

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ
СВЕРХПРОВОДИМОСТИ****В. Л. Гинзбург****II. МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ *)**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	26
2. Гипотеза спонтанных токов	31
3. Диамагнитная гипотеза	38
а) Исходные соображения	38
б) Сверхпроводимость идеальных заряженных бозе и ферми газов, находящихся в сосуде	47
в) Роль колебаний решётки и высокой диэлектрической по- стоянной. Некоторые критические замечания	55
4. Квазимикроскопический подход к теории сверхпроводимости . .	62
а) Спектр «элементарных возбуждений» и теория сверхтекуче- сти гелия II	62
б) Спектр возбуждений электронной жидкости в металле и сверхпроводимость	74
5. Заключение	89
Дополнение. Дальнейшее развитие макроскопической теории сверх- проводимости	90
а) Поведение тонких сверхпроводящих плёнок, цилиндров и шариков в магнитном поле	91
б) Поверхностная энергия и некоторые другие вопросы	101
Цитированная литература	113

*) Первая часть статьи, посвящённая макроскопической теории сверхпроводимости, опубликована в УФН 42, 169, 333 (1950). Ниже эта первая часть цитируется, как I, а ссылки на соответствующие формулы даются с прибавлением цифры I; например (I; 5,1) означает формулу (5,1) из I.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сколько-нибудь развитой микроскопической теории сверхпроводимости ещё не существует, и в этом направлении можно указать лишь на ряд гипотез, замечаний и попыток как-то объяснить механизм сверхпроводимости. Несмотря на подобное состояние вопроса и, в известной мере, именно учитывая существующую ситуацию, на наш взгляд представляется целесообразным рассмотреть состояние микроскопической теории сверхпроводимости и, в частности, выяснить истинную ценность ряда последних работ в этой области.

Остановимся раньше всего на задачах, стоящих перед микроскопической теорией сверхпроводимости.

1. Необходимо указать с точки зрения электронного механизма, в силу каких причин и при каких условиях металл является сверхпроводящим, т. е. в нём может течь не связанный с выделением тепла сверхпроводящий ток $\mathbf{j}_s$. При этом в слабых магнитных полях (т. е. при условии $H \ll H_k$, где H_k — критическое поле) плотность тока $\mathbf{j}_s$ удовлетворяет уравнениям:

$$\text{rot } \Lambda \mathbf{j}_s = -\frac{1}{c} \mathbf{H}, \quad (1,1)$$

$$\frac{\partial \Lambda \mathbf{j}_s}{\partial t} = \mathbf{E}, \quad (1,2)$$

где $\Lambda = \frac{m}{e^2 n_s}$ и n_s — концентрация сверхпроводящих электронов (подробнее см. I). Теория должна приводить к этим уравнениям.

Рассмотрение сильных полей, необходимое для понимания характера разрушения сверхпроводимости в магнитном поле и ряда других вопросов, для изучения сверхпроводимости в целом очень важно. Но с точки зрения микроскопической теории вопрос о сильных полях естественно отодвинуть на второй план и стремиться прежде всего понять механизм явления в более простом случае слабых полей.

2. Вместе с тем в теории металлов, объясняющей явление сверхпроводимости, должен найти своё отражение тот факт, что в достаточно сильном магнитном поле любой сверхпроводник находится в нормальном (несверхпроводящем) состоянии, свойства которого не отличаются от свойств несверхпроводящих металлов.

3. Должны быть поняты специфические тепловые свойства сверхпроводников, т. е. получена отвечающая опыту температурная зависимость свободной энергии, а, следовательно, также энтропии и теплоёмкости в сверхпроводящем состоянии (в первом приближении теплоёмкость изменяется по закону $c_s \sim T^3$; при отсутствии магнитного поля переход из сверхпроводящего состояния в нормальное является переходом 2-го рода).

4. Из теории должна следовать характерная температурная зависимость нормальной проводимости и теплопроводности в сверхпроводящем состоянии (см. I). При этом нужно понять, какова микроскопическая картина перехода из сверхпроводящего состояния в нормальное с точки зрения особенностей теплового движения в металле. Сюда же относится вопрос о диэлектрической постоянной в сверхпроводящем состоянии, которая, повидимому, достигает огромных значений $\epsilon_0 \sim 10^8 + 10^{10}$ (см. I; 6,19) и ниже).

5. После открытия изотопического эффекта стала совершенно ясна невозможность построить микроскопическую теорию сверхпроводимости без учёта взаимодействия электронов проводимости с колебаниями кристаллической решётки. Учёт этого взаимодействия должен приводить к вытекающей из опыта зависимости $M^{1/2}T_K = \text{const}$, где M — масса ядра и T_K — критическая температура и, разумеется, введённая выше постоянная различна для различных сверхпроводящих металлов.

6. Не останавливаясь на некоторых моментах, которые представляются сейчас второстепенными (вопрос о термоэлектрических свойствах сверхпроводников, влияние давления и так далее), подчеркнём, что одной из основных задач теории сверхпроводимости является выяснение причин, в силу которых одни металлы являются сверхпроводящими, а другие (такие, как Au, Ag, Cu, Pt и др.) заведомо не сверхпроводят до самых низких достигнутых температур и, как имеются основания полагать, остаются несверхпроводниками и до самого абсолютного нуля.

Трудности построения микроскопической теории сверхпроводимости связаны в большей мере с тем, что в этом случае нельзя исходить из модели металла, в которой электроны считаются невзаимодействующими (подробнее об этом будет речь в разделах 3, 4). Между тем, все успехи электронной теории металлов, по крайней мере при учёте проводимости, до настоящего времени были связаны именно с подобной «газовой» или одноэлектронной моделью — моделью, в которой взаимодействие между электронами или совсем не учитывается или учитывается самым суммарным образом^{*)}. Таким образом, развитие микроскопической теории сверхпроводимости неизбежно связано с расширением и обобщением используемой модели металла, с более детальным и полным, чем это делалось до сих пор, учётом междуэлектронного взаимодействия и взаимодействия электронов с решёткой.

^{*)} В модели, о которой идёт речь, электроны предполагаются движущимися в некотором периодическом поле, и корреляция между движением различных электронов игнорируется. Учёт же суммарного междуэлектронного взаимодействия сводится лишь к утверждению, что упомянутое, точно неизвестное периодическое поле обусловлено не только ионами, но и всеми электронами.

Эта задача очень сложна, но в то же время её исследование важно отнюдь не только с точки зрения теории сверхпроводимости. Дело в том, что широко используемая «газовая» модель теоретически ещё в должной мере не обоснована. Электроны в металле фактически образуют скорее «электронную жидкость», а не газ, так как взаимодействие между ними является сильным и в то же время по порядку величины таким же, как их взаимодействие с решёткой. И если такая «жидкость» ведёт себя в ряде отношений как газ, то это связано с тем, что электроны подчиняются статистике Ферми. В вырожденном ферми-газе при температуре T , как известно, активную роль играют лишь частицы, энергия которых отличается от граничной энергии для полностью вырожденного газа E_0 на величину порядка kT ; если полная концентрация электронов есть n , то «активными» из них являются лишь электроны с концентрацией

$$\Delta n \sim n \frac{kT}{E_0} = n \frac{T}{T_0},$$

где $T_0 = \frac{E_0}{k}$ — температура вырождения, равная $10^4 \div 10^5$ градусов. Только эти периферические, расположенные вблизи фермиевской поверхности электроны вносят вклад в теплоёмкость газа и могут менять свою энергию при столкновении друг с другом или с другими частицами (например, фононами решётки). Все же остальные электроны, лежащие достаточно далеко от граничной поверхности, не могут, очевидно, передавать или получать энергию порядка kT . Поэтому, в частности, сильное кулоновское взаимодействие между периферическими (активными) электронами и всеми остальными электронами не может обычно полностью проявиться, и эффективным, вообще говоря, оказывается только относительно слабое взаимодействие между самими периферическими электронами. В силу сказанного, поведение вырожденного электронного газа оказывается подобным поведению электронной жидкости, в которой «элементарные возбуждения» обладают энергетическим спектром, подобным спектру периферических электронов в идеальном ферми-газе *). Успех газовой модели электронов в металле как раз и свидетельствует о том, что подобная близость спектра возбуждений электронной жидкости в металлах со спектром периферических (т. е. близких к граничной энергии) электронов в идеальном ферми-газе фактически имеет место. Однако это обстоятельство ещё недостаточно теоретически осмысленно и, главное, остаётся неясным, в каких условиях и по каким причинам указанная близость спектров жидкости и газа нарушается. На

*) Подробнее об этом см. ¹ §§ 66 — 69, а также ^{2, 3}. Кроме того, к этому вопросу мы ещё вернёмся ниже, в разделе 4.

тот же факт, что родство спектров электронной жидкости и газа действительно не является полным, указывает существование сверхпроводимости, которая не может быть понята с точки зрения газового спектра (см. раздел 4).

Помимо сверхпроводимости с точки зрения газовой модели непонятно также резкое возрастание сопротивления, наблюдающееся у несверхпроводящих металлов при достаточном понижении температуры (обычно, при $T < 1^\circ \text{K}$; см.² § 23 и ⁴). Необходимость дальнейшего развития теории металлов в направлении более полного учёта взаимодействия между электронами и электронами с решёткой диктуется также задачами, возникающими при рассмотрении ряда других вопросов (см., например, ⁵). Заметим также, что достижения газовой модели электронов в металлах часто переоцениваются. Во многих случаях правильные выводы, следующие из этой модели (такие, например, как формула для термоионной эмиссии, закон Ома, термоэлектрические соотношения Томсона и т. п.), свидетельствуют лишь о том, что её свойства не противоречат принципам термодинамики или ряду других весьма общих условий и требований. К подлинным же достижениям данной конкретной теории металлов относятся, по существу, только такие моменты, как установление температурной зависимости электропроводности (из газовой модели следует, что $\sigma \propto \frac{1}{T}$ при высоких температурах и $\sigma \propto \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}$ при низких температурах) и некоторых других кинетических коэффициентов, оценка этих коэффициентов по порядку величины, а также учёт влияния на них внешнего магнитного поля.

Принято считать, что для одновалентных металлов, например для золота, в вопросе об электропроводности согласие теории с опытом при $T > 1^\circ$ является хорошим (см., например ^{6, 7}). Однако даже в этом, лучше всего изученном случае имеется известная неясность (см. ⁸). Что же касается электропроводности многовалентных металлов и, в особенности, теплопроводности, термоэлектрических и гальвано-магнитных эффектов в металлах, то здесь вопрос о согласии существующей теории с опытом при низких температурах представляется в большой мере открытым. При этом в ряде случаев дело не только в недостаточной надёжности и точности экспериментальных данных, но и в отсутствии строгих и ясных теоретических выводов даже при использовании газовой модели (особенно существенен в этом отношении вопрос о роли «процессов переброса» и связанные с ним сомнения в корректности существующей теории проводимости при низких температурах; см. ^{6, 7}). В этой области остро необходим, к сожалению, до сих пор отсутствующий, современный критический обзор всех имеющихся теоретических и экспериментальных данных. Нам не

кажется исключённым, что подобный анализ, а главное дальнейшая теоретическая и экспериментальная работа и, в частности, проведение некоторых ещё не выполненных опытов (например, выяснение вопроса об области применимости закона Ома; см.² § 23; в этой связи см. так же работу¹²⁰⁾ заставят отказаться от весьма распространённого сейчас мнения, что базирующаяся на газовой модели теория металлов в общем и целом, если не говорить о сверхпроводимости, находится в хорошем согласии с опытом.

Так или иначе, дальнейшее существенное развитие теории металлов необходимо, и явление сверхпроводимости в этом отношении будет служить пробным камнем всякой новой теории, претендующей на сколько-нибудь универсальную значимость.

Известные попытки построения микроскопической теории сверхпроводимости можно, в общем, разбить на три группы. К первой из них относятся теории, исходящие из «гипотезы спонтанных токов» — предположения о том, что в сверхпроводящем состоянии в металле всегда (даже при отсутствии внешнего магнитного поля) текут некоторые спонтанные токи. В разделе 2 мы постараемся показать несостоятельность этого, до сих пор довольно широко распространённого, подхода к объяснению сверхпроводимости. Далее, в разделе 3, обсуждаются попытки построить теорию сверхпроводимости на основе «диамагнитной гипотезы», согласно которой сверхпроводящие токи уподобляются токам, обуславливающим диамагнетизм атомов и молекул, помещённых в магнитное поле. Этому направлению, представляющемуся нам правильным, уделено довольно большое внимание. Здесь же обсуждается вопрос о необходимости учёта взаимодействия электронов с решёткой, что вытекает из величины наблюдающегося на опыте изотопического эффекта. Последняя часть статьи (раздел 4) посвящена квазимикроскопическому подходу к объяснению сверхпроводимости, который родственен подходу, с успехом применённому Ландау в случае сверхтекучести гелия II. Здесь обсуждается вопрос о том, каков должен быть спектр возбуждений электронной жидкости в металле, чтобы наблюдалась сверхпроводимость, которая с известным основанием может рассматриваться как сверхтекучесть заряженной (электронной) жидкости в металле.

К сожалению, и на этом пути, являющемся наиболее гибким, пока ещё не удастся достигнуть такой степени ясности и определённости, как в случае сверхтекучести гелия II.

В кратком заключении сопоставлены выводы, полученные в предыдущих разделах.

В дополнении к статье представилось целесообразным осветить некоторые существенные моменты, относящиеся к первой части статьи (т. е. к I) и выяснившиеся в значительной степени

за те примерно полтора года, которые прошли с того времени, когда эта первая часть была написана.

Характер темы и стремление сделать статью более доступной и удобной для пользования привели к тому, что она написана довольно подробно.

2. ГИПОТЕЗА СПОНТАННЫХ ТОКОВ

Гипотеза спонтанных токов, как уже было упомянуто, состоит в предположении, что в состоянии термодинамического равновесия и при отсутствии внешнего магнитного поля в сверхпроводнике текут некоторые спонтанные токи. Другими словами, допускается, что энергетически низшее состояние *) сверхпроводящего металла есть состояние, в котором средняя плотность тока $\bar{j} \neq 0$, подобно тому как в ферромагнетике ниже точки Кюри спонтанное намагничение $\bar{M} \neq 0$. Из опыта следует, что при отсутствии внешнего магнитного поля полный ток в случае достаточно чистых («идеальных») сверхпроводников всегда отсутствует. Этот факт, если исходить из гипотезы спонтанных токов, можно попытаться объяснить тем, что металл разбивается на отдельные области с $\bar{j} \neq 0$, но расположенные таким образом, что в среднем по значительному объёму $\bar{j} = 0$ (здесь опять-таки используется аналогия с ферромагнетиками, которые при отсутствии внешнего поля разбиваются на отдельные домены, так что в среднем по образцу $\bar{M} = 0$).

Гипотеза спонтанных токов была выдвинута в 1933 г. Блохом и Ландау (см. ⁹ и ^{6a} § 44); в последние годы на ней базировались в своих попытках построить теорию сверхпроводимости Гейзенберг ¹⁰ (обзор работ этого направления ¹¹), Борн и Шенг ¹² и некоторые другие авторы.

Наиболее часто встречающееся возражение против гипотезы спонтанных токов опирается на так называемую теорему Блоха и в значительной мере основано на недоразумении. Теорема Блоха, подробно рассмотренная в ¹³, состоит в утверждении, что состояние системы электронов с неравным нулю током не является энергетически низшим, по крайней мере при учёте только взаимодействия электронов между собой и с потенциальным полем решётки, но при пренебрежении взаимодействием спина электрона с орбитальным магнитным полем. При этом под состоянием с током понимается состояние, в котором отличен от нуля полный ток, т. е. ток через всё сечение сверхпроводника. Другими словами, утверждается, что при отсутствии внешних полей и без учёта магнитного взаимодействия состояние, в котором, например, по

*) Несколько более общее предположение сводится к тому, что состояние с током обладает не наинизшей энергией, а наинизшей свободной энергией. Ниже, для простоты, мы будем говорить об энергии, тем более, что при $T \rightarrow 0$ свободная энергия не отличается от энергии.

прямой проволоке не течёт ток, энергетически ниже состояния с током. Но в таком виде теорема Блоха совершенно тривиальна и вместе с тем не имеет отношения к теории сверхпроводимости. Действительно, в состоянии с полным током (в указанном смысле)

электроны обладают импульсом $\mathbf{p} = \frac{m}{e} \mathbf{j}$ ($\mathbf{j}$ — плотность тока; импульс $\mathbf{p}$ отнесён, очевидно, к единице объёма) и определённой кинетической энергией. Поскольку силы взаимодействия, зависящие от скорости (импульса) электронов относительно решётки, не учитываются, ясно, что возможны состояния, отличающиеся от рассматриваемого только значением импульса $\mathbf{p}$. Из этих состояний наименьшей кинетической, а следовательно, и полной, энергией, очевидно, обладает состояние с равным нулю импульсом. Это утверждение, т. е. как раз теорема Блоха, является, по существу, классическим и его квантово-механическое доказательство¹³ не вносит здесь ничего нового. Вместе с тем, как сказано, в таком виде теорема Блоха не имеет прямого отношения к сверхпроводимости и гипотезе спонтанных токов^{*)}, поскольку в односвязном сверхпроводнике при отсутствии внешнего магнитного поля полный ток всегда равен нулю. Поэтому для опровержения гипотезы спонтанных токов нужно доказать, что наимизшим не может быть никакое состояние с орбитальным током $\mathbf{j} \neq 0$.

Но подобное утверждение заведомо неверно. В качестве примера достаточно указать на то, что у многих атомов основными (т. е. энергетически наимизшими) являются P -, D -, F -... состояния, т. е. состояния с неравным нулю орбитальным моментом количества движения и, следовательно, неравной нулю плотностью электронного тока (например, P -состояние является основным у атомов C , O , F и т. д.)^{**)}). Электронный ток в атоме может ничем по существу не отличаться от тока в области макроскопических размеров и, следовательно, существование в металле спонтанных устойчивых токов в принципе возможно.

Тем не менее, несмотря на то, что гипотеза спонтанных токов, в силу сказанного, не может быть отброшена с самого начала, она встречает многочисленные серьёзные возражения.

При отсутствии внешнего магнитного поля и полного тока спонтанные токи в сверхпроводящем образце должны расположиться

^{*)} Широко распространённое обратное утверждение (см., например, ¹⁴ § 24) является, по нашему мнению, ошибочным.

^{**)} В ¹³ делается тем не менее попытка доказать, что состояние с отличным от нуля моментом количества движения не может быть наимизшим. Ошибочность этого доказательства связана с забвением тождественности электронов и подчинения их принципу Паули. Для нетождественных частиц или частиц, подчиняющихся статистике Бозе-Эйнштейна, состояние без орбитального момента (S -состояние) действительно является наимизшим, но в случае электронов это утверждение неверно (подробнее см. ¹⁵ стр. 250).

