L(q)$ в указанном интервале q изменяется приблизительно линейно, то можно хорошо аппроксимировать $L(q)$ в этом интервале простой формулой, коэффициенты которой определяются при помощи метода наименьших квадратов. Находим, что в интервале $1,5 < q < 10$ приближенная формула

$$L(q) = -0,0051755q^3 + 0,35220q - 0,24814 \quad (224)$$

представляет точный интеграл с ошибкой меньше 1%. Так как этот интеграл при вычислении $F(q)$ по сравнению с другими членами в $F(q)$ имеет подчиненное значение, то эта точность оказывается совершенно достаточной.

Мы привели здесь приближенные формулы для $K(q)$, $H(q)$, $M(q)$ и $L(q)$, с одной стороны, из-за их простоты, а с другой стороны, по той причине, чтобы показать, что все вычисления при помощи вариационного метода могут быть проведены с незначительной затратой труда, что существенно для дальнейшего развития этого метода.

Численные вычисления были проведены моими ассистентами О. Кунвари, Е. Магори, Б. Мольнар, Е. Сабо; рисунки выполнены ассистентами Г. Киапеке и Л. Зеленка. Я хотел бы также и здесь выразить всем им свою благодарность за их труд.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. E. Majorana, Zeits. f. Phys., **82**, 137 (1933).
2. W. Heisenberg, Rapport du VII-ième Congrès Solvay, Paris, 1934.
3. C. F. v. Weizsäcker, Zeits. f. Phys., **96**, 431 (1935).
4. C. F. v. Weizsäcker, Zeits. f. Phys., **95**, 431 (1935).
5. G. C. Wick, Nuovo Cimento Nr. 4 (1934); Rend. Accad. Lincei, **19**, 319 (1934); **21**, 170 (1935).
6. K. Nakabayasi, Zeits. f. Phys., **97**, 211 (1935).
7. S. Flügge, Zeits. f. Phys., **96**, 459 (1935).
8. F. S. Wang, Zeits. f. Phys., **100**, 736 (1936).
9. H. A. Bethe und R. F. Bacher, Rev. Mod. Phys., **8**, 82 (1936).
10. C. F. v. Weizsäcker, Die Atomkerne, Physik und Chemie und ihre Anwendungen in Einzeldarstellungen, т. II, Akad. Verlagsges. Leipzig, 1937.
11. L. Rosenfeld, Nuclear forces, Monographs on Theoretic and Applied Physics, т. I. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1948.
12. П. Гомбаш, Статистическая теория атома и её применения. ИЛ, 1951.
13. П. Гомбаш, Проблема многих частиц в квантовой механике. ИЛ, 1952.
14. W. Heisenberg, Theorie des Atomkerns, Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen, 1951.
15. E. Wigner, Phys. Rev. (2) **46**, 1002 (1934), Trans. Faraday Soc. **34**, 678 (1938).
16. P. Gombás, Acta Phys. Hung. **1**, № 3 (1952).