таким образом, чтобы образец не имел магнитного момента, и, вообще, с макроскопической точки зрения не нёс никаких токов. Далее, спонтанные токи должны, очевидно, быть замкнутыми, а их размеры лимитируются энергетическими соображениями. Пусть радиус отдельной «нити» спонтанного тока равен r , её длина равна l и плотность спонтанного тока в нити есть j_0 . Считая нить для определённости квазилинейной (т. е. полагая $l \gg r$), находим, что напряжённость магнитного поля, создаваемого нитью на её поверхности, равна $H = \frac{2\pi r^2 j_0}{rc} = \frac{2\pi r j_0}{c}$ и энергия поля, связанного

с нитью $W_m \sim \frac{H^2}{8\pi} \pi r^2 l = \frac{\pi^2 r^4 l j_0^2}{2c^2}$. Если бы между отдельными

нитями тока не существовало поверхностной энергии, то размеры нитей для обеспечения минимума энергии неограниченно уменьшались бы. Принимая, что поверхностное натяжение на границах между нитями равно α , для поверхностной энергии нити получаем значение $W_n = 2\pi r l \alpha$. В единице объёма находится $\frac{1}{\pi r^2 l}$ нитей

тока (предполагается, что везде в металле $j \neq 0$, так же как в ферромагнетике везде $M \neq 0$, если не говорить о поверхностях или слоях, разделяющих отдельные нити тока или домены в ферромагнетиках). Таким образом, плотность энергии, связанной

с наличием спонтанных токов, равна $W = \frac{2\alpha}{r} + \zeta \frac{\pi j_0^2 r^2}{2c^2}$, где ζ — некоторый коэффициент порядка единицы или, точнее, поряд-

ка $\ln \frac{l}{r}$ (положено $W_m = \zeta \frac{\pi^2 r^4 j_0^2}{2c^2}$). Энергия минимальна, если

$$r^3 = \frac{2\alpha c^2}{\zeta \pi j_0^2} \sim \frac{\alpha c^2}{j_0^2}; \quad (2,1)$$

следовательно, размер нитей тока, т. е. тех областей, на которые по предположению разбивается сверхпроводник, в отличие от случая ферромагнетиков, не зависит от размеров образца.

Поскольку выше речь шла лишь о порядке величин, ясно, что все выражения остаются в силе и для нитей с $l \sim r$. Далее, плотность спонтанного тока j_0 может быть связана с критическим магнитным полем для массивного образца $H_{км}$. Действительно, в рамках принятой модели текущий в проводнике при наличии внешнего магнитного поля ток появляется в результате перераспределения и слияния отдельных нитей тока. Поэтому наблюдающаяся на опыте плотность сверхпроводящего тока j_s должна быть во всяком случае не больше плотности спонтанного тока j_0 , подобно тому как намагничение ферромагнитного образца не превосходит величины спонтанного намагничения M_0 (предполагается, что изменение под влиянием внешнего поля плотности тока в пределах

одной нити, так же как изменение намагничивания в пределах домена, достаточно мало; в принятой модели для такого предположения имеются все основания). Но сверхпроводящий ток j_s во всяком случае может достигнуть значения $j_k = \frac{c}{4\pi\delta} H_{\text{км}}$, так как именно такова плотность тока на плоской поверхности массивного сверхпроводника, помещённого в критическое поле $H_{\text{км}}$ (см. (1; 2,26)). Итак, $j_0 > \frac{c}{4\pi\delta} H_{\text{км}}$, где $\delta \sim 10^{-5}$ — глубина проникновения поля в металл. Поверхностное натяжение α в свою очередь не может быть больше поверхностного натяжения $\alpha_{ns} \sim \delta \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi}$ на границе раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами металла, так как величина α_{ns} является относительно очень большой и естественно было бы даже думать, что $\alpha \sim 10^{-7} \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi} \ll \alpha_{ns}$ (см. I, конец § 2). Учитывая (2,1) и сделанные замечания о возможных значениях j_0 и α , приходим к заключению, что

$$r \lesssim \delta \sim 10^{-5} \text{ см.} \quad (2,2)$$

Поверхностная энергия, отнесённая к единице объёма, в состоянии, когда нет результирующего тока, равна $\frac{2\alpha}{r} \lesssim \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi}$, т. е. по порядку величины может достигать разности свободных энергий нормальной и сверхпроводящей фаз металла $F_n - F_s = \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi}$ (см. (1; 2,36)). Минимальное значение энергии $\frac{2\alpha}{r}$ порядка $0,1 \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi}$ достигается при $\alpha \sim 10^{-7} \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi}$.

Под влиянием внешнего магнитного поля спонтанные токи должны перераспределяться и сливаться, образуя те наблюдаемые сверхпроводящие токи, которые экранируют проникновение магнитного поля в толщу сверхпроводника и подчиняются уравнению (1,1). Возможность получения этого уравнения, исходя из модели спонтанных токов, представляется весьма проблематичной и во всяком случае никем из сторонников этой модели не показана. Соответствующая попытка Гейзенберга¹⁰ совершенно неубедительна. Во-первых, остаётся неясным, как можно для спонтанных токов, сплетённых между собой в клубок, или образующих какую-то ячеистую структуру, сразу же принять, как это сделано в¹⁰, уравнение типа (1,2). Во-вторых, если бы даже уравнение (1,2) было получено, то из него, как хорошо известно (см. I, § 2), без дальнейшего ещё не вытекает уравнение (1,1). Поэтому «вывод» этого уравнения Гейзенбергом, как уже было справедливо отме-

чено в ¹⁶, основан на предположении, которое как раз и нужно обосновать*). Ещё более существенно другое возражение, непосредственно опирающееся на известные экспериментальные факты. Из опыта известно, что сверхпроводящие токи «отзываются» на малейшие изменения внешнего магнитного поля, и гистерезис в полях, меньших критического, в случае «идеальных» сверхпроводников, совершенно незаметен или, во всяком случае, стремится к нулю при увеличении чистоты и однородности образца. Совершенно другая картина должна наблюдаться с точки зрения модели спонтанных токов, поскольку всякое слияние и перераспределение нитей этих токов связано с изменением поверхностной энергии. Из сделанной выше оценки явствует, что поверхностная энергия, приходящаяся на единицу объёма сверхпроводника, довольно значительна, в силу чего неизбежно должны были бы наблюдаться гистерезисные явления, подобно тому, как это имеет место при намагничивании ферромагнетиков. Таким образом, отсутствие у сверхпроводников гистерезиса в полях $H < H_k$ свидетельствует против гипотезы спонтанных токов**). Против этой гипотезы говорит также ряд других соображений. Так, представляется

*) Уравнение (1,1) получено в ¹⁰ из (1,2) и требования, чтобы рассматриваемое состояние отвечало минимуму энергии. Но это последнее требование не обязательно и, например, для идеального проводника не выполняется (в толще металла при этом может сохраняться некоторое поле $H_0 \neq 0$, причём такое метастабильное состояние устойчиво). Требование минимальности энергии эквивалентно отрицанию возможного осуществления метастабильных состояний с $H_0 \neq 0$ и, как ясно из ¹⁰ или из § 2, ведёт к уравнению (1,1). Смотри в этой связи также ^{16, 17}.

**) Основанная на гипотезе спонтанных токов модель областей (нитей) тока с равными нулю средним током и магнитным моментом, с самого начала отвечает скорее антиферромагнетике, чем сверхпроводнику. Действительно, антиферромагнетиками как раз называются тела с $j \neq 0$, но равными нулю средними по ячейке током и магнитным моментом (см. ¹ § 129; в ферромагнетиках, в отличие от антиферромагнетиков, сред-

ний магнитный момент ячейки $\mu = \frac{1}{2c} \int_{\text{по ячейке}} [\mathbf{r}j] dv$ отличен от нуля). В ре-

альных антиферромагнетиках, повидимому, основную роль, как и в ферромагнетиках, играют токи, связанные со спином электрона. Но в принципе возможны также антиферромагнетики «орбитального типа», в которых определяющую роль играет орбитальный магнитный момент. Под влиянием внешнего магнитного поля распределение токов (магнитных моментов) в антиферромагнетике изменяется, но при доступных полях лишь в весьма слабой степени. Можно думать, что модель спонтанных токов тоже фактически будет себя вести подобным же образом, поскольку очень трудно себе представить предполагаемое слияние отдельных нитей и их поворот во внешнем поле $H \lesssim H_k$, несмотря на наличие поверхностной энергии между нитями и довольно сильных локаль-

ных магнитных полей (при $r \sim \delta$ локальные поля $H \sim \frac{2\pi r j_0}{c} \sim H_{\text{км}}$).

весьма вероятным, если не просто несомненным, что явление сверхпроводимости родственно явлению сверхтекучести — сверхпроводимость есть как бы сверхтекучесть «электронной жидкости» в металле (подробнее см. § 4 б). Но в применении к сверхтекучести гипотеза спонтанных токов или, лучше, потоков, по всем имеющимся данным заведомо не отвечает действительности. И даже чисто теоретически допустить, что покоящийся как целое гелий II весь состоит из отдельных нитей или областей, в которых скорость жидкости не равна нулю, представляется просто невероятным; такое допущение тем более не имеет под собой никакой почвы, что явление сверхтекучести находит объяснение в развитой на совершенно другой основе теории Ландау^{18, 19}. Таким образом, принятие за основу теории сверхпроводимости гипотезы спонтанных токов связано с представляющимся совершенно неестественным отказом от рассмотрения сверхпроводимости, как явления, родственного сверхтекучести. Другое возражение против гипотезы спонтанных токов состоит в том, что помимо неё для объяснения сверхпроводимости выдвинута также диамагнитная гипотеза, которая ещё не привела к построению подлинной микроскопической теории сверхпроводимости, но лишена всех серьёзных недостатков, связанных с гипотезой спонтанных токов. Поэтому обращение к этой последней не может быть оправдано даже отсутствием других более правдоподобных предположений.

Помимо сделанных критических замечаний общего характера нужно отметить, что конкретные попытки^{10—12} развить теорию сверхпроводимости, исходя из предположения о существовании спонтанных токов, сталкиваются с дополнительными трудностями. Так, в^{10—12} спонтанные токи образуются лишь электронами, лежащими вблизи поверхности Ферми на расстояниях порядка kT_k от неё (T_k — критическая температура, равная, как известно $\sim 1—10^\circ\text{K}$). Концентрация электронов в этом слое порядка $n T_k/T_0 \sim 10^{-4} \div 10^{-5} n$, где $T_0 \sim 10^5$ — температура вырождения и n — полная концентрация электронов. Отсюда следует, что в сверхпроводимости будет принимать участие не больше 10^{-4} части электронов, участвующих в проводимости в нормальном состоянии. Но из опыта известно (см. I, § 6), что концентрация сверхпроводящих электронов $n_s \sim 0,1 n_0 \sim 10^{22}$ ($n_0 \sim 10^{23}$ — концентрация электронов проводимости в нормальном состоянии). Таким образом, здесь имеется расхождение на несколько порядков величины. Это затруднение очень трудно обойти, поскольку совершенно неясно, каким образом при $T \sim T_k$ могут образоваться спонтанные токи с участием электронов, лежащих на расстоянии, много большем kT_k от поверхности Ферми. Признавая, повидимому, сделанное замечание, Гейзенберг¹⁰ тем не менее, безосновных на то оснований, ограничиваясь лишь ссылкой на опыт (?), утверждает, что в получаемом им уравнении (1,2) будет фигури-

ровать концентрация электронов $\sim n_0$, а не $\sim 10^{-4} n_0$ (как уже упоминалось, даже помимо этого момента приведённый в¹⁰ вывод уравнения (1,2) остаётся нам совершенно неясным; на то же указывает Ф. Лондон¹⁶). Далее, в теории, базирующейся на гипотезе спонтанных токов в сильном поле $H \sim H_{\text{км}}$, нужно ожидать резких нелинейных явлений. Такое заключение и сделано в^{10,11}, но полностью опровергнуто на опыте²⁰ (об этом см. также в дополнении). Следует заметить также, что в¹⁰⁻¹² никак не учитываются колебания кристаллической решётки, между тем как после открытия изотопического эффекта стало несомненным, что никакая детальная микроскопическая теория сверхпроводимости без учёта колебаний решётки построена быть не может.

Наконец, нельзя забывать, что до сих пор нами совершенно не был затронут вопрос о том, насколько в существующих работах действительно показано, что при определённых предположениях имеются спонтанные токи — выше было лишь указано на то, что существование спонтанных токов в принципе возможно и, с другой стороны, подчеркнуты те затруднения, которые возникают, если принять существование этих спонтанных токов. Отметим, что в¹⁰ существование спонтанных токов заведомо не доказано, и сам автор работы претендует лишь на наводящие соображения, указывающие на возможность появления спонтанных токов. То же можно сказать и обо всех других известных попытках в этом направлении, за исключением, быть может, работы¹³ (в¹³ вычисления энергии системы электронов с учётом обменного кулоновского взаимодействия не приведены и нами не повторялись; в их корректности имеются определённые основания сомневаться).

Резюмируя, можно сказать, что для принятия гипотезы спонтанных токов, во-первых, нет никаких оснований и, во-вторых, эта гипотеза сталкивается с различными серьёзными возражениями. Поэтому, по нашему мнению, попытки развить теорию сверхпроводимости на основе гипотезы спонтанных токов должны быть решительно оставлены, по крайней мере до тех пор, пока не будут найдены хотя бы принципиальные пути преодоления всех перечисленных выше затруднений *).

*) Несмотря на выраженное выше резко отрицательное отношение к привлечению для объяснения сверхпроводимости гипотезы спонтанных токов, нужно отметить, что эта гипотеза допускает прямую экспериментальную проверку. При наличии в сверхпроводнике областей (нитей) спонтанных токов в толще образца неизбежно должны присутствовать локальные магнитные поля, а на его поверхности будут иметься поля рассеяния. Наличие этих магнитных полей может быть, в принципе, замечено методами, использованными для изучения промежуточного состояния²¹, по рассеянию в сверхпроводнике заряженных частиц и нейтронов или каким-нибудь другим способом.

3. ДИАМАГНИТНАЯ ГИПОТЕЗА

а) Исходные соображения

Сверхпроводник с размерами, значительно большими глубины проникновения $\delta \sim 10^{-5}$ см, при помещении его в магнитное поле ведёт себя подобно идеальному диамагнетику, т. е. телу с магнитной восприимчивостью $\chi = \frac{\mu - 1}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}$ (в таком теле магнитная индукция $B = 0$).

Сверхпроводящий ток, текущий в поверхностном слое металла при неизменном внешнем поле H , не затухает и не связан с выделением тепла и в этом отношении также аналогичен тем токам, которые текут под действием магнитного поля в атомах и молекулах и обуславливают их диамагнетизм.

Отнесённая к одному атому диамагнитная восприимчивость, как известно (см., например, ¹⁵ § 126), равна:

$$\chi_1 = -\frac{e^2 Z}{6 mc^2} \bar{r}^2 = -4,7 \cdot 10^{-14} Z \bar{r}^2, \quad (3,1)$$

где Z — число электронов в атоме и $\bar{r}^2$ — средний квадрат их расстояния от ядра (e и m — заряд и масса электрона). В атомах $\bar{r}^2 \sim 10^{-16}$, откуда для одного грамм-атома

$$\chi_A = N_A \chi_1 = 6,02 \cdot 10^{23} \chi_1 \sim -10^{-6} Z,$$

как это и отвечает опыту (например, для гелия с $Z = 2$ и атомным весом $A = 4$ в газообразном состоянии $\chi_A = -1,9 \cdot 10^{-6}$ и в гелии II, где плотность $\rho \simeq 0,15$, пересчитанная из данных для газа восприимчивость, отнесённая к единице объёма $\chi = \frac{\chi_A}{A} \rho \simeq -7 \cdot 10^{-8}$).

Допустим теперь, что диамагнитными свойствами обладает не атом, а металл в целом. В этом случае, полагая $\bar{r}^2 \sim 1$ и $Z \sim n_0 \sim 10^{23}$ (n_0 — концентрация электронов проводимости) из (3,1) получаем значение $\chi \sim -5 \cdot 10^7$, а фактически, как сейчас будет показано, значение χ близкое к $-\frac{1}{4\pi}$. Дело в том, что получающееся из (3,1) выражение для χ :

$$\chi = N_a \chi_1 = -\frac{e^2 Z N_a}{6 mc^2} \bar{r}^2 \quad (3,2)$$

(N_a — концентрация атомов) справедливо лишь при условии, что

$$|\chi| \ll 1. \quad (3,3)$$

В общем же случае выражения (3,1) и (3,2) определяют, собственно, не значения χ_1 и χ , а соответственно коэффициенты пропорциональности χ'_1 и χ' соответственно между магнитным моментом атома и намагничиванием M и магнитной индукцией B , а не магнитным полем H (это обстоятельство связано с тем, что именно индукция B есть среднее действующее на электрон магнитное поле). Между тем, по определению $\chi = \frac{M}{H}$, т. е.

$$M = \chi H = \frac{\chi}{1 + 4\pi\chi} B = \chi' B; \quad \chi = \frac{\chi'}{1 - 4\pi\chi'}. \quad (3,4)$$

При условии (3,3), которое для всех известных диамагнетиков всегда выполняется, действительно $\chi \simeq \chi'$. Но если $|\chi'| \gg \frac{1}{4\pi}$, то $\chi \rightarrow -\frac{1}{4\pi}$. Поэтому если по формулам (3,1) — (3,2) определяющим, в силу сказанного, величины χ'_1 и χ' , для χ' получаются очень большие значения, то это означает, что $\chi \rightarrow -\frac{1}{4\pi}$ *).

Итак, если бы мы имели гигантский атом макроскопических размеров и с соответственно большим числом электронов, такой атом вёл бы себя в магнитном поле подобно сверхпроводнику. Эту аналогию не нарушает и тот факт, что в атоме магнитное поле можно считать однородным, а в сверхпроводнике оно затухает в поверхностном слое с толщиной $\sim \delta$. Подобное различие объясняется лишь тем, что в атоме экранирующее действие диамагнитных токов мало и им пренебрегают. Если же восприимчивость χ велика, делать этого, очевидно, нельзя и нужно решать задачу о поведении системы в поле с учётом экранирующих токов. Такой учёт, как в качественном отношении сразу же ясно, приведёт к затуханию поля в глубь диамагнитного атома.

Сущность диамагнитной гипотезы о природе сверхпроводимости и состоит в изложенных соображениях, в уподоблении сверхпроводника макроскопическому диамагнитному атому. Собственно, здесь даже трудно говорить о гипотезе, а просто имеет место констатация вытекающей из всех экспериментальных данных глубокой аналогии между сверхпроводящим и диамагнитным токами. Эта аналогия может быть прослежена и в количественном отношении и позволяет, как ещё в 1935 г. указал Ф. Лондон²⁴ (см. также^{14, 16, 18}), понять с точки зрения квантовой механики содержание основного уравнения теории сверхпроводимости (1,1).

*) Мы подробно остановились на этом элементарном замечании, которое в применении к сверхпроводимости уже подчёркивалось в²², потому, что оно игнорируется в серии работ Бардина²³, которые и по этой причине являются грубо ошибочными (об этом см. также в конце этого раздела и в § 3 в).

Если имеется система из N электронов с волновой функцией $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$, то средняя плотность электрического тока в точке равна (напомним, что в согласии с I знак e выбран так, что для электронов $e < 0$):

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N \int \left\{ \frac{ie\hbar}{2m} (\Psi \nabla_{\alpha} \Psi^* - \Psi^* \nabla_{\alpha} \Psi) - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\alpha}) \Psi^* \Psi \right\} \times \\ \times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N, \quad (3,5)$$

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал электромагнитного поля, δ — дельта-функция, $\nabla_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z_{\alpha}} \mathbf{k}$ и интегрирование ведётся по всему металлу, т. е. по области, в которой Ψ -функция предполагается нормированной ($\int \Psi^* \Psi d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N = 1$).

Векторный потенциал $\mathbf{A}$, как известно, определён неоднозначно, даже если наложить на него условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad (3,6)$$

которое мы примем.

При условии (3,6) все физические величины и, в частности, плотность тока $\mathbf{j}$ не должны изменяться при градиентном преобразовании, т. е. при замене потенциала $\mathbf{A}$ на потенциал

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \lambda, \\ \nabla^2 \lambda &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3,7)$$

где $\lambda(\mathbf{r})$ — некоторая скалярная функция $\mathbf{r}$. Для того чтобы указанное требование было выполнено при преобразовании (3,7), функция Ψ должна заменяться на функцию

$$\Psi'(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = e^{\frac{ie}{\hbar c} \sum_{\alpha} \lambda(\mathbf{r}_{\alpha})} \cdot \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (3,8)$$

Это утверждение легко проверить непосредственной подстановкой (см., например, ¹⁴ § 26).

При отсутствии магнитного поля всегда можно положить $\mathbf{A} = 0$; соответствующую функцию Ψ обозначим через Ψ_0 , причём примем, что в состоянии Ψ_0 ток $\mathbf{j} = 0$ (именно такое положение и имеет место в действительности, когда магнитное поле везде равно нулю и отсутствует нормальный ток). Включим теперь магнитное поле и предположим, что функция Ψ_0 остаётся неизменной, т. е. что её возмущением в поле можно пренебречь. Тогда, как ясно из сказанного и из (3,5), плотность тока равна

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{mc} \sum_{\alpha=1}^N \int \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\alpha}) \Psi_0^* \Psi_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N = \\ = -\frac{e^2 n(\mathbf{r})}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (3,9)$$

где величина

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N \int \Psi_0^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \cdot \Psi_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \quad (3,10)$$

по самому определению есть концентрация электронов, т. е. та часть рассматриваемых нами N электронов, которая приходится на единицу объема *).

Если тело состоит из отдельных атомов с практически перекрывающимися волновыми функциями $\psi_\alpha(\mathbf{r}_\alpha)$ функция Ψ_0 равна произведению этих функций и $n(\mathbf{r}) = \psi_\alpha^*(\mathbf{r}) \psi_\alpha(\mathbf{r})$ (для простоты принято, что в атоме имеется только один электрон; α — номер атома, в пределах которого находится точка $\mathbf{r}$). В этом случае диамагнитный эффект мал и можно положить $\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{Hr}]$, где H — напряжённость внешнего магнитного поля. Далее, магнитный момент атома равен

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2c} \int [\mathbf{rj}] dv = -\frac{e^2}{4mc^2} \int [\mathbf{r} [\mathbf{Hr}]] \psi_\alpha^* \psi_\alpha dv = \\ &= -\frac{e^2}{6mc^2} \bar{r^2} \mathbf{H} = \chi_1 \mathbf{H}, \end{aligned}$$

где принято, что функция ψ отвечает S -состоянию (поэтому

$$\begin{aligned} \int [\mathbf{r} [\mathbf{Hr}]] \psi^* \psi dv &= \int \{r^2 \mathbf{H} - \mathbf{r} [\mathbf{rH}]\} \psi^* \psi dv = \\ &= \frac{2}{3} \mathbf{H} \int r^2 \psi^* \psi dv = \frac{2}{3} \bar{r^2} \cdot \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Полученный результат тождественен с (3,1), как этого и следовало ожидать (обобщение проведенного расчёта на случай $Z \neq 1$ тривиально; выражение (3,1) пригодно только для S -состояния). Положение совершенно меняется, если функция Ψ_0 отвечает электронному движению, охватывающему большие, макроскопические области, т. е. если функция $n(\mathbf{r})$ постоянна или, по крайней мере, мало меняется в зависимости от $\mathbf{r}$ (как легко видеть из дальнейшего, изменение $n(\mathbf{r})$ можно считать малым, если $\frac{\partial n}{\partial z} \delta \ll n$, где z направление, в котором функция n

) Действительно, величина $\int \Psi_0^ \cdot \Psi_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N$ есть плотность вероятности обнаружить электрон α в точке $\mathbf{r}$ при любом положении всех других электронов. После суммирования таких выражений по α , т. е. по всем электронам, мы и получаем плотность (концентрацию) электронов. С соответствующими изменениями это замечание поясняет и смысл выражения (3,5) для средней плотности тока.

меняется быстрее всего). Если $n(\mathbf{r}) = n_s = \text{const}$, то, в силу равенства $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$, из (3,9) путём применения операции rot сразу же получаем*):

$$\text{rot } \frac{m}{e^2 n_s} \mathbf{j} = -\frac{1}{c} \mathbf{H}, \quad (3,11)$$

т. е. получаем уравнение (1,1) с $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s$ и

$$\Lambda = \frac{m}{e^2 n_s}, \quad (3,12)$$

что находится в полном согласии с (1; 2,9).

Полученный результат по своей физической сущности полностью согласуется с опирающимися на представление о магнитной восприимчивости соображениями, изложенными ранее.

Выражение (3,11) получается также, если функция Ψ в поле имеет вид $\Psi = e^{\frac{ie}{\hbar c} \sum_{\alpha} \lambda(r_{\alpha})} \cdot \Psi_0$, где в состоянии Ψ_0 ток отсутствует. В этом случае

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{e^2 n(\mathbf{r})}{mc} [\nabla \lambda(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r})] \quad (3,13)$$

и поскольку $\text{rot } \nabla \lambda = 0$ уравнение (3,11) при $n = \text{const}$ действительно сохраняется.

Из (3,9) при $n(\mathbf{r}) = n_s = \text{const}$ получается также уравнение (1,2): $\frac{\partial \Delta \mathbf{j}_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{m}{e^2 n_s} \mathbf{j}_s = \mathbf{E}$, поскольку $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ (электрическое поле, описываемое скалярным потенциалом φ , считаем отсутствующим; обобщение на случай, когда $\varphi \neq 0$ или $\lambda \neq 0$, как это имеет место, если исходить из (3,13), является особым несколько побочным вопросом, тем более, что нет уверенности в отсутствии в (1,2) дополнительного градиентного члена; см. (1, § 27).

Итак, если волновая функция электронов в теле отвечает слабо меняющейся в пространстве концентрации n и под влиянием магнитного поля, несмотря на тепловое движение, остаётся неизменной, то рассматриваемое тело является сверхпроводником.

*) Точнее, $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ и в (3,11) должна фигурировать индукция. Это и имеет место в действительности, но в сверхпроводниках мы не вводим намагниченности и везде считаем, что $B = H$ (подробнее см. I), если не говорить об имеющих лишь иллюстративное значение рассуждениях, приведённых в начале этого раздела. Ясно также, что условие постоянства или медленности изменения функции $n(\mathbf{r})$ является слишком жёстким. Эти требования в действительности нужно предъявить не к точной функции $n(\mathbf{r})$, а к некоторому среднему значению $n(\mathbf{r})$ по «физически бесконечно малому» объёму, т. е. объёму с размерами значительно большими атомных и в то же время существенно меньшими $\delta \sim 10^{-5}$ (сказанное следует из того, что в (1,1) фигурируют, фактически, макроскопические величины $\mathbf{j}_s$ и $\mathbf{H}$, получающиеся усреднением по физически бесконечно малому объёму).

Твёрдые тела, в которых имеется значительное количество «коллективизированных» подвижных электронов и, следовательно, для этих электронов $n(\mathbf{r}) \simeq \text{const}$, как раз и являются металлами и таким образом связь сверхпроводимости с металлическим состоянием очевидна*).

Но в металле, находящемся в нормальном состоянии, неизменность («жесткость») волновой функции не имеет места. Напротив, в хорошем приближении можно даже считать, что диамагнитный ток в металле, связанный с электронами проводимости, равен нулю.

В классической теории, как известно, это последнее утверждение в случае термодинамического равновесия является вполне строгим. Если же опираться на квантовую теорию, то некоторый диамагнитный эффект для электронов проводимости в металле остаётся, как это было показано в 1930 г. Ландау²⁵. Соответствующий диамагнитный эффект весьма мал и в случае совершенно свободных электронов полностью перекрывается втрое большим парамагнитным эффектом, связанным со спином электронов.

Диамагнитная часть восприимчивости свободных электронов, образующих вырожденный газ, равна

$$\chi_{\text{св}} = -\frac{n}{2E_0} \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right)^2 = -\left(\frac{\pi}{3} \right)^{2/3} \frac{e^2 n^{1/3}}{4\pi^2 mc^2}, \quad (3,14)$$

где n — концентрация электронов и $E_0 = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} n^{1/3}$ — энергия на поверхности Ферми.

*) Отсюда ещё, однако, не следует, что сверхпроводник обязательно должен обладать всеми свойствами металлов. Действительно, мыслимо тело, ведущее себя в магнитном поле подобно известным сверхпроводникам (соблюдается уравнение (1,1) — (3,11)), но не являющееся металлом (проводником) в обычном смысле этого слова, т. е. не переносящее тока при включении его в обычную электрическую цепь.

Другими словами, подобный «диэлектрический сверхпроводник» будет отличаться от обычного сверхпроводника только отсутствием возможности перехода сверхпроводящего тока в нормальный ток, текущий в граничащем со сверхпроводником нормальном проводнике. В известной мере всё различие между сверхпроводниками обоих типов, если не говорить об их поведении вне сверхпроводящей фазы, сводится, таким образом, к поверхностным или, точнее, контактными явлениям.

Никаких указаний на существование «диэлектрических сверхпроводников» не имеется. Подобная возможность и теоретически представляется мало вероятной. Но ввиду неясностей, имеющих место в области очень низких температур, не следует всё же забывать здесь о новых возможностях и, в связи с этим, о неэквивалентности методов обнаружения сверхпроводимости по изменению сопротивления и по изменению магнитного потока через образец.

Кстати заметим, что вопрос о контактных явлениях в сверхпроводниках и, в первую очередь, вопрос о переходе сверхпроводящего тока в нормальный в смешанной электрической цепи представляется нам весьма интересным и ещё совершенно неясным.

Полагая $n \sim 10^{23}$ и $E_0 \sim 10 \text{ эв} \sim 10^{-11}$, получаем $\chi \sim -10^{-6}$. Если считать электроны не свободными, а движущимися в периодическом поле решётки, то при известных условиях для χ пригодна формула (3,14), но с заменой массы электрона m на эффективную массу $m_{\text{эф}}$; при этом замену m на $m_{\text{эф}}$ нужно производить в первом выражении (3,14), поскольку при переходе к связанным электронам отношение $\frac{n}{E_0}$ естественно считать примерно неизменным. Таким образом для электронов в поле решётки связанная с диамагнетизмом электронов часть восприимчивости $\chi \sim \left(\frac{m}{m_{\text{эф}}}\right)^2 \chi_{\text{св}}$ (см. 6, 7, 27); на опыте для металлов $|\chi| \sim 10^{-5} - 10^{-6}$ (для Bi $\chi = -10,6 \cdot 10^{-6}$, для Pt $\chi = 21 \cdot 10^{-6}$; для большинства других металлов $|\chi|$ меньше).

Малость диамагнитного эффекта связана с заметным изменением волновых функций электронов в магнитном поле, в силу чего первый член в (3,5) (член, содержащий $\nabla\Psi$ и $\nabla\Psi^*$) не равен нулю и примерно компенсирует второй «диамагнитный член», пропорциональный $\mathbf{A}$. Для того чтобы этой компенсации не было, необходима, как сказано, «жесткость» волновой функции. В атоме подобная «жесткость» действительно имеет место и используется при получении выражения (3,1) для восприимчивости, что мы сейчас покажем.

Оператор энергии для атома в поле $\mathbf{H}$ имеет вид:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \frac{e}{2mc} \mathbf{H} \mathbf{L} + \frac{e^2}{8mc^2} [\mathbf{H} \mathbf{r}]^2, \quad \mathbf{L} = [\mathbf{r} \mathbf{p}] = -i\hbar [\mathbf{r} \nabla], \quad (3,15)$$

где $\mathcal{H}_0$ — оператор энергии при отсутствии поля, спин не учитывается, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор электрона, который для простоты считается единственным, и положено $\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H} \mathbf{r}]$. Если речь идёт об S -состоянии, то изменение энергии равно $\Delta E = -\frac{e^2}{8mc^2} [\mathbf{H} \mathbf{r}]^2 = \frac{e^2}{12mc^2} H^2 r^2$ (черта означает квантово-механическое усреднение по невозмущённому состоянию) и, поскольку $\chi_1 = -\frac{\partial^2 \Delta E}{\partial H^2}$, для χ_1 получаем формулу (3,1). В состоянии с отличным от нуля орбитальным моментом изменение энергии содержит основной член, пропорциональный первой степени напряжённости поля H . Но в обоих случаях, как легко видеть, изменение волновой функции пропорционально H^2 и весьма мало, по крайней мере до тех пор, пока изменение энергии под влиянием поля H много меньше расстояния между данным уровнем системы и ближайшим к нему другим уровнем. Таким образом, именно «жесткость» атомной волновой функции приводит к обычному выражению для χ . Пропорциональное H^2 изменение Ψ -функций в

отношении χ даёт эффект высшего порядка малости и, во всяком случае, совсем не изменяет выражения для χ в достаточно слабом поле.

Такое же поведение Ψ -функции, отвечающей какой-то части электронов проводимости в металле, обеспечивает справедливость уравнения (1,1) — (3,11). При этом требование, чтобы изменение Ψ -функции было пропорционально H^2 , является, вообще говоря, яслишком сильным. Действительно, если даже изменение Ψ -функции пропорционально H , но достаточно мало, то содержащие $\nabla\Psi$ и $\nabla\Psi^*$ члены в выражении для тока (3,5) будут пропорциональны H (или, точнее, A), но не смогут компенсировать диамагнитный член

— $\frac{e^2}{mc} \Psi^* \Psi A$. Таким образом, условие «жёсткости» волновой функции «сверхпроводящих электронов» не нужно понимать в каком-то абсолютном смысле: оно по сути дела означает лишь, что волновая функция достаточно мало изменяется*) в магнитном поле $H \ll H_k$. В сильном поле ($H \sim H_k$) волновая функция может уже заметно изменяться, так как уравнение (1,1) — (3,11) в этом случае не справедливо (см. ²⁶ и I, §§ 3, 4).

Связь требования «жёсткости» системы электронов с уравнением (1,1) ясна также из изложенных в I, § 2 соображений, опирающихся на теорему Лармора.

«Жёсткость» волновой функции в сверхпроводниках может быть интерпретирована в духе указания на «конденсацию электронов в импульсном пространстве». Действительно, неизменность Ψ -функции означает, что в рассматриваемом состоянии средний импульс электронов остаётся неизменённым и в случае (3,9) равным нулю. Напротив, в случае свободных электронов их импульс при включении поля изменяется (импульс пропорционален первому члену в (3,5), содержащему $\nabla\Psi$ и $\nabla\Psi^*$). Таким образом, о сверхпроводнике можно сказать, что в нём электроны «сконденсированы» в состоянии с некоторым одинаковым во всём теле средним импульсом (в односвязном образе этот импульс всегда равен нулю), причём внешнее поле, меньшее критического, не может их вывести из этого состояния. Постоянство среднего импульса вдоль всего сверхпроводника позволяет также говорить о нали-

*) Если изменение Ψ пропорционально H^2 , то первые члены в выражении для тока (3,5) в слабом поле вообще не существенны и можно без дальнейшего основываться на формуле (3,9). В случае, когда изменение Ψ пропорционально H , вычисление тока требует знания вида возмущённой Ψ -функции и можно лишь полагать, что при предположении об изотропности металла (3,5) сводится к (3,9) с какой-то функцией $n(r)$, отличной от (3,10). Если эта новая функция $n(r)$ слабо зависит от r , то, так же как и раньше, из (3,9) приходим к (3,11).

Ниже, если не оговорено противное, «жёсткость» волновой функции понимается в том смысле, что её изменением в магнитном поле вообще можно пренебречь.

ции «дальнего порядка» в пространственном распределении среднего импульса сверхпроводящих (т. е. участвующих в сверхпроводимости) электронов. Далее, в силу диамагнитного характера сверхпроводящего тока и квантовой природы диамагнетизма можно говорить о том, что сверхпроводимость есть квантовое явление макроскопических масштабов.

Как нам кажется, все такие разговоры о «конденсации в импульсном пространстве», «дальнем порядке» и «макроскопическом квантовом явлении», довольно часто встречающиеся в литературе (см., например, ^{14, 16}), ничего не добавляют к уже сказанному выше в отношении связи сверхпроводимости с диамагнетизмом и в отношении квантовомеханического смысла основного в теории сверхпроводимости уравнения (1,1), (3,11)*).

Основная ценность приведённого вывода уравнения (1,1), (3,11), исходя из выражения для плотности тока (3,5), состоит в том, что задача микроскопической теории сверхпроводимости может теперь быть сформулирована на языке Ψ -функции и в значительной мере сводится к нахождению условий, при которых Ψ -функция электронов проводимости является «жёсткой».

Если опираться на «газовую» (одноэлектронную) модель электронов в металле, то сверхпроводимости получить нельзя, так как в этом случае условие «жёсткости» волновых функций явным образом не выполнено**). Поэтому для объяснения сверхпроводимости нужно отказаться от «газовой» модели или, во всяком случае, её существенно изменить, учитывая некоторую энергию взаимодействий, которой пренебрегается в существующей электронной теории металлов. К этому вопросу мы ещё будем возвращаться. Здесь же отметим, что большая «сцеплённость» электронов в сверхпроводящем состоянии по сравнению с нормальным, где электроны в известном отношении могут быть уподоблены свободным электронам, ясна уже просто из того факта, что в сверхпроводниках сверхпроводящее состояние является энергетически более низким, чем нормальное и как бы обладает энергией связи (подобно тому, как ею обладают нуклоны в ядре).

*) Сказанное не относится к попытке найти особенности матрицы плотности, которые отвечают сверхпроводящим и сверхтекучим свойствам системы частиц (см. ¹ § 129 и ²⁶).

**) Неоднократно делались попытки (последнюю из них см. в ²³) связать явление сверхпроводимости с «аномальным диамагнетизмом», который может иметь место в рамках одноэлектронной модели в случае достаточной малости эффективной массы электрона в металле $m_{эф}$. Как уже упоминалось, при определённых предположениях $\chi \sim \left(\frac{m}{m_{эф}}\right)^2 \chi_{св}$, где $\chi_{св} \sim 10^{-6}$ — диамагнитная восприимчивость свободных электронов. Полагая $m_{эф} \sim 10^{-3} m$, получаем значение $\chi \sim -\frac{1}{4\pi}$. Но при этом де-

Задача дальнейшего изложения состоит в обсуждении условий, при которых обеспечивается «жесткость» волновой функции и должна иметь место сверхпроводимость. В разделе б) для этой цели будет рассмотрена некоторая методическая задача. В разделе в) мы вернёмся к электронам в металле.

б) Сверхпроводимость идеальных заряженных бозе- и ферми-газов, находящихся в сосуде

Для выяснения некоторых моментов, существенных для микротехники сверхпроводимости, рассмотрим сейчас чисто методическую задачу, а именно вопрос о поведении в магнитном поле идеальных заряженных бозе- и ферми-газов, находящихся в некотором сосуде конечных размеров. При этом для того, чтобы иметь возможность даже в самом грубом приближении пренебречь кулоновскими силами, предполагается, что помимо рассматриваемых частиц имеется одинаковое количество частиц с зарядом другого знака, но со значительно большей массой, как это имеет место в электронно-ионной плазме; движением тяжёлых частиц пренебрегается.

Вначале будем считать, что сосуд, о котором идёт речь, представляет собой длинный круглый цилиндр с радиусом R и дли-

нается ошибка, уже разобранный в начале этого раздела и связанная со смешением B и H . Фактически $\chi' \sim \left(\frac{m}{m_{эф}}\right)^2 \chi_{св}$, а, следовательно, $\chi = \frac{\chi'}{1 - 4\pi\chi'} \rightarrow -\frac{1}{4\pi}$ только при $|\chi'| \gg \frac{1}{4\pi}$ и $m_{эф} \ll 10^3 m$.

Вместе с тем, если уже полностью уподоблять сверхпроводник диамагнетику, то нужно, чтобы равенства $\chi = -\frac{1}{4\pi}$ и $\mu = 1 + 4\pi\chi = 0$ строго выполнялись (иначе $B \neq 0$ в толще сверхпроводника; значение $\mu < 0$ в статическом поле недопустимо из термодинамических соображений, так как в этом случае минимуму энергии отвечает бесконечно большое поле H). Для выполнения равенства $\mu = 0$ необходимо, чтобы $|\chi'| \rightarrow \infty$ и $m_{эф} \rightarrow 0$. Но даже при $m_{эф} \sim 10^{-3} m$ обычная теория диамагнетизма уже, вообще говоря, неприменима — достаточно сказать, что если считать импульс электрона на границе Ферми таким же, как обычно, то при $m_{эф} \sim 10^{-3} m$ скорость электрона на этой границе будет порядка $v_0 = \frac{p_0 m}{m_{эф}} \sim 10^8 \frac{m}{m_{эф}} \sim 10^{11}$ (э) (это замечание принадлежит И. Я. Померанчуку). Поэтому при использовании выражения $\chi' \sim \left(\frac{m}{m_{эф}}\right)^2 \chi_{св}$ при малых значениях $m_{эф}$ нужна, в лучшем случае, большая осторожность.

Наконец, нужно заметить, что даже если опираться на формулу $\chi' \sim \left(\frac{m}{m_{эф}}\right)^2 \chi_{св}$ и рассматривать вопрос о значении $m_{эф}$ безотносительно к теории сверхпроводимости, в ²⁸ малое значение $m_{эф}$ фактически сколько-нибудь убедительно получено не было, что признал в конце концов и сам автор (см. последнюю из работ ²⁸ и ²⁷).

ной L . Магнитное поле H_0 параллельно оси цилиндра, концентрация рассматриваемых частиц с зарядом e и массой μ равна n , а их полное число равно $N = \pi R^2 L n$.

При отсутствии поля уравнение Шредингера для волновой функции отдельной частицы имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\} \psi = E \psi, \quad (3,16)$$

где z, r, φ — вводимые цилиндрические координаты и E — энергия частицы. Будем считать, что на поверхности сосуда $\psi = 0$ (бесконечный потенциальный барьер) и положим

$$\psi = \frac{1}{\pi L} f(r) e^{im\varphi} \sin \frac{\pi n_z}{L} z \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n_z = 1, 2, \dots),$$

что обеспечивает однозначность ψ и обращение её в нуль при $z = 0$ и $z = L$. Тогда для f получаем уравнение

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} E - \frac{m^2}{r^2} - \frac{\pi^2 n_z^2}{L^2} \right) f = 0,$$

решение которого имеет вид $f_m = C J_m(\lambda r)$, где $\lambda^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{\pi^2 n_z^2}{L^2}$, C — постоянная и $J_m = (-1)^m J_{-m}$ — функция Бесселя порядка m . Условие $f(R) = 0$, т. е. условие обращения ψ в нуль на стенках цилиндра, означает, что величина λR должна быть корнем функции Бесселя, откуда и определяется энергия частицы:

$$E_{mnzk}(0) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\beta_{mk}^2}{R^2} + \frac{\pi^2 n_z^2}{L^2} \right), \quad (3,17)$$

где β_{mk} — k -й корень функции $J_m(x)$. Укажем, что $\beta_{01} = 2,4048$, $\beta_{02} = 5,5201$, $\beta_{03} = 8,6537$, $\beta_{11} = 3,8317$, $\beta_{12} = 7,0156$, $\beta_{13} = 10,1735$ и т. д.

При наличии магнитного поля, описываемого векторным потенциалом $\mathbf{A}$, волновое уравнение таково:

$$\frac{1}{2\mu} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] + \frac{ie\hbar A_\varphi}{\mu c r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e^2}{2\mu c^2} A_\varphi^2 \right\} \psi = E \psi, \quad (3,18)$$

где в силу пренебрежения краевым эффектом (длинный цилиндр) поле $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ предполагается направленным по оси z , а также обладающим цилиндрической симметрией (поэтому имеем:

$$A_z = A_r = 0, \quad H_z = \text{rot}_z A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi)$$

$$\text{и } \text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = 0).$$

Взаимодействием спина частицы с магнитным полем пренебрегаем, так как оно с точки зрения дальнейшего не существенно.

Потенциал $\mathbf{A}$ можно представить в виде суммы двух членов

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_0 = \frac{1}{2} [\mathbf{H}_0 \mathbf{r}] \\ \Delta \mathbf{A}_1 &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = -\frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{j}_\alpha; \\ \mathbf{j}_\alpha &= \frac{ie\hbar}{2\mu} (\psi \nabla_\alpha \psi^* - \psi^* \nabla_\alpha \psi) - \frac{e^2}{\mu c} \psi^* \psi \mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha),\end{aligned}\quad (3,19)$$

где $\mathbf{A}_0$ — потенциал, отвечающий однородному внешнему полю $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{A}_1$ — потенциал поля, связанного с движением рассматриваемых частиц; ток $\mathbf{j}$ в общем случае имеет вид (3,5), но для независимых частиц может быть записан просто в форме (3,19), где ψ — волновая функция отдельной частицы. Если концентрация частиц n достаточно мала, то поле $H_1 = |\text{rot } \mathbf{A}_1| \ll H_0$, в первом приближении $A_z = A_{0z} = \frac{1}{2} H_0 r$ и уравнение (3,18) становится аналогичным (3,15), так как $-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} = L_z$ есть проекция момента количества движения на ось z . В этом случае, при пренебрежении членом, пропорциональным A_z^2 , функции ψ , удовлетворяющие уравнению (3,16), остаются собственными функциями уравнения (3,18) и

$$E_{mnzk}(H) = E_{mnzk}(0) + \frac{e\hbar m H_0}{2\mu c}. \quad (3,20)$$

Во втором порядке относительно H_0 изменение ψ уже отлично от нуля, т. е. $\delta\psi \sim H_0^2$.

Ситуация здесь аналогична имеющей место в случае атома (см. § 3а)).

Ток $\mathbf{j}_\alpha$ имеет только составляющую j_z и равен

$$j_{\alpha z} = \frac{e\hbar m}{\mu r_\alpha} \psi^* \psi - \frac{e^2}{\mu c} \psi^* \psi A_{0z}, \quad A_{0z} = \frac{1}{2} H_0 r. \quad (3,21)$$

Магнитный момент цилиндра, связанный с током $\mathbf{j}$, существенно зависит от силы поля H_0 и типа статистики, которой подчиняются частицы. В случае статистики Бозе при температуре $T = 0$ все частицы при $H_0 = 0$ находятся на нижнем уровне

$$E_{011}(0) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{2,4048}{R^2} + \frac{\pi^2}{L^2} \right\} \quad \text{с моментом } m = 0.$$

При включении поля H_0 , до тех пор, пока уровень E_{011} остаётся нижним, все частицы остаются на нём и полный ток

$$j = -\frac{e^2 n}{\mu c} A = -\frac{e^2}{2\mu c} H_0 r n, \text{ где } n = \sum_{a=1}^N \psi^*(\mathbf{r}_a) \psi(\mathbf{r}_a) \text{ — концентрация частиц.}$$

В этих условиях цилиндр с заряженным газом ведёт себя как сверхпроводник, так как справедливы уравнения (3,9) — (3,11), причём $\delta^2 = \frac{\hbar c^2}{4\pi} = \frac{\mu c^2}{4\pi e^2 n}$ (зависимостью концентрации n от r , которая в основном состоянии бозе-газа ясно выражена, здесь и в дальнейшем для простоты пренебрегаем; легко видеть, что этот момент не имеет принципиального значения).

Сделанный вывод сохраняется и в том случае, когда экранирующим полем H_1 нельзя пренебречь. В этом случае попрежнему с точностью до членов порядка H_0^2 функция ψ не меняется и

$$E_{m n_z k}(H) = E_{m n_z k}(0) + \frac{e \hbar m}{\mu c} \int_0^R f_0^2 A_\varphi dr, \quad (3,22)$$

так как функция $\psi = \frac{1}{\pi L} f_m(r) e^{im\varphi} \sin \frac{\pi n_z z}{L}$ нормирована на единицу и $\int_0^R f_m^2 r dr = 1$. Выражение (3,21) сохраняется с заменой $A_{0\varphi}$ на

$$A_\varphi \text{ и в основном состоянии } m=0 \text{ попрежнему } \mathbf{j} = -\frac{e^2 n}{\mu c} \mathbf{A}.$$

До тех пор, пока $H_1 \ll H_0$, цилиндр можно считать однородно намагниченным и его момент на единицу длины равен ($d\mathbf{v} = 2\pi r dr$):

$$M_A = \frac{1}{2c} \int r j_\varphi dv = \frac{e^2 n R^2}{8\mu c^2} \pi R^2 H_0 = \pi R^2 \chi H_0, \quad (3,23)$$

где χ — восприимчивость.

В пренебрежении членами порядка H_0^2 момент цилиндра начнёт меняться только тогда, когда под действием поля ближайший к нижнему уровень E_{-111} опустится до нижнего уровня E_{011} , положение которого от поля не зависит. Согласно (3,17) и (3,20) это будет иметь место в поле

$$H_{kn} = \frac{E_{-111}(0) - E_{011}(0)}{\frac{e \hbar}{2\mu c}} = \frac{8,9 \hbar c}{e^2 R^2} = \frac{5,85 \cdot 10^{-7}}{R^2}. \quad (3,24)$$

При большой концентрации n экранирующим полем H_1 пренебречь нельзя и в условиях, когда глубина проникновения поля

$$\delta = \sqrt{\frac{\mu c^2}{4\pi e^2 n}} \ll R,$$

имеем:

$$H = H_0 e^{-\frac{R-r}{\delta}}, \quad A_z = \delta H, \quad E_{m n_z k}(H) - E_{m n_z k}(0) \sim \sim \frac{e \hbar m}{2 \mu c} \left(\frac{\delta}{R} \right)^3 H_0, \quad (3,25)$$

так как $f_0^2 \sim \frac{1}{R^2}$ в силу условия $\int_0^R f_0^2 r dr = 1$.

В рассматриваемом случае разрушение сверхпроводимости начнется в поле

$$H_{кс} \sim \frac{R^2}{\delta^2} \quad H_{кл} \sim \frac{5 \cdot 10^{-7}}{\delta^2} \quad (3,26)$$

и при $\delta \sim 10^{-5}$ ($n \sim 5 \cdot 10^{31}$) $H_{кс} \sim 5 \cdot 10^3$ эрстеда.

Таким образом, если бы электроны в металле образовывали бозе-газ, то явление сверхпроводимости даже в довольно сильных полях имело бы место просто в силу дискретности уровней в сосуде конечных размеров. Положение, однако, существенно меняется для вырожденного ферми-газа, с которым ещё имеет какой-то смысл сравнивать электроны в металле. Дело в том, что для уровней энергии вблизи фермиевской поверхности расстояние между уровнями, при представляющих интерес значениях n и R , совершенно ничтожно, в силу чего оказываются ничтожными и поля $H_{кл}$ и $H_{кс}$.

Для оценки среднего расстояния между уровнями на границе Ферми учтём, что при больших импульсах форма сосуда мало существенна и можно воспользоваться известными выражениями для числа уровней в кубическом сосуде $Z(E) dE = \frac{2^{1/2} \mu^{3/2} E^{1/2} V dE}{8 \pi^2 \hbar^3}$, где $Z(E) dE$ — число уровней в интервале энергии dE и V — объём сосуда (в I, § 6 величина $Z(E)$ обозначена через $\frac{dN}{dW}$). Далее,

на границе Ферми энергия $E_0 \sim \frac{\pi^2 \hbar^2 m_{\text{макс}}^2}{2 \mu R^2}$, где положено $R \sim L$

и $m_{\text{макс}}$ — максимальное встречающееся значение квантового числа m ($m_{\text{макс}} \sim k_{\text{макс}} \sim n_{z \text{макс}} \sim n^{1/3} R$, где n — концентрация частиц). Среднее расстояние между уровнями

$$\Delta E \sim \frac{1}{Z(E)} \sim \frac{\hbar^2}{\mu R^2 m_{\text{макс}}} \sim \frac{\hbar^2}{\mu n^{1/3} R^3}. \quad (3,27)$$

По порядку величины, как это и должно быть, ΔE есть отношение энергии вырождения $E_0 \sim \frac{\hbar^2 n^{1/3}}{\mu}$ к полному числу частиц в сосуде nR^3 .

Значение $E_{-111}(0) - E_{011}(0)$ в (3,24) порядка $\frac{\hbar^2}{\mu R^2}$, т. е. больше (3,27) в $m_{\text{макс}}$ раз. Кроме того, согласно (3,20), изменение уровней на границе Ферми с $m \sim m_{\text{макс}}$ в $m_{\text{макс}}$ раз больше смещения уровня с $m = 1$. Отсюда ясно, что значения $H_{\text{кл}}$ и $H_{\text{кс}}$ (см. (3,24) и (3,26)) в случае ферми-газа должны быть разделены на величину порядка $m_{\text{макс}}^2 \sim n^{2/3} R^2 \sim 10^{14}$ (при $n \sim 5 \cdot 10^{21}$ и $R \sim 1$). В этом случае поле $H_{\text{кс}} \sim \frac{5 \cdot 10^{-7}}{82 n^{2/3} R^2} \sim 10^{-10}$ эрстеда.

Как ни груба сделанная оценка и учитывая даже, что поле $H_{\text{кс}}$ отвечает только началу разрушения сверхпроводящего (идеально диамагнитного) состояния, совершенно ясно, что в случае ферми-газа с $n \sim 10^{22}$ разрушение этого состояния будет достигаться в ничтожно малых полях.

В поле, которое обеспечивает сильное смещение уровней, ферми-газ будет обладать лишь слабым диамагнетизмом (3,14). Малость эффекта связана при этом с почти полной компенсацией диамагнитного тока $j = -\frac{e^2}{\mu c} \psi^* \psi A$ парамагнитным током $\frac{e \hbar n}{\mu c} \psi^* \psi$ (см. (3,21)).

В самом деле, диамагнитный ток обеспечивает появление у цилиндра момента (3,23), а момент парамагнитного тока $j_{\alpha\tau}$, связанного с α -м электроном по порядку величины, равен

$$M = \frac{1}{2c} \int j_{\alpha\tau} r dv \sim \frac{e \hbar m}{\mu c}.$$

При отсутствии поля каждый электрон обеспечивает появление такого же момента (момент не зависит от H_0 !), но поскольку электроны со значениями $m' = -m$ встречаются в равном числе с электронами с квантовым числом m , полный момент тела равен нулю. При включении поля уровни с $m < 0$ понижаются, а уровни с $m > 0$ повышаются и поэтому в состоянии с минимумом энергии (по предположению $T = 0$ так, что свободная энергия совпадает с энергией) имеется избыточный парамагнитный момент *). Этот момент равен сумме моментов электронов, перешедших на уровни с $m < 0$; число таких электронов порядка числа уровней в интервале энергии $\frac{e \hbar m_{\text{макс}} H_0}{\mu c}$, на которую под влиянием поля расходятся уровни с $m_{\text{макс}} > 0$ и $m_{\text{макс}} < 0$, т. е. порядка

$$\begin{aligned} \Delta n \sim Z(E) \frac{e \hbar m_{\text{макс}} H_0}{\mu c} &\sim \frac{e \hbar m_{\text{макс}} H_0}{\mu c} \frac{n R^3}{E_0} \sim \\ &\sim \frac{e \hbar m_{\text{макс}}}{\mu c} \cdot \frac{\mu R^3 m_{\text{макс}}}{\hbar^2}. \end{aligned} \quad (3,27')$$

*) В этом разделе считаем, что $e > 0$; в противном случае, т. е. при $e < 0$, роль уровней с $m > 0$ играют уровни с $m < 0$ и наоборот.

Таким образом, полный парамагнитный момент цилиндра, отнесённый к единице длины, по порядку величины равен

$$M_{\text{п}} \sim \frac{e\hbar m_{\text{макс}}}{\mu c} \frac{\Delta n}{R} \sim \frac{e^2 m_{\text{макс}}^3 R H_0}{\mu c^2} \sim \frac{e^2 n R^2}{\mu c^2} \cdot \pi \cdot R^2 H_0, \quad (3,28)$$

так как в нашем грубом приближении было принято (при оценке $m_{\text{макс}}$), что $R \sim L$ и, следовательно, момент на единицу длины равен полному моменту, делённому на R (этим и объясняется появление R в знаменателе в первом выражении (3,28)). Полученный парамагнитный момент по абсолютной величине того же порядка, как и диамагнитный момент (3,23). Более точный расчёт (см. ²⁸) показывает, что если не учитывать дискретности уровней, момент $M_{\text{п}}$ в точности компенсирует момент $M_{\text{д}}$, как это и должно быть в классической теории, к которой сделан переход при пренебрежении расстоянием между уровнями. Если учитывать дискретность уровней, то члены $M_{\text{п}}$ и $M_{\text{д}}$ не компенсируются в точности, а дают небольшой разностный диамагнитный эффект (спин не учитывается!). Соответствующее значение восприимчивости (3,14) по порядку величины получается при этом из таких же соображений, как выше, но полагая, что избыточная энергия и момент равны $\frac{e\hbar H_0}{\mu c}$ и $\frac{e\hbar}{\mu c}$, а не $\frac{e\hbar m_{\text{макс}} H_0}{\mu c}$ и $\frac{e\hbar m_{\text{макс}}}{\mu c}$ (подобная замена имеет довольно ясный смысл, так как отвечает разностному эффекту, связанному с изменением квантового числа m на наименьшую величину — на единицу).

Рассмотренная модель идеального газа иллюстрирует общие соображения, изложенные в § 3 а). До тех пор пока Ψ -функцию системы заряженных частиц можно считать неизменной, появляется диамагнитный ток, который подчиняется уравнению для сверхпроводящего тока $\text{rot } \mathbf{A}_{\text{с}} = -\frac{1}{c} \mathbf{H}$ (см. (3,11)). Под влиянием магнитного поля происходит зеемановское расщепление вырожденных уровней и когда уровни начинают перекрываться, «сверхпроводящее» состояние постепенно разрушается*). Случай круглого цилиндра, о котором была речь, не только особенно прост, но и выделен в том отношении, что собственные функции при этом в первом приближении не меняются при включении поля. В сосуде, не обладающем аксиальной симметрией (например, в сосуде с прямоугольным сечением), Ψ -функции меняются уже в первом порядке относительно H_0 . Однако в качественном отношении этот момент не может быть существенен и пока не наступает перекрытия

*) Заметим, что в разобранным примере, при пренебрежении членами H_0^2 Ψ -функции отдельных частиц не меняются. Но Ψ -функция всей системы при перекрытии уровней изменяется в силу перераспределения частиц по состояниям.

уровней, диамагнитный ток не будет скомпенсирован парамагнитным эффектом.

Критическое магнитное поле определяется расстоянием между уровнями и для вырожденного ферми-газа с концентрацией, отвечающей концентрации электронов в металле, это поле ничтожно мало. Отсюда ясно, что в модели свободных электронов нельзя получить сверхпроводимости, причём обычный учёт влияния кристаллической решётки (т. е. учёт периодического потенциального поля) ничего здесь изменить не может. Для возникновения сверхпроводимости в модели, которая базируется на приближении независимых электронов, необходимо появление какой-то щели в энергетическом спектре на границе Ферми. Допустим, например, что энергетический спектр электронов в цилиндрическом сосуде таков, что на границе Ферми при $E = E_0$ имеется щель с шириной, равной

$$\Delta \sim kT_K \sim 10^{-16} \div 10^{-15}, \quad (3,29)$$

так как критическая температура $T_K \sim 1 \div 10^\circ$ и если какая-то щель существует и связана с явлением сверхпроводимости, то её ширина должна по порядку величины определяться именно значением kT_K .

При $E \gg E_0 + \Delta$ спектр будем предполагать фермиевским, но при $E \leq E_0$ мы должны принять, что магнитное поле не оказывает заметного влияния на состояние системы в целом *). Разрушение сверхпроводимости в такой схеме, могущей без дальнейшего уточнения иметь лишь самое грубое иллюстративное значение, начинается в поле, в котором зеемановское смещение уровня с $E(0) = E_0 + \Delta$ достигает значения Δ , т. е. без учёта экранировки в поле

$$H_{кл} \sim \frac{\Delta}{\frac{e\hbar m_{\text{макс}}}{2\mu c}} \sim \frac{\Delta}{\frac{e\hbar}{2\mu c} R n^{1/3}} \sim \frac{10^4 T_K}{n^{1/3} R} \sim \frac{10^{-2}}{R} \quad (3,30)$$

и при учёте экранировки в поле

$$H_{кс} \sim H_{кл} \frac{R^2}{\delta^2} \sim \frac{\Delta R}{\frac{e\hbar n^{1/3} \delta^2}{2\mu c}} \sim \frac{10^4 T_K R}{n^{1/3} \delta^2} \sim 10^8 R, \quad (3,31)$$

*) Другими словами считаем, что выражения (3,20) и (3,22) при $E \leq E_0$ не справедливы, ибо в противном случае диамагнетизм исчез бы из-за перераспределения электронов по уровням, которые при отсутствии поля лежали ниже E_0 . Конечно, подобные предположения совершенно непоследовательны, но это в такой же мере относится и к самому введению щели в спектр свободных частиц. В^{28, 29, 30} предположение об отсутствии при $E \leq E_0$ перераспределения электронов по уровням связывается с наличием некоторой «энергии обращения скорости» (Bahnhkehrenergie).

где $m_{\text{макс}} \sim n^{1/3}R$ и при переходе к численной оценке положено $n \sim 10^{21}$, $\delta \sim 10^{-5}$ и $T_k \sim 10^\circ$.

Если сверхпроводимость разрушена и поле уменьшается, т. е. если отправляются от нормальной фазы, то соответствующее состояние может существовать пока поле $H_0 > H_{\text{кл}}$. Отправляясь же от сверхпроводящего состояния, приходим к нормальному состоянию в поле порядка $H_{\text{кс}}$. Но равновесие фаз может иметь место только при определённом поле H_k так, что область $H_{\text{кл}} < H_0 < H_k$ отвечает переохлаждённой нормальной фазе, а область $H_{\text{кс}} > H_0 > H_k$ — перегретой сверхпроводящей фазе. Поле H_k , а также точные значения $H_{\text{кл}}$ и $H_{\text{кс}}$ могут быть найдены только в результате более детальных расчётов и нахождения свободной энергии системы в поле. Ввиду непоследовательности принятой модели подобные вычисления вряд ли имели бы какую-то ценность, в силу чего ограничимся замечанием, что, применяя по аналогии с уравнением Ван-дер-Ваальса так называемое «правило площадей», определяющее давление, при котором сосуществуют равновесные жидкость и газ, можно заключить^{28–30}, что равновесное поле H_k примерно равно среднему геометрическому между $H_{\text{кл}}$ и $H_{\text{кс}}$, т. е.

$$H_k \sim \sqrt{H_{\text{кл}} H_{\text{кс}}} \sim \frac{\Delta}{\frac{e\hbar}{2\mu c} \cdot n^{1/3} \delta} \sim kT_k \sqrt{\frac{4\pi n}{E_0}} \sim 10^2 \div 10^3, \quad (3,32)$$

где учтено, что

$$\delta = \sqrt{\frac{\mu c^2}{4\pi e^2 n}} \quad \text{и} \quad E_0 \sim \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2\mu}.$$

Приведённые соображения могут претендовать только на одно: они показывают, что введение на границе Ферми какой-то щели разумной ширины (3,29) может привести к сохранению сверхпроводимости до отвечающих опыту полей $H_k \sim 10^2 \div 10^3$. Задача теории состоит в том, чтобы существенно уточнить принимаемую модель и обосновать её, исходя из рассмотрения взаимодействия электронов друг с другом и с решёткой металла.

в) Роль колебаний решётки и высокой диэлектрической постоянной. Некоторые критические замечания

Попытки найти спектр электронов в металле и его связь с явлением сверхпроводимости должны проводиться не только с учётом уже сделанных замечаний, но и принимая во внимание два следующих существенных момента, вытекающих из экспериментальных данных.

Во-первых, в сверхпроводниках недавно был установлен изотопический эффект (см. I, § 1 и ^{31,32}), причём соблюдается соотношение

$$M^{1/2}T_K = \text{const}, \quad dT_K = -\frac{T_K}{2M} dM, \quad (3,33)$$

где M — масса атома и T_K — критическая температура.

Наличие такого сильного изотопического эффекта означает, что сверхпроводимость не может быть понята как чисто электронное явление, надеяться на что раньше были, казалось бы, все основания (решётка при сверхпроводящем переходе заметным образом не изменяется, влияние на сверхпроводимость давления и деформаций сравнительно невелико и т. д.). Если бы сверхпроводимость была чисто электронным явлением (точнее, если бы её появление было возможно и при неподвижных ядрах), то изотопический эффект также существовал бы, но был бы значительно меньше наблюдаемого. Так, для атомных термов изменение энергии, связанное с конечностью массы ядра, по сравнению со случаем неподвижных ядер порядка $\Delta E \sim -\frac{m}{M} E$, и таким образом можно было бы ожидать, что изменение критической температуры dT_K при изменении массы ядра dM будет порядка (полагая $E \sim kT_K$, m — масса электрона):

$$dT_K \sim -\frac{m}{M} \frac{T_K}{M} dM \sim -(10^{-4} \div 10^{-5}) \frac{T_K}{M} dM. \quad (3,34)$$

Поскольку наблюдаемый эффект на несколько порядков выше значения (3,34), ясно, что колебания решётки, и в первую очередь её нулевые колебания, существенны для самого появления сверхпроводимости. Например, если связывать сверхпроводимость со щелью в энергетическом спектре электронов, то ширина этой щели должна сильно зависеть от массы атома M (полагая ширину щели $\Delta \sim kT_K$ получаем, что $\Delta \sim \frac{\text{const}}{M^{1/2}}$).

Второй момент, который также представляется весьма важным, связан с тем, что в сверхпроводящем состоянии диэлектрическая постоянная должна, повидимому, достигать огромных значений $\epsilon_0 \sim 10^8 \div 10^{10}$ (см. I, § 6)*). Это обстоятельство ещё окончательно

*) Заметим, что исключительно сильное возрастание диэлектрической постоянной ϵ_0 быть может характерно не только для сверхпроводников, но имеет место и при повышении сопротивления несверхпроводящих металлов при $T \rightarrow 0$ (см., например, 4). Действительно, если проводимость в этом случае падает из-за уменьшения числа свободных электронов, то эти электроны переходят в связанное состояние, причём характерные частоты $\omega_0 \sim kT_0$, где T_0 — соответствующая температура, и, так же как в случае сверхпроводимости, значение ϵ_0 должно, повидимому, быть очень велико (см. I, § 6).

экспериментально не доказано. Однако совсем недавно⁴⁶ были получены данные, полностью подтверждающие предположение об указанном значении ϵ_0 в сверхпроводнике (согласно⁴⁶ для олова при $T \sim 2^\circ$, $\epsilon_0 \sim 5 \cdot 10^9$ и при $T \rightarrow T_K$, $\epsilon_0 \rightarrow 0$; указание на значение $\epsilon_0 \sim 10^9$ имеется также в работе⁴⁷, с которой автор, к сожалению, не мог детально ознакомиться).

Поскольку появление сверхпроводимости связывается с каким-то эффектом, которому отвечает энергия $\Delta \sim kT_K \sim 10^{-16} \div 10^{-15}$, нужно указать на возможный источник такой энергии, неучитываемый в обычной «газовой» модели электронов в металле.

Энергия кулоновского взаимодействия между электронами в газовой модели фактически игнорируется (см. § 1) и по порядку величины равна (все энергии, так же как величину Δ , относим на один электрон)

$$E_K \sim \frac{e^2}{r} \sim e^2 n^{1/3} \sim 10^{-12} \div 10^{-11} \sim 1 \div 10 \text{ эв.} \quad (3,35)$$

В силу того, что $E_K \sim E_0 \gg \Delta \sim kT_K$ часто считают, что кулоновская энергия междуэлектронного воздействия не имеет отношения к сверхпроводимости. Подобное мнение, однако, совершенно не убедительно. Во-первых, всегда может оказаться, что эффективна некоторая малая часть энергии E_K , в то время как большая часть энергии не проявляется, например, в силу принципа Паули. С этой точки зрения существенно лишь кулоновское взаимодействие электронов в зоне размытости распределения

Ферми, т. е. взаимодействие $n \frac{k T_K}{E_0} \sim 10^{-5} \div 10^{-4} n$ электро-

нов, в силу чего $E'_K \sim e^2 \left(n \frac{k T_K}{E_0} \right)^{1/3} \sim 10^{-14} \div 10^{-13}$. Во-вторых, энергия взаимодействия может резко упасть из-за экранировки, которая в сверхпроводнике, в силу большого значения ϵ_0 , будет вероятно особенно существенна (достаточно сказать, что даже

при $n \sim 10^{23}$ и $\epsilon_0 \sim 10^8$, $E''_K \sim \frac{e^2}{\epsilon_0 r} \sim \frac{e^2 n^{1/3}}{\epsilon_0} \sim 10^{-20}$; для быстро движущихся электронов значение ϵ_0 будет меньше статического и может оказаться, что $E''_K \sim kT_K \sim 10^{-16} \div 10^{-15}$ для чего нужно, чтобы $\epsilon_0 \sim 10^3 \div 10^4$).

Энергия магнитного взаимодействия между электронами порядка (v — скорость электрона)

$$E_M \sim \frac{e^2 v^2}{r c^2} \sim e^2 n^{1/3} \frac{E_0}{m c^2} \sim \frac{e^2 \hbar^2 n}{m^2 c^2} \sim E_K \cdot \frac{E_0}{m c^2} \sim 10^{-17} \div 10^{-16}, \quad (3,36)$$

так как $E_0 \sim 1 \div 10 \text{ эв}$ и $m c^2 \simeq 5 \cdot 10^5 \text{ эв}$.

Учёт энергии магнитного взаимодействия представляется на первый взгляд особенно привлекательным, так как здесь без дальнейшего $E_m \sim kT_k$ и, главное, именно магнитное взаимодействие естественно «противопоставить» влиянию магнитного поля, разрушающего сверхпроводимость. Действительно, из § 3б) ясно, что разрушение сверхпроводимости или, точнее, её непоявление, связано с перераспределением электронов по уровням при наложении магнитного поля. Перераспределение это сводится к изменению направления движения части электронов на обратное так, что вместо состояния с магнитным квантовым числом $m < 0$, электрон переходит в состояние с $m > 0$. Для появления сверхпроводимости в такой схеме достаточно наличия некоторой энергии $E \sim kT_k$, препятствующей изменению электроном направления его скорости (см. ^{28, 30}; сверхпроводник оказывается при этом в известном отношении родственным орбитальному антиферромагнетику). Энергия магнитного взаимодействия как раз зависит от направления скорости и поэтому привлекает к себе особое внимание. Однако легко видеть, что обычное (классическое) магнитное взаимодействие не может привести к требуемому результату, так как антипараллельные токи отталкиваются, т. е. магнитное взаимодействие благоприятствует параллельности скоростей всех электронов вместо того, чтобы препятствовать связанному с установлением такой параллельности обращению скоростей части электронов. Обменное магнитное взаимодействие между электронами с параллельными спинами приводит к притяжению антипараллельных токов, но по величине это взаимодействие для свободных электронов значительно меньше обычного магнитного ²⁹. Если же исходить не из модели свободных электронов, то весь вопрос перемещается совсем в другую плоскость (об этом будет идти речь ниже) и какие-нибудь преимущества учёта именно магнитного взаимодействия уже совсем неясны. Кроме того, в силу указанной ранее необходимости с самого начала принимать во внимание влияние решётки ясно, что как магнитное, так и кулоновское взаимодействия между электронами не могут сами по себе обеспечить появление сверхпроводимости.

В «газовой» электронной модели металла взаимодействие электрона с колебаниями решётки учитывается лишь при вычислении проводимости и других кинетических коэффициентов и сводится к рассмотрению процессов излучения, поглощения и рассеяния фононов решётки. Однако наличие колебаний и, по сути дела, конечность массы атома (ядра) M приводит также к тому, что энергетические уровни электронов должны быть смещены по сравнению с уровнями при отсутствии колебаний ($M \rightarrow \infty$) на величину $|\Delta E| \sim \frac{m}{M} E$. Поэтому можно сказать, что взаимодействие с решёткой приводит к появлению у электрона (с энергией

у поверхности Ферми $E_0 \sim 10^{-12} \div 10^{-11}$) добавочной энергии

$$E_p \sim \frac{m}{M} E_0 \sim m u^2 \sim 10^{-17} \div 10^{-16} \sim k T_K, \quad (3,37)$$

где $u \sim \sqrt{\frac{E_0}{M}} \sim 10^5$ — скорость звука.

Привлечение к рассмотрению взаимодействия (3,37) важно и интересно потому, что оно сразу же приводит к соотношению типа (3,33)*.

Как указал Фрёлих³³, энергию E_p можно трактовать как собственную энергию электрона, связанную с виртуальным излучением и поглощением фононов. Учитывая взаимодействие электронов с решёткой в применении к свободному (в исходном приближении) полностью вырожденному ферми-газу, Фрёлих пришёл к заключению, что при достаточно сильной энергии связи с решёткой, могущей осуществляться в сверхпроводящих металлах, поверхность Ферми существенно меняется. Так, если для

*) Согласно (3,37) $M T_K = \text{const}$, в то время как на опыте $M^{1/2} T_K = \text{const}$ (см. (3,33)), но в обоих случаях $d T_K \sim \frac{T_K}{M} dM$. Именно этот последний момент особенно существен (см. (3,34)). Что же касается более детального вида связи между M и T_K , то сделанные прикидки порядка величин для её установления недостаточны. Это связано, в частности, с тем, что все энергетические соображения в первую очередь относятся к случаю $T = 0$. Поэтому правильнее сравнивать не энергию взаимодействия на один электрон с $k T_K$, а энергию взаимодействия в единице объёма с $\frac{H_{0K}^2}{8\pi}$, где $H_{0K} \sim 5 \cdot 10^2$ — критическое магнитное поле при $T = 0$.

Изменение энергии электронов, связанное с конечностью массы атома M порядка $E_p' \sim \frac{m}{M} E_0 n \sim 10^5 \div 10^6$ ($n \sim 10^{22}$, $\frac{m}{M} E_0 \sim 10^{-17} \div 10^{-16}$), т. е.

несколько больше $\frac{H_{0K}^2}{8\pi}$. Однако, при оценке порядка величин в этом пункте вряд ли можно видеть затруднение, так как взаимодействие с колебаниями решётки имеет, конечно, место и в нормальной фазе и величина $\frac{H_{0K}^2}{8\pi}$ (разность энергий обеих фаз) должна сравниваться с разностью энергий E_p' в обеих фазах. Полагая, что H_{0K}^2 пропорционально E_p' , имеем $H_{0K} \propto M^{-1/2}$, что в общем отвечает опыту³². В первом приближении $H_{0K} \propto T_K$, откуда $M^{1/2} T_K = \text{const}$.

При этом нужно оговорить, что в то время как соотношение $M^{1/2} T_K = \text{const}$ установлено с большой точностью в отношении соотношения $M^{1/2} H_{0K} = \text{const}$ этого сказать ещё нельзя³².

свободных электронов поверхность Ферми является сферой с радиусом $p_0 = \sqrt{2mE_0}$, то в случае достаточно сильной связи с решёткой равновесным при $T=0$ будет распределение, показанное на рис. 1. Электроны заполняют шар с радиусом p'_0 , затем при $p'_0 < p < p''_0$ электронов нет и, наконец, область $p''_0 < p < p'''_0$ опять заполнена электронами. Ширина щели $\Delta' = \frac{p_0'^2}{2m} - \frac{p_0''^2}{2m} \sim E_F$.

Состояние, для которого поверхность Ферми имеет такой вид, как на рис. 1, Фрëлих идентифицировал со сверхпроводящим состоянием.

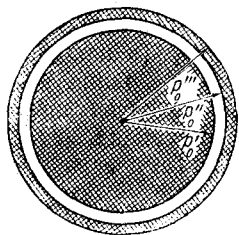


Рис. 1.

Дальнейшее исследование поставленной задачи показало^{34-36, 27}, что утверждение Фрëлиха о возможности появления многосвязной поверхности рис. 1 совершенно недоказательно. Дело в том, что использование теории возмущений, положенной в основу расчётов Фрëлиха, при наличии сильного взаимодействия электронов с решёткой незаконно и поэтому ни о каком доказательстве появления щели Δ' методом теории

возмущений не может быть и речи. Этот вывод, обоснованный в^{34-35, 27}, ясен также из следующих простых соображений. Появление щели Δ' означает, что вблизи поверхности Ферми возмущение не слабо, а, напротив, очень сильно, так как изменяет функцию распределения на величину порядка исходных значений этой функции. Вместе с тем теория возмущений применима лишь пока возмущение мало, и таким образом ясно, что таким методом получить сколько-нибудь надёжно «расслоение» поверхности Ферми нельзя.

С точки зрения теории сверхпроводимости ещё более существен другой момент: если даже допустить на мгновение, что расчёт Фрëлиха правилен и поверхность Ферми действительно принимает форму рис. 1, то отсюда ещё отнюдь не следует появление сверхпроводимости. Другими словами, проведённая Фрëлихом идентификация состояния со щелью (т. е. состояния с поверхностью типа рис. 1) со сверхпроводящим состоянием абсолютно не обоснована и, более того, ошибочна. Мы уже говорили о том, что для возникновения сверхпроводимости, повидимому, нужно появление некоторой щели в энергетическом спектре электронов. Но это совсем не значит, что любая щель приведёт к сверхпроводимости. В случае рис. 1 при $p > p''_0$ электрон может иметь любую энергию и при включении магнитного поля, считая соответствующее возмущение независимым от возмущения, обусловленного решёткой (в 1-м приближении это законно), произойдёт, каза-

лось бы, перераспределение электронов по уровням и получится обычный диамагнетизм Ландау. Каким образом взаимодействие с решёткой, уже сыгравшее свою роль (оно обусловило, по предположению, появление щели на рис. 1), может помешать перераспределению электронов и компенсации диамагнитного тока

$j = -\frac{e^2 n}{mc} A$ парамагнитным током остаётся неясным; для этого

не видно никаких причин. В ³³ Фрёлих даже и не пытается связать состояние со щелью с диамагнитным током и надеется на появление в его модели каких-то спонтанных токов. Эта часть работы ³³ совсем уже не выдерживает никакой критики и на ней нет смысла останавливаться, так как сам автор отказывается от неё в следующем сообщении ³⁷. Здесь он базируется на диамагнитной гипотезе и пытается показать, что при учёте взаимодействия с решёткой перераспределение электронов по состояниям в магнитном поле не может компенсировать диамагнитный ток, в силу чего наступает сверхпроводимость. Соответствующее рассмотрение, однако, не обладает никакой доказательной силой и в нём, по существу, принимается то, что нужно доказать. Мы не будем останавливаться на этом вопросе подробнее, тем более, что конкретная ошибка Фрёлиха выявлена в специальном исследовании Шафрота ³⁸, весьма общим образом показавшего, что при учёте взаимодействия электронов с решёткой (фононным полем) в рамках теории возмущений сверхпроводимости получить нельзя *). Этот вывод находится в полном согласии со всем сказанным выше: для сверхпроводимости нужна «жесткость» волновой функции, которая может быть обеспечена появлением некоторой щели, но не всякой щели, и, в частности, на щели рис. 1; об этом см. также § 4 б). В рамках теории возмущений, применяемой к свободному электронному газу, нельзя получить подобного результата, соответствующего сильному (а не слабому) изменению свойств системы вблизи поверхности Ферми. Итак, исходя из газовой модели и как-то «подправляя» её путём учёта различных слабых возмущений, получить сверхпроводимость нельзя. Отсюда явствует, в согласии со сказанным ещё в § 1, что развитие микротeorии сверхпроводимости связано с радикальным изменением принятой газовой модели электронов в металле или даже

*) В работах Бардина ^{23, 27} взаимодействие электронов с колебаниями решётки также рассматривается методом теории возмущений и делается утверждение, что в результате этого взаимодействия эффективная масса электрона вблизи поверхности Ферми оказывается очень малой. Не говоря уже о полной недоказательности этого результата, даже если бы эффективная масса электрона при $E \sim E_0$ и оказалась бы малой, это ещё не приводило бы к сверхпроводимости (см. § 3а). Критика работ Бардина содержится также в только что появившейся заметке ¹²¹.

с принятием какой-то другой модели металла *). Но в настоящее время на пути сколько-нибудь строгого и последовательного рассмотрения задачи многих тел (например, электронов в металле), в плане, интересном для теории сверхпроводимости, нет ещё никаких успехов. Поэтому по крайней мере на первом этапе развития микротории сверхпроводимости должен привлечь к себе внимание анализ даже весьма грубых моделей металла (плазма, заряженная жидкость, связанная с заряженным упругим континуумом, и т. п.). Более того, крупным успехом явилось бы даже не нахождение энергетического спектра электронов в металле, а достаточно полное выяснение вопроса о том, какой спектр достаточен для объяснения свойств сверхпроводников и механизма разрушения сверхпроводимости при температуре выше критической ($T > T_K$) и в магнитном поле H большем критического поля $H_K(T)$. Важность и плодотворность теории, связанной с постулированием определённого спектра, ясна на примере микротории сверхтекучести гелия II, развитой Ландау^{18, 19}, именно на таком пути, который можно назвать квазимикроскопическим. Учитывая сказанное, а также несомненную родственность явлений сверхпроводимости и сверхтекучести, мы должны будем ниже кратко остановиться и на этом последнем явлении.

4. КВАЗИМИКРОСКОПИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

а) Спектр «элементарных возбуждений» и теория сверхтекучести гелия II

В газах и твёрдых телах тепловое движение может быть, как известно, прослежено весьма детально и в общем виде — безотносительно к конкретным свойствам данного вещества. Напротив, в случае жидкостей — совокупности сильно взаимодействующих частиц, не образующих кристаллической решётки, — тепловое движение является очень сложным (так как в отличие от твёрдых тел смещения атомов не являются малыми) и рассмотреть его

*) В работе Тиссы⁵⁴ делается попытка описать основное состояние сверхпроводников как некоторую суперпозицию атомных волновых функций. Однако нам не удалось обнаружить в этой работе каких-нибудь моментов, представляющих интерес. Доказательство же того, что из принятой модели вытекает⁵⁵ уравнение (1,2), приводит фактически к за-

ключению, что это уравнение справедливо лишь для времён $t \ll \frac{10^{-31}}{E}$, где E — напряжённость электрического поля. Это значит, что при сколько-нибудь разумных значениях поля уравнение (1,2) всегда совершенно не пригодно, в полном противоречии с опытом и с утверждением, которое «доказывается» в⁵⁵.

достаточно общим образом не удаётся. Однако, при достаточно низких температурах, вблизи абсолютного нуля, где тепловое движение наименее интенсивно и относительно наиболее просто, известный прогресс в понимании свойств жидкостей всё же уже достигнут. Он связан с представлением о том, что всякое слабо возбуждённое состояние любого макроскопического тела может рассматриваться как совокупность отдельных «элементарных возбуждений»^{1, 18, 19, 39}. Эти возбуждения с квантово-механической точки зрения подобны некоторым частицам (или «квазичастицам»), движущимся в теле и обладающим определённой энергией E и импульсом p .

В газе «элементарными возбуждениями» являются просто отдельные атомы и

$$E = \frac{p^2}{2m}. \quad (4,1)$$

В случае твёрдого тела «элементарные возбуждения» суть фононы, причём для акустических ветвей спектра кристалла при не слишком больших импульсах,

$$E = up, \quad (4,2)$$

где u — скорость звука.

Для борновских (оптических) ветвей в первом приближении $E = \hbar \omega_0 + ap^2$, где ω_0 — предельная частота оптического колебания и a — постоянная *).

Вблизи абсолютного нуля жидкими являются лишь гелий He^4 и гелий He^3 , а также их смеси. Эти жидкости можно назвать «квантовыми жидкостями», так как согласно классической теории все тела при $T \rightarrow 0$ должны быть твёрдыми и незатвердевание гелия при обычных давлениях связано с наличием нулевых колебаний. Понимая термин жидкость расширительно, как это сделано выше, к числу жидкостей можно отнести электроны проводимости в металле («электронная жидкость»), а также некоторые другие объекты (например, совокупность взаимодействующих спинов в ферромагнетиках и парамагнетиках может рассматриваться как «спиновая жидкость» и т. д.). Спектр квантовой жидкости теоретически в настоящее время получить нельзя и только на основе известных из опыта свойств жидкого гелия и металлов можно указать на существование спектров по крайней мере двух типов: фермиевского и бозевского (см. ¹ §§ 66 — 69).

Фермиевский спектр подобен спектру электронов на границе вырожденного ферми-газа и характеризуется тем, что элементар-

*) Здесь и в (4,2) для простоты не учитывается анизотропия. Для каждой ветви постоянные u , ω_0 и a , вообще говоря, различны. Кроме того, не делается различия между импульсом и квазиимпульсом.

ные возбуждения появляются и исчезают парами («электрон» и «дырка») и, повидимому, имеют спин $1/2$ и подчиняются статистике Ферми. Импульс одной из компонент пары («электрона») всегда больше некоторого граничного импульса p_0 и

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m}, \quad p \geq p_0. \quad (4,3)$$

Импульс «дырки» всегда меньше p_0 и $E = \frac{p_0^2}{2m} - \frac{p^2}{2m}$.

Жидкость с таким спектром ведёт себя, по крайней мере с точки зрения её термодинамических свойств (величина и температурная зависимость теплоёмкости и т. д.), совершенно так же, как вырожденный идеальный ферми-газ. Поскольку термодинамические свойства металлов в нормальном (несверхпроводящем) состоянии подобны свойствам такого газа (электронная часть теплоёмкости $c^{(e)} = \gamma T$), можно полагать, что спектр электронной жидкости в нормальном состоянии является фермиевским спектром (4,3) — об этом уже была речь в § 1. Фермиевским является, повидимому, также спектр жидкого He^3 .

В случае спектра бозевского типа элементарные возбуждения появляются и исчезают поодиночке и подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна. При малых импульсах p , пока длина волны $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} \gg a \sim 10^{-8}$ (a — междоузельное расстояние), эти возбуждения от-

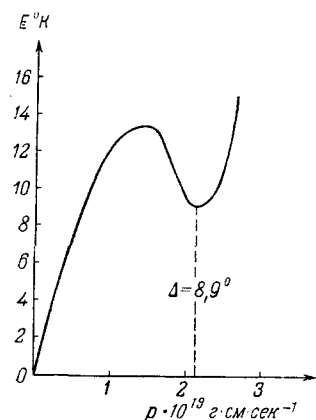


Рис. 2.

вечают обычным звуковым волнам, т. е. являются фононами, для которых $E = up$ (см. (4,2)), где u — скорость звука в жидкости (здесь, в отличие от твёрдого тела, речь может идти только о продольном звуке) и p — импульс возбуждения. Изменение характера спектра с увеличением импульса p может быть указано только в результате обработки экспериментальных данных о теплоёмкости данного вещества. В случае гелия II, спектр которого относится к бозевскому типу (см. ниже), опытные данные согласуются со спектром, изображённым на рис. 2 (см. 18, 19, 40).

При тепловом равновесии элементарные возбуждения имеют энергию, отвечающую окрестности одного из минимумов энергии на кривой рис. 2. Вблизи первого минимума, т. е. вблизи энергии $E = 0$, возбуждения, как сказано, суть фононы с $E = up$.

Вблизи второго минимума, расположенного при $p = p_0$, энергия возбуждений, называемых ротонами, имеет вид:

$$E = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu}. \quad (4,4)$$

По последним данным⁴⁰

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= (8,9 \pm 0,2)^\circ, & p_0 &= (2,1 \pm 0,05) \cdot 10^{-19} \text{ г см сек}^{-1}, \\ \mu &= (1,72 \pm 0,68) 10^{-24} \text{ г}. \end{aligned} \right\} \quad (4,5)$$

Согласно более ранним определениям¹⁹ $\Delta = 9,6^\circ$, $p_0 = 2,06 \cdot 10^{-19}$ и $\mu = 5 \cdot 10^{-24}$. Столь сильное изменение значения μ свидетельствует о довольно большой чувствительности по существу всех параметров Δ , p_0 и μ к изменениям характеризующих жидкость величин (теплоёмкости, плотности и т. д.). Не исключено, что в дальнейшем придётся внести в спектр и более радикальные изменения, например ввести ещё один минимум на кривой $E(p)$. Повидимому, введение такого минимума, связанное с добавлением ещё трёх свободных параметров, не противоречит существующим опытным данным (при этом, конечно, параметры Δ , p_0 и μ для первого минимума придётся изменить). Таким образом, спектр рис. 2 является лишь простейшим из возможных. Вместе с тем, поскольку этот спектр с самого начала просто подбирается для объяснения опытных данных и вполне достаточен для этой цели, в настоящее время нет никаких оснований рассматривать более сложные спектры (это замечание не относится, однако, к возможным изменениям спектра, неважным с точки зрения вычисления термодинамических свойств гелия II в значительных объёмах, но существенным для объяснения критических скоростей и свойств тонких слоёв гелия II; см. ⁴¹ и ниже).

Зная зависимость энергии возбуждений от их импульса $E(p)$, можно вычислить все термодинамические характеристики вещества. Фононы подчиняются статистике Бозе-Энштейна и их число N_ϕ , свободная энергия F_ϕ и энергия E_ϕ , отнесённые к единице объёма, равны $\left(\frac{p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \right)$ — элемент объёма в p -пространстве, $d\Omega$ — элемент телесного угла):

$$\left. \begin{aligned} N_\phi &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{p^2 dp d\Omega}{e^{up/\kappa T} - 1} = \frac{\pi^2 (kT)^3}{90 \hbar^3 u^3}, \\ E_\phi &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{up^3 dp d\Omega}{e^{up/\kappa T} - 1} = -3 F_\phi = 3kTN_\phi, \\ F_\phi &= \frac{kT}{(2\pi\hbar)^3} \int \ln(1 - e^{-up/\kappa T}) p^3 dp d\Omega = \\ &= -kTN_\phi = -\frac{\pi^2 (kT)^4}{90 \hbar^3 u^4}. \end{aligned} \right\} \quad (4,6)$$

Отсюда для энтропии S и теплоёмкости c имеем:

$$S_{\Phi} = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{2\pi^2 k^4 T^3}{45 \hbar^3 u^3}, \quad c_{\Phi} = T \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{2\pi^2 k^4 T^3}{15 \hbar^3 u^3}. \quad (4,7)$$

Полученные выражения по существу совпадают, разумеется, с дебаевскими выражениями для свободной энергии, энтропии и теплоёмкости твёрдого тела при низкой температуре (различие состоит лишь в необходимости учитывать в твёрдом теле три акустических ветви).

Ротоны также должны подчиняться статистике Бозе, поскольку они лежат на одной энергетической ветви с фононами. Однако в интересующей нас области температур $\Delta \gg kT$ и поэтому для ротонов можно просто пользоваться классической статистикой:

$$\left. \begin{aligned} N_p &= \frac{1}{(2\pi \hbar)^3} \int e^{-E/kT} p^3 dp d\Omega \simeq \frac{2(\mu kT)^{1/2} p_0^2}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3} e^{-\Delta/kT}, \\ F_p &= kTN_p, \end{aligned} \right\} \quad (4,8)$$

где при вычислениях использовано выражение (4,4) (см. ¹⁹, где все величины относятся к единице массы).

Как уже упомянуто, полученные выражения для $F = F_{\Phi} + F_p$ и других производных величин находятся в полном согласии с опытом почти вплоть до самой λ -точки ($T_{\lambda} = 2,19^\circ$), где гелий II в результате фазового перехода 2-го ряда переходит в гелий I. При приближении к λ -точке число возбуждений (фононов и ротонов) в гелии II так сильно возрастает, что их уже нельзя рассматривать как идеальный газ. Именно поэтому свойства гелия II в непосредственной близости к λ -точке и свойства гелия I во всей области его существования уже не могут быть получены теоретически, даже задаваясь определённой зависимостью $E(p)$. То же относится ко всем другим жидкостям (кроме He^3 и смесей He^4 и He^3) поскольку они существуют только при «высоких» температурах, больших нескольких градусов (например, жидкий водород затвердевает при 14°).

Гелий II является, как известно, сверхтекучим. Явление сверхтекучести, открытое Капицей в 1938 г., проявляется раньше всего в том, что гелий II может протекать по узким капиллярам и щелям без всякого трения (точнее, без трения движется только сверхтекучая часть гелия II, плотность которой ρ_s при $T=0$ равна полной плотности гелия II, а при T_{λ} равна нулю*). Поскольку атомы гелия прилипают к стенке, возможность сверхтекучего течения, при котором сверхтекучая жидкость движется

*) Мы не ставим перед собой цели дать здесь обзор теории сверхтекучести (см. ¹⁹) и кратко остановимся лишь на основных моментах, существенных для дальнейшего.

в щели с постоянной скоростью v_s , связана с образованием тангенциального скачка (разрыва) скорости у стенки. Характер этого разрыва ещё совершенно не изучен; его ширина, повидимому, атомных размеров и, во всяком случае, не больше 10^{-6} , так как в плёнках с толщиной $\sim 3 \cdot 10^{-6}$ уже наблюдается сверхтекучесть.

Одним из основных достижений теории сверхтекучести Ландау^{18,19} является выяснение условия устойчивости этого разрыва с точки зрения вида функции $E(p)$. В связанной с капилляром системе отсчёта, где гелий движется со скоростью v (рассматриваем случай $T=0$), энергия появившегося возбуждения, как это следует из механических формул для преобразования энергии при переходе к другой системе отсчёта, равна

$$E' = E(p) + pv, \quad (4,9)$$

где E и p — энергия и импульс возбуждения в системе координат, связанной с жидкостью. Для того чтобы появившееся возбуждение отвечало торможению жидкости, нужно, чтобы $E' < 0$. Отсюда следует, что появление возбуждений и, следовательно, начало разрушения сверхтекучего состояния возможно лишь при условии

$$v \geq \left[\frac{E(p)}{p} \right]_{\min}. \quad (4,10)$$

Если $E = \frac{p^2}{2m}$, как это имеет место в идеальном газе, условие (4,10) даёт $v \geq \left[\frac{p}{2m} \right]_{\min} = 0$, т. е. сверхтекучесть невозможна.

То же относится к системе с фермиевским спектром (4,3), где разность $p_0^2 - p^2$ может равняться нулю. В случае спектра, изображённого на рис. 2, напротив, сверхтекучесть возможна, так как для фононов $\frac{E(p)}{p} = u = 2,35 \cdot 10^4$ см/сек, а в случае ротонных

$$\left[\frac{E(p)}{p} \right]_{\min} \simeq \frac{1}{\mu} \left(\sqrt{2\mu\Delta + p_0^2 - p_0} \right) \simeq \frac{\Delta}{p_0} \simeq 6 \cdot 10^3 \text{ см/сек.}$$

Наблюдающаяся на опыте сверхтекучесть гелия II и заставляет отнести спектр этой жидкости к бозевскому типу.

Согласно (4,10) сверхтекучесть должна нарушаться при критической скорости гелия II относительно стенки, равной $v_c = \left[\frac{E(p)}{p} \right]_{\min}$, т. е. в случае спектра рис. 2 при $v_c \simeq 6 \cdot 10^3$ см/сек. Фактически же значение v_c иногда на несколько порядков меньше и зависит от ширины щели d . Надёжные измерения критической скорости ещё отсутствуют, но, повидимому, имеющиеся данные согласуются с соотношением $v_c \sim \frac{10^{-3}}{d}$ см/сек.

Если низкое значение v_c не обусловлено какими-то побочными причинами, то здесь мы имеем явное несогласие теории с опытом. Из данных о v_c , казалось бы, следует, что в гелии II имеются какие-то возбуждения со значением $\left[\frac{E(p)}{p}\right]_{\text{мин}}$, существенно меньшим, чем для фононов и ротонов и к тому же зависящим от ширины щели d . Кроме того, поскольку фононно-ротонный спектр гелия II приводит к согласующимся с опытом значениям теплоёмкости $c = c_\phi + c_p$, новые возбуждения должны вносить лишь весьма небольшой вклад в теплоёмкость. Одна из возможностей удовлетворить этим требованиям состоит в предположении⁴¹, что дополнительные возбуждения связаны с поверхностью гелия (подобно релеевским волнам в твёрдом теле или капиллярным волнам на свободной поверхности жидкости). В этом случае вклад их в теплоёмкость больших объёмов гелия II будет незначителен. Вместе с тем, если скорость гелия больше критической скорости v_c для этих возбуждений, последние будут возбуждаться и разрушать сверхтекучее течение. Зависимость v_c от d может быть при этом связана с квантовыми эффектами. Действительно, допустим для примера, что возбуждение ведёт себя как свободная частица, т. е. её гамильтониан имеет вид $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2\mu}$. В щели с шириной d , считая, что на стенке ψ -функция возбуждения равна нулю:

$$E = \frac{p_y^2 + p_z^2}{2\mu} = \frac{p_y^2}{2\mu} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2\mu d^2},$$
 где ось z перпендикулярна щели и движение происходит по оси y (импульс p_y , очевидно, непрерывен). В этом случае, как легко видеть⁴¹ (m_{He} — масса атома гелия)

$$v_c = \left[\frac{p_y}{2\mu} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2\mu d^2 p_y} \right]_{\text{мин}} = \frac{\pi \hbar}{\mu d} = \frac{5,0 \cdot 10^{-4}}{(\mu/m_{\text{He}})d} \text{ см/сек.} \quad (4,11)$$

Согласию формулы (4,11) с опытными данными при $\mu \sim m_{\text{He}}$ не следует, конечно, придавать особого значения как ввиду недостаточной надёжности этих данных, так и потому, что сделанное предположение о виде возбуждений никак не увязано с требованием об их поверхностном характере (см. выше). Однако из приведённого примера ясен тот факт, что квантовый эффект может быть существен для выяснения вопроса о критической скорости. Выяснение вопроса о критической скорости и вообще дальнейший существенный прогресс на пути изучения гелия II невозможен без детального экспериментального исследования как самих критических скоростей, так и поведения тонких слоёв гелия II. Последнее ясно из того, что если имеются какие-то поверхностные возбуждения в гелии II, то это должно привести к отличию теплоёмкости тонких слоёв от теплоёмкости значитель-

ных объемов гелия II *); то же относится к отношению $\rho_n(T)/\rho$ (см. ниже). Как уже указывалось, совершенно не изучен также вопрос о структуре разрыва скорости гелия II у стенки.

Заметим, что распространённое мнение об отсутствии сверхтекучести для идеального газа, по крайней мере, неточно. Действительно, в случае спектра $E = \frac{p^2}{2m}$ критическая скорость $v_c = 0$ только, если импульс p может принимать все значения, т. е. не квантуется. Но в ограниченном объёме, а о сверхтекучести только и имеет смысл говорить при наличии стенок, импульс (точнее, квадрат проекций импульса) квантуется. Поэтому ответ на вопрос о сверхтекучести идеального газа без дальнейшего не ясен. Легко видеть, однако, что при движении газа в щели сверхтекучесть не имеет места, поскольку импульс p_y в направлении скорости непрерывен и его изменение может быть сколь угодно мало **).

Положение меняется в случае газа, находящегося в цилиндрическом сосуде (длина L , радиус R). При вращении сосуда вокруг его оси с не слишком большой угловой скоростью Ω газ не увлекается сосудом, т. е. является сверхтекучим (при $T=0$ гелий II ведёт себя именно таким образом — целиком остаётся покоящимся при вращении сосуда). Для доказательства сделанного утверждения поступим совершенно так же, как при рассмотрении в теории сверхтекучести^{18, 19} вопроса об увлечении возбуждений вращающимся сосудом. В системе отсчёта, вращающейся вместе с сосудом, внешние условия, в которых находится газ, стационарны, и в равновесии должно иметь место распределение Гиббса, а в случае идеального бозе-газа распределение $\frac{1}{e^{E'/kT} - 1}$, где E' — энергия частицы во вращающейся системе отсчёта, рав-

*) Одна работа, посвящённая измерению теплоёмкости тонких слоёв, уже имеется⁴². Теплоёмкость оказалась в этом случае существенно отличной от теплоёмкости «массивного» гелия. Однако нужны измерения в большем интервале температур и в различных условиях (заметим, что при наличии свободной поверхности гелия II нужно учитывать вклад в теплоёмкость, вносимый капиллярными волнами).

**) В приведённом ранее примере при рассмотрении возбуждений с $\mathcal{E} = p^2/2m$ эти возбуждения создавались и поэтому $E \neq 0$. В случае же газа частиц последние лишь меняют своё состояние движения и, собственно, возбуждением нужно считать разность $E - E_0$, где E_0 — энергия в исходном состоянии. Для щели, в которой газ движется со скоростью

$v_0 = \frac{p_0 y}{m}$, имеем: $E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2} + \frac{p_{0y}^2}{2m}$ и $E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2} + \frac{p_y^2}{2m}$ и раз-

ность $E - E_0$ может быть сколь угодно мала, а значит, и $\left[\frac{E - E_0}{\Delta p} \right]_{\min} = 0$, где $\Delta p = |p - p_0|$. При этом величина $\Delta p \neq 0$ при $E - E_0 \rightarrow 0$, если импульс p , оставаясь по величине близким к p_0 , сильно изменяет своё направление, например, если $p_y \approx -p_{y0}$.

ная $E' = E - M\Omega$ (E — энергия в неподвижной системе, M — момент количества движения частицы и Ω — угловая скорость сосуда). Момент количества движения всего газа равен (dV — элемент объёма, $d\Omega'$ — элемент телесного угла):

$$\bar{M} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{M p^2 dp d\Omega' dV}{e^{(E - M\Omega)/kT} - 1}.$$

Уровни энергии в сосуде определяются выражением (3,17) и при $T=0$ все частицы идеального бозе-газа находятся на нижнем

уровне с энергией $E_{011} = \frac{(2,4048)^2 \hbar^2}{2\mu R^2}$ (для простоты считаем высоту сосуда L очень большой) и моментом $M_z = m\hbar = 0$. При вращении сосуда при $T \rightarrow 0$ момент $\bar{M}$ может начать возрастать только тогда, когда энергия $E - M\Omega$ для одного из более высоких (при $\Omega = 0$) уровней достигнет уровня E_{011} . Для ближайшего к уровню E_{011} уровня $E_{111} = \frac{(3,8317)^2 \hbar^2}{2\mu R^2}$ с моментом $M_z = \hbar$ равенство $E_{011} = E_{111} - M\Omega$ будет иметь место при

$$\Omega_c = \frac{8,9 \hbar}{2\mu R^2}, \quad v_c = \Omega_c R = \frac{4,5 \hbar}{\mu R} = \frac{6,7 \cdot 10^{-4}}{(\mu/m_{\text{He}})R} \text{ см/сек}, \quad (4,12)$$

что находится, если не говорить о численном коэффициенте, в согласии с (4,11).

При $\Omega > \Omega_c$ начинается перераспределение частиц по уровням, и момент $\bar{M}$ растёт, но при $\Omega < \Omega_c$ частицы не увлекаются вращающимся сосудом как это имеет место в случае гелия II.

Сверхтекучим будет и ферми-газ в сосуде, но в этом случае при не слишком малых плотностях расстояние между уровнями мало и значение Ω_c также ничтожно. Положение здесь совершенно аналогично имеющему место в отношении «сверхпроводимости» идеальных бозе- и ферми-газов, о чём была речь в § 3б). Это и понятно, поскольку при пренебрежении членами $\sim H^2$ система в магнитном поле H ведёт себя так же, как в сосуде, вращающемся с ларморовской угловой скоростью $\Omega = \omega_L = \frac{eH}{2mc}$.

Поскольку при движениях в щели идеальный газ несверхтекуч (см. выше), ясно, что для объяснения сверхтекучести гелия II учёт взаимодействия между атомами, конечно, совершенно необходим. Междоатомное взаимодействие в гелии, как и во всякой жидкости, очень велико, и в настоящее время не видно никаких путей для строгого анализа вопроса о спектрах возбуждения жидкостей. Поэтому большое, по крайней мере методическое, значение имеет рассмотрение спектра возбуждений неидеального газа. Но и здесь задача в строгой постановке весьма сложна, и, повидимому единственным серьёзным строгим исследованием в этой обла-

сти является работа Боголюбова (⁴³ и дальнейшие расчёты), рассмотревшего вопрос о спектре бозе-газа со слабым взаимодействием. При этом, используя определённый метод теории возмущений, было показано, что при малых возбуждениях спектр системы отвечает совокупности элементарных возбуждений, для которых

$$E = \sqrt{u^2 p^2 + (p^2/2m)^2}, \quad (4,13)$$

где u — скорость звука в рассматриваемом газе.

При малых p (4,13) переходит в (4,2), а при больших p в (4,1), т. е. возбуждения ведут себя как свободные частицы, что при больших импульсах естественно. Спектр (4,13) удовлетворяет, очевидно, условию устойчивости сверхтекучего течения. Однако это заключение в отношении бозе-газа со слабым взаимодействием, которое согласно ⁴³ должно отвечать отталкиванию между частицами, будет справедливо только, если возбуждения типа (4,13) исчерпывают все возможные. Если же в системе возможны какие-либо другие возбуждения, то, не зная их спектра, утверждать, что газ сверхтекуч, уже нельзя. Вместе с тем, в ⁴³ показано, что существуют возбуждения (4,13), но, насколько мы можем судить, не доказано, что не может быть ещё каких-либо других возбуждений. Действуя методом теории возмущений, ответить на такой вопрос крайне трудно, если вообще возможно. Более того, данные работы ⁴⁴ позволяют думать, что спектр (4,13) не исчерпывает всех возбуждений бозе-газа. Дело в том, что в ⁴⁴ спектр (4,13) получен из квантового кинетического уравнения с самосогласованным полем (в ⁴⁴ импульс возбуждения $p = \hbar k$). Но действуя таким методом, можно придти также к заключению о соблюдении условия сверхтекучести для широкого класса систем и в том числе для ферми-газа, обыкновенной электронной плазмы и, собственно, всех реальных газов *).

Подобный вывод не может считаться заведомо неверным, так как при низких температурах, когда можно говорить о газе элементарных возбуждений, рассматриваемые системы не существуют

*) Согласно ⁴⁴ и дальнейшим расчётам В. П. Силина, а также согласно ^{44а} в заряженном ферми-газе и в классической плазме при достаточно

малых импульсах $v_c = \left[\frac{E(p)}{p} \right]_{\min} > 0$, так как при $p = \hbar k \rightarrow 0$ энер-

гия E стремится не к нулю, а к $\hbar \omega_0$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{m}}$ — собственная частота плазмы (см. также § 4б)). Тот же вывод, что $v_c > 0$, получается и для других реальных газов с взаимодействующими между собой частицами. При этом нужно только, чтобы взаимодействие было достаточно сильным и среднее по пространству значение энергии взаимодействия между двумя любыми частицами было положительно (превалирование сил отталкивания).

в действительности и возможность их сверхтекучести ничему не противоречит. Однако вывод о сверхтекучести реальных газов сомнителен и не может считаться доказанным (не говоря уже о недопустимости игнорировать роль стенок) потому, что метод самосогласованного поля позволяет, вообще говоря, найти лишь часть возбуждений системы. Поэтому может оказаться, что у рассматриваемых систем фактически имеются также возбуждения, для которых $v_c = 0$. Если это так, то совпадение спектра, полученного в ⁴³ с «самосогласованным» спектром ⁴⁴ наводит на мысль о неполноте спектра, полученного в ⁴³, хотя возможно также, что как раз в случае бозе-газа метод самосогласованного поля является более точным, чем в других случаях.

Вопрос о сверхтекучести реальных газов нуждается, очевидно, в дальнейшем исследовании, при проведении которого необходимо обратить внимание и на учёт влияния стенок, поскольку обсуждение проблемы сверхтекучести для неограниченной среды, строго говоря, лишено смысла.

Возвращаясь к гелию II, рассмотрим движение этой жидкости при $T \neq 0$. В этом случае в гелии имеются возбуждения, причём в равновесном состоянии эти возбуждения в среднем неподвижны относительно стенок, т. е. не увлекаются движущейся жидкостью. Последнее следует из того, что возбуждения взаимодействуют со стенкой и замедляются ею, подобно тому, как это имеет место в случае газа, движущегося по трубке. Можно видеть, что с возбуждениями связана определённая часть массы жидкости. Действительно, функция распределения для возбуждений в системе, связанной со стенками, где внешние условия стационарны, имеет обычный вид $n(E') = [e^{E'/kT} - 1]^{-1}$, где $E' = E + \mathbf{p}\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}$ — скорость движения гелия относительно стенок. В системе отсчёта, связанной с жидкостью, возбуждения обладают импульсом $\mathbf{p}$ и движутся в целом со скоростью $-\mathbf{v}$. Импульс газа возбуждений при этом равен $\mathbf{P} = \int \mathbf{p}n(E(\mathbf{p}) + \mathbf{p}\mathbf{v}) \frac{p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3}$. В случае фононов, когда $E(p) = up$, $\mathbf{P}_\Phi = -\rho_{\Phi\Phi} \mathbf{v}$, где

$$\rho_{\Phi\Phi} = \frac{4E_\Phi}{3u^2(1 - v^2/u^2)^3}, \quad E_\Phi = \frac{\pi^2(kT)^4}{30\hbar^3 u^3}. \quad (4,14)$$

Здесь $\rho_{\Phi\Phi}$ есть плотность жидкости, связанная с фононами. Полная плотность «нормальной части» гелия II $\rho_n = \rho_{\Phi\Phi} + \rho_{np}$, где ротонную часть плотности ρ_{np} мы вычислять не будем (см. ^{19, 40}). Поскольку критическая скорость $v_c \ll u$, в гелии II практически всегда можно пользоваться выражением (4,14) с $v = 0$ (скорость v в (4,14) есть скорость сверхтекучей части жидкости v_s , причём нормальная часть жидкости предполагается покоящейся; в самом общем случае в (4,14) $v = v_s - v_n$, где v_n — скорость нормальной части жидкости). Плотности ρ_n и $\rho_s = \rho - \rho_n$ зависят

от температуры — см. (4,14) — и при $T = 0$, $\rho_n = 0$, а при $T = T_\lambda$, $\rho_n = \rho$, где ρ — плотность гелия II.

В силу сказанного, гелий II можно рассматривать как бы состоящим из взаимнопроникающей смеси двух жидкостей (сверхтекучей и нормальной) с соответствующими плотностями ρ_s и ρ_n и скоростями $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_n$. Передача импульса между обеими частями жидкости отсутствует и не нужно забывать, что представление о двух жидкостях (модель двух жидкостей) не должно пониматься буквально, и призвано лишь отразить своеобразную ситуацию, имеющую место в действительности.

Одним из существенных, если не самым существенным, достижением теории сверхтекучести Ландау является установление макроскопических (гидродинамических) уравнений для обеих «жидкостей», из которых «состоит» гелий II.

Движение сверхтекучей части гелия II является безвихревым:

$$\text{rot } \mathbf{v}_s = 0. \quad (4,15)$$

Уравнение движения для $\mathbf{v}_s$ таково^{18, 19}:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = -\text{grad} \left[\frac{\Phi}{\rho} + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} - \frac{\rho_n}{2\rho} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 \right], \quad (4,16)$$

где $\frac{\Phi}{\rho} = \frac{F}{\rho} + \frac{p}{\rho}$ — термодинамический потенциал единицы массы неподвижного гелия II, p — давление и F/ρ — свободная энергия единицы массы, а также учтено, что при условии (4,15)

$$\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \text{grad} \frac{\mathbf{v}_s^2}{2}.$$

На касательную к поверхности компоненту $\mathbf{v}_s$ не накладывается никаких условий. Нормальная к поверхности компонента $\mathbf{v}_s$ должна равняться нулю, если только на поверхности не происходит превращения сверхтекучей части жидкости в нормальную, как это имеет место при наличии потока тепла через стенку.

Помимо уравнений (4,15) и (4,16) и очевидного соотношения $\rho = \rho_s + \rho_n$, где ρ — полная плотность гелия II, должно иметь, конечно, место уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n. \quad (4,17)$$

При пренебрежении вязкостью нормальной части жидкости к полной системе уравнений движения гелия II относятся также уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial j_i}{\partial t} &= - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad \Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho_s v_{si} v_{sk} + \rho_n v_{ni} v_{nk}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div} (S \mathbf{v}_n) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4,18)$$

где S — энтропия единицы объёма гелия II. Если не учитывать сжимаемости, то уравнения (4,18) сильно упрощаются¹⁹. При отсутствии теплообмена со стенкой на этой последней $\mathbf{v}_n = 0$. Учёт вязкости и теплопроводности приводит к появлению в (4,18), а также в правой части уравнения (4,16) некоторых дополнительных членов (см. ^{19, 40}).

Теория сверхтекучести гелия II, состоящая из квазимикроскопической части, связанной с принятием определённого спектра, и макроскопической (гидродинамической) части, позволила понять весь комплекс явлений в гелии II при скоростях, меньших критической.

б) Спектр возбуждений электронной жидкости в металле и сверхпроводимость

Квазимикроскопический подход, освещённый в предыдущем разделе в применении к гелию II, естественно перенести и на сверхпроводимость. Для этого имеется тем больше оснований, что явления сверхтекучести и сверхпроводимости глубоко родственны. В обоих случаях имеет место отсутствие трения (сопротивления) для движений определённого типа — сверхтекучего течения и сверхпроводящего тока. В обоих случаях при определённых условиях наблюдается сосуществование потоков без трения с «нормальными» потоками — нормальным течением в гелии II и нормальным током в сверхпроводниках. Более того, уравнения, определяющие сверхпроводящий ток $\mathbf{j}_s$, в слабых полях совершенно аналогичны уравнениям (4,15) — (4,16) для скорости сверхтекучей части гелия II $\mathbf{v}_s$ и, собственно, с точки зрения этих уравнений, всё отличие сверхпроводящего случая связано с тем, что электронная «жидкость» является заряженной.

Действительно, основное уравнение для сверхпроводящего тока (1,1), если записать $\mathbf{j}_s$ как $\mathbf{j}_s = en_s \mathbf{v}$, имеет вид (см. (I; 2,17)):

$$\text{rot } \mathbf{v} = - \frac{e}{mc} \mathbf{H}. \quad (4,19)$$

Это уравнение есть обобщённое условие отсутствия вихрей и при $e=0$ переходит в (4,15). Второе условие для $\mathbf{j}_s$ — уравнение (1,2) — в свою очередь аналогично (4,16) (см. (I; 2,18)).

Движение «нормальных» электронов в сверхпроводнике также по существу аналогично движению нормальной части гелия II. Разница состоит лишь в том, что в случае металла силы трения выражены значительно более ярко. Это связано, грубо говоря, с тем, что гелий испытывает трение главным образом у стенок, а нормальные электроны замедляются, в силу взаимодействия с решёткой, во всём объёме. Поэтому для нормального тока при частотах электромагнитного поля, при которых ещё наблюдается сверхпроводимость, можно пренебречь инерцией электронов и, если

отвлечься от аномального скин-эффекта, использовать закон Ома $\mathbf{j}_n = \tau \mathbf{E}$. Уравнение движения (4,18) для $\mathbf{v}_n$ при учёте сильной вязкости также привело бы к аналогичному соотношению — к пропорциональности между $\mathbf{v}_n$ и градиентом давления (пуазейлевское течение).

Таким образом, можно без всякого преувеличения сказать, что сверхпроводимость есть сверхтекучесть электронной жидкости в металле (см. § 25).

Это, конечно, не означает, что понятие о скорости сверхпроводящей жидкости $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}_s}{en_s}$ может применяться неограниченно широко или даже столь же широко, как понятие о скорости сверхтекучей части гелия II. Но в силу сказанного ясно, что гидродинамическая картина движения электронной жидкости для не слишком быстрых и не слишком коротковолновых движений, когда справедливы уравнения (1,1) — (1,2), оказывается вполне пригодной. В отношении же возбуждений электронной жидкости можно думать, что к ним гидродинамический подход применим пока $\lambda \gg a \sim 10^{-8}$, где $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$ — длина волны возбуждения.

Переходя к вопросу о возможности существования сверхпроводимости с точки зрения вида спектра, возбуждений, т. е. вида функции $E(p)$, где E — энергия возбуждения и p — его импульс, можно, совершенно так же как для гелия II, заметить, что сверхпроводимость возможна только, если (см. (4,10))

$$v_c = \left[\frac{E(p)}{p} \right]_{\min} > 0. \quad (4,20)$$

Подобный критерий находится в полном согласии с результатами § 3, полученными совсем другим путём. Действительно, если имеется обычный фермиевский спектр (4,3), то $v_c = 0$ и сверхпроводимость невозможна. Учёт взаимодействия с решёткой, если он не приводит к появлению щели на самой границе Ферми, а вносит лишь изменения, ясные из рис. 1, также не может привести к сверхпроводимости, поскольку и в этом случае $v_c = 0$. Наконец, появление на границе Ферми энергетической щели Δ сразу же приводит к тому, что $v_c \sim \frac{\Delta}{p_0} > 0$. Все эти выводы были получены и в § 3.

Не представляет труда указать спектр возбуждений электронной жидкости, который удовлетворяет условию существования сверхпроводимости (4,20) и приводит к согласующемуся с опытом выражению для теплоёмкости и других термодинамических величин в сверхпроводящем состоянии. Ниже будут приведены даже два таких спектра.

Однако в случае сверхпроводимости, в отличие от сверхтекучести гелия II, приведёнными требованиями к спектру нельзя ограничиться. Дело в том, что в гелии II при приближении к λ -точке число возбуждений сильно возрастает, они перестают образовывать газ, и от описания деталей теплового движения в гелии II вблизи T_λ и в гелии I во всей области его существования приходится отказаться. Сверхпроводящий же металл при $H=0$ и $T > T_k$ или при любой температуре, но $H > H_k(T)$ (H_k — критическое поле, T_k — критическая температура при $H=0$) находится в нормальном состоянии, где в широких пределах пригоден фермиевский спектр (4,3) и таким образом отказываться от рассмотрения теплового движения нет оснований. Поэтому необходимо выяснить, каким образом «сверхпроводящий» спектр заменяется нормальным.

Далее, переход из сверхпроводящего состояния в нормальное должен быть таким, чтобы обеспечивалась, в частности, непрерывность изменения электро- и теплопроводности (в сверхпроводящем состоянии речь, конечно, идёт о «нормальной» проводимости). Кроме того, теория должна как-то отразить, если не объяснить, наличие изотопического эффекта, появление в сверхпроводящем состоянии огромной диэлектрической постоянной ϵ_0 и, наконец, неуниверсальность сверхпроводимости, наблюдающейся не для всех металлов. Наличие всех этих требований приводит к тому, что построение даже квазимикроскопической теории сверхпроводимости сталкивается со значительно большими трудностями, чем в случае гелия II. Соответствующая задача ещё не решена. Поэтому нам придётся ограничиться рядом замечаний, в результате которых контуры квазимикроскопической теории сверхпроводимости всё же в некоторой мере проясняются.

Простейший спектр, удовлетворяющий условию (4,20) и обеспечивающий правильную температурную зависимость теплоёмкости в сверхпроводящем состоянии, получается в результате введения щели в фермиевский спектр (4,3). В результате получаем спектр³:

$$\left. \begin{aligned} E_- &\gg kT, & p < p_0, \\ E_- &= \Delta + \frac{p^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m}, & p > p_0, \\ E_+ &\gg kT, & p > p_0, \\ E_+ &= \Delta + \frac{p_0^2}{2m} - \frac{p^2}{2m}, & p < p_0, \end{aligned} \right\} \quad (4,21)$$

где E_- — энергия отрицательно заряженного возбуждения («электрона») и E_+ — энергия положительной «дырки».

При $\Delta=0$ (4,21) переходит в фермиевский спектр (см. (4,3)). Однако спектр (4,21), понимаемый буквально, недопустим, как

это следует из рассмотрения поведения возбуждений в электрическом поле E . Под действием поля импульс, например «электрона», на который действует сила $F = eE$ (разумеется, $e < 0$), в зависимости от знака величины $F \cdot p$ или уменьшается или увеличивается. Но достигнув значения p_0 , импульс согласно (4,21) уменьшаться уже не может, а с другой стороны сила продолжает действовать. В случае фермиевского спектра, когда $\Delta = 0$, выход из этого затруднения состоит в предположении о том, что, достигая граничного импульса, возбуждение исчезает (точнее, одновременно исчезают два возбуждения — «электрон» и «дырка», подходящие с разных «сторон» к границе $p = p_0$). На место исчезнувших пар, для отрицательных компонент которых $F \cdot p < 0$, поле порождает новые пары с $F \cdot p > 0$. Подобная картина является, очевидно, просто отображением (в терминах рождения и исчезновения пар возбуждений) того изменения (смещения в p -пространстве), которое претерпевает фермиевское распределение для электронного газа под действием электрического поля. Но для спектра (4,21) со щелью рождение пар в постоянном во времени поле уже невозможно, по крайней мере при $T \rightarrow 0$ и для не слишком малой щели Δ (см. ниже). Это затруднение можно, тем не менее, обойти и придать спектру (4,21) реальный смысл, если вспомнить, что в кристалле p есть не импульс, а квазиимпульс возбуждения и энергия E должна быть периодической функцией этого квазиимпульса с периодами $\frac{2\pi b_i}{\hbar}$, где b_i — периоды обратной решётки. Для кубической решётки, которой мы для простоты ограничимся, $b_i = b = \frac{1}{a}$, где a — период решётки кристалла. Таким образом, например, $E_n \left(p_x + \frac{2\pi}{a} \right) = E(p_x)$, где индекс n отражает тот факт, что при данном p_x энергия E может принимать различные значения*).

В силу сказанного спектр (4,21), где p есть квазиимпульс, нужно представлять себе так, как это изображено на рис. 3 для движения «электрона» по оси x . При этом в спектр внесено существенное уточнение, связанное с тем, что разрывный спектр недопустим и поэтому переход от области $p < p_0$ к области $p > p_0$ сглажен, сделан непрерывным. Отличия между спектром (4,21) и спектром рис. 3 с точки зрения вычисления термодинамических величин могут быть сделаны сколь угодно малыми, и мы ими в дальнейшем будем пренебрегать. В силу многозначности функции

*) Тот факт, что в кристалле энергия E_n есть периодическая функция, в книгах по теории металлов, как это ни странно, обычно не подчёркивается (см., однако, ^{7a}). Квазиимпульс принято обозначать через $\hbar k$, а не через p , но мы не будем этого делать, чтобы не усложнять всех обозначений.

энергии, при тех же значениях p_x , но энергиях, больших показанных на рис. 3, имеются ещё другие (не показанные на рис. 3) ветви функции $E_n(p)$. Другими словами, кривая, изображённая на рис. 3, отвечает нижней «зоне» для возбуждений. Скорость возбуждения, равная $v = \frac{\partial E}{\partial p}$, в точках минимума и максимума функции $E(p)$ обращается в нуль и затем меняет знак,

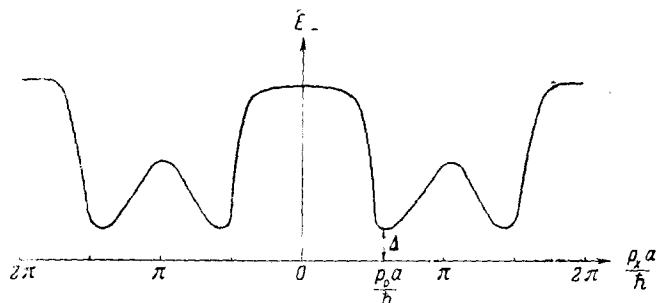


Рис. 3.

что отвечает отражению и образованию стоячих волн^{6,7}. Аналогичная ситуация имеет место в обычной схеме теории металлов при отражении от границы зоны и лишена внутренних противоречий.

Считая возбуждения со спектром (4,21) подчиняющимися статистике Ферми для числа возбуждений в интервале энергии $dE_{\pm}$, имеем:

$$dN_{\pm} = \frac{g dE_{\pm}}{e^{\frac{E_{\pm}}{kT}} - 1}, \quad g(E_{\pm}) = \frac{\sqrt{2} \cdot 8\pi m^{3/4} E_{\pm}}{(2\pi \hbar)^3}.$$

При $\frac{\Delta}{kT} \ll 1$ спектр (4,21) с термодинамической точки зрения эквивалентен фермиевскому спектру (4,3) и свободная энергия возбуждений равна

$$F_n = \frac{H_{k0}^2}{8\pi} - \frac{\pi^2}{12} a_n (kT)^3, \quad a_n = \left(\frac{2mp_0}{\pi^3 \hbar^3} \right)_n, \quad (4,22)$$

где аддитивная постоянная выбрана таким образом, чтобы $F_n(0) = \frac{H_{k0}^2}{8\pi}$, причём H_{k0} — критическое магнитное поле при $T = 0$. Обработка данных о теплоёмкости сверхпроводника показывает, что если опираться на спектр (4,21) $\frac{\Delta}{kT} \sim 3$. В этом случае для свободной энергии сверхпроводящей фазы с точностью до $\sim 1\%$ пригодно предельное выражение, получающееся при $\frac{\Delta}{kT} \gg 1$ и имею-

щее вид³:

$$F_s = a_s e^{\frac{-\Delta}{kT}}, \quad a_s = \left(\frac{2mp_0}{\pi^2 \hbar^3} \right)_s. \quad (4,23)$$

Из требования, чтобы в точке перехода 2-го рода, т. е. при T_k , свободная энергия F и энтропия $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ были непрерывны, можно выразить a_n и a_s через H_{k0} , Δ и T_k . При этом оказывается, что $a_s > a_n$, т. е. граничный импульс p_0 в обеих фазах различен. Учитывая, что $\frac{H_k^2}{8\pi} = F_n - F_s$ в результате вычисления a_n и a_s , получаем следующее выражение ($\alpha = \frac{\Delta}{kT_k}$):

$$\left(\frac{H_k}{H_{k0}} \right)^2 = 1 - \left(\frac{T}{T_k} \right)^2 \left(\frac{2+\alpha}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} e^{\alpha \left(1 - \frac{T}{T_k} \right)} \right). \quad (4,24)$$

Подбирая значение параметра $\alpha = \frac{\Delta}{kT_k}$, можно достичь весьма точного согласия формулы (4,24) с опытными данными. Это ясно из таблицы, где приведены экспериментальные данные для Hg согласно⁴⁵ и значения, вычисленные по формуле (4,24) и по часто используемой формуле

$$\left(\frac{H_k}{H_{k0}} \right)^2 = \left[1 - \left(\frac{T}{T_k} \right)^2 \right]^2. \quad (4,25)$$

Формула (4,25) отвечает предположению о том, что в сверхпроводящем состоянии теплоемкость $c_s \propto T^3$, а в нормальном $c_n = aT^3 + \gamma T$.

Значения $\frac{H_k}{H_{k0}}$ в зависимости от $\frac{T}{T_k}$ Таблица

$\frac{T}{T_k}$	$\frac{H_k}{H_{k0}}$ эксп.	$\frac{H_k}{H_{k0}}$ согласно (4,24) с $\alpha = 2,75$	$\frac{H_k}{H_{k0}}$ согласно (4,25)	$\frac{T}{T_k}$	$\frac{H_k}{H_{k0}}$ эксп.	$\frac{H_k}{H_{k0}}$ согласно (4,24) с $\alpha = 2,75$	$\frac{H_k}{H_{k0}}$ согласно (4,25)
0,00	1,000	1,000	1,000	0,55	0,708	0,708	0,6975
0,05	0,998	0,998	0,9975	0,60	0,649	0,648	0,6400
0,10	0,992	0,991	0,9900	0,65	0,586	0,583	0,5775
0,15	0,980	0,980	0,9775	0,70	0,517	0,513	0,5100
0,20	0,965	0,965	0,9600	0,75	0,442	0,438	0,4375
0,25	0,944	0,945	0,9375	0,80	0,363	0,358	0,3600
0,30	0,918	0,919	0,9100	0,85	0,279	0,275	0,2775
0,35	0,886	0,888	0,8775	0,90	0,190	0,187	0,1900
0,40	0,850	0,852	0,8400	0,95	0,098	0,091	0,0975
0,45	0,808	0,810	0,7975	0,975	0,049	0,051	0,050
0,50	0,760	0,761	0,7500	1,000	0,000	0,000	0,000

В расчёте приняты значения⁴⁵ $H_{к0} = 412,6$ и $T_k = 4,167^\circ$; экспериментальные данные при $\frac{T}{T_k} < 0,25^\circ$ получены в результате экстраполяции. Учитывая величину экспериментальной ошибки и возможность более точного подбора постоянной $\alpha = \frac{\Delta}{kT_k}$, из данных приведённой таблицы явствует, что формула (4,24) согласуется с опытом во всяком случае не хуже часто используемой формулы (4,25).

Однако спектр (4,21) и вся базирующаяся на нём схема всё же безусловно, без дальнейшего, приняты быть не могут. Во-первых, уже отмеченное различие значений a_n и a_s в (4,22) — (4,23) означает, что граничные импульсы p_0 в обеих фазах также различны, причём это различие оказывается большим. Таким образом спектр (4,21) при $\Delta \rightarrow 0$ не переходит в фермиевский спектр (4,3) с тем же граничным импульсом, как этого следовало бы ожидать. Во-вторых, число возбуждений типа (4,21) весьма невелико: даже при $\Delta \rightarrow 0$ и $T \rightarrow T_k$ оно порядка $\Delta n \sim n \frac{T_k}{T_0} \sim 10^{-4} n$ (см. § 1), а при $\Delta \neq 0$ и $T < T_k$ оно ещё меньше. Поэтому электропроводность, связанная с возбуждениями, будет значительно меньше, чем в нормальном состоянии. Дело в том, что в нормальном состоянии, в отличие от встречающихся иногда утверждений, в переносе тока участвуют все электроны проводимости с концентрацией n , а не Δn . Это ясно из формулы для электропроводности свободного электронного газа (см., например, (I; 6,28)), а на языке электронной жидкости и её возбуждений связано с уже обсуждавшимся механизмом рождения и исчезновения пар «электрон» — «дырка» под действием электрического поля. Наличие щели Δ , вообще говоря, нарушает этот механизм, электропроводность резко падает и, вообще, металл в отношении поведения нормальной проводимости становится весьма похожим на полупроводник.

Предпринятое довольно подробное обсуждение спектра (4,21), несмотря на все отмеченные затруднения, объясняется тем, что учёт влияния диэлектрической постоянной ϵ_0 существенно меняет всю ситуацию. Как было указано ещё в 1945 г. Л. Д. Ландау при введении величины ϵ_0 , скорость света в металле для частот, для которых $\epsilon \simeq \epsilon_0$ равна $u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}}$ и при $\epsilon_0 \sim 10^{10}$ так мала, что тепловое излучение в металле должно вносить заметный вклад в его теплоёмкость. В простейшем случае, когда $\epsilon = \epsilon_0$ и не зависит ни от частоты, ни от температуры, электромагнитные волны (фотоны в среде) вполне подобны фононам, но только в отличие от фононов в жидкости являются поперечными. Энергия фотонов имеет при этом вид $E = \hbar \omega$, $u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}}$. Свободная энергия, энтро-

ния и теплоёмкость, связанные с этими фотонами (т. е. с тепловым излучением в металле) таковы:

$$\left. \begin{aligned} F_{\Phi} &= -\frac{\pi^2 \varepsilon_0^{3/2} (kT)^4}{45 \hbar^3 c^3}, \quad S_{\Phi} = \frac{4 \pi^2 \varepsilon_0^{3/2} k^4 T^3}{45 \hbar^3 c^3}, \quad E_{\Phi} = \frac{\pi^2 \varepsilon_0^{3/2} (kT)^4}{15 \hbar^3 c^3}, \\ c_{\Phi} &= \frac{4 \pi^2 \varepsilon_0^{3/2} k^4 T^3}{15 \hbar^3 c^3} = 3,06 \cdot 10^{-14} \varepsilon_0^{3/4} T^3 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{град}}. \end{aligned} \right\} (4,26)$$

Эти формулы получаются из (4,6) — (4,7) в результате замены u на $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}$ и умножения на 2, связанного с наличием двух направлений поляризации поперечных волн.

Если принять, что вся теплоёмкость в сверхпроводящем состоянии связана с электромагнитным полем*), т. е. что $c_s = c_{\Phi}$, то приходим к заключению, что $u \sim 10^5$ и $\varepsilon_0 \sim 10^{10}$. Например, для ртути $u = 1,5 \cdot 10^5$ и $\varepsilon_0 = 2,0 \cdot 10^{10}$.

Имея экспериментальные данные об ε_0 и о теплоёмкости в сверхпроводящем состоянии c_s можно, казалось бы, сразу же выяснить удельный вес фотонной части спектра. К сожалению, это не так просто в силу зависимости ε_0 от частоты и температуры T , что в (4,26) не учтено.

Общий вид ε при пренебрежении поглощением, что возможно при $T \ll T_K$ и не слишком высокой частоте, таков (см. (I; 5,9) и (I; 5,11)):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 - \frac{c^2}{\omega^2 \delta_0^2} = \varepsilon_0 - \frac{4 \pi e^2 n_s}{m \omega^2} = \varepsilon_0 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}, \\ \varepsilon_0 &= 1 + \frac{4 \pi e^2}{m} \sum_{k \neq 0} \frac{n_{0k}}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}. \end{aligned} \right\} (4,27)$$

Огромное значение ε_0 при не слишком высоких частотах связано с тем, что среди собственных частот ω_{0k} имеются низкие частоты $\omega_{0k} \sim \frac{kT_K}{\hbar}$. Такими эффективными частотами будут обладать те электроны, которые были свободными в нормальном состоянии и не стали «сверхпроводящими» при $T < T_K$. Если концентрация электронов в нормальном состоянии есть n_0 (эта величина определяется из инфракрасных измерений; см. (I; 6,17)), а концентрация «сверхпроводящих» электронов есть n_s (эта величина определяется по измерениям глубины проникновения δ_0 ; см. (I; 6,18)), то в силу правила сумм концентрация связанных электронов есть

$$n_c = \sum_{k \neq 0} n_{0k} = n_0 - n_s, \quad (4,28)$$

где суммирование производится по всем начальным состояниям,

*) Подробное предположение, в принципе, допустимо, так как из (4,26) следует формула (4,25) для H_K , которая в общем согласуется с опытом.

отвечающим электронам, которые свободны в нормальном состоянии, и по всем конечным состояниям $k \neq 0$ (то же относится к сумме в (4,27), если пренебречь вкладом в ϵ_0 от сильно связанных электронов).

Распределение частот ω_{0k} неизвестно и поэтому остаётся лишь ввести некоторую среднюю частоту ω_0 и при $\omega^2 \ll \omega_0^2$ записать выражение для ϵ_0 при $T=0$ в виде:

$$\epsilon_0(0) = \frac{4\pi e^2 n_c}{m \omega_0^2} = 3,18 \cdot 10^9 \frac{n_c}{\omega_0^2} = \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}, \quad (4,29)$$

где учтено, что $\epsilon_0 \gg 1$. Как сказано, можно думать, что $\hbar \omega_0 \sim \sim kT_K^*$). Для олова, например, $kT_K \simeq 5 \cdot 10^{-16}$ и если положить $\omega_0 = \frac{kT_K}{\hbar}$ и $n_c = 5 \cdot 10^{32}$ (см. (I; § 6)), то $\omega_0 = 5 \cdot 10^{11}$, $\omega_c = 1,25 \cdot 10^{16}$ и $\epsilon_0(0) = 6 \cdot 10^8$. На опыте⁴⁶ $\epsilon_0 \simeq 5 \cdot 10^9$, откуда можно заключить, что $\omega_0 \simeq \frac{kT_K}{3} \simeq 1,7 \cdot 10^{11}$.

При температуре T возбуждены колебания с частотами порядка $\omega = \frac{kT}{\hbar}$ и меньшими. Отсюда и из (4,27) ясно, что пренебрегать дисперсией ϵ_0 можно лишь при температурах $T \ll T_K$ или, точнее, при условии

$$T^2 \ll \left(\frac{\hbar \omega_0}{k} \right)^2. \quad (4,30)$$

Для олова это практически приводит к требованию, чтобы $T < 0,6 \div 0,8^\circ$. Но при низких температурах и, следовательно, существенных для теплоёмкости низких частотах ω , как ясно из

(4,27), уже нельзя полагать $\epsilon = \epsilon_0$ и скорость $u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}}$. Например, для олова, полагая по данным^{48,49} $\delta_0 = 6,3 \cdot 10^{-6}$ при $T=0$, получаем: $n_s = \frac{mc^2}{4\pi e^2 \delta_0^2} = \frac{2,83 \cdot 10^{11}}{\delta_0^2} = 7 \cdot 10^{21}$ и $\omega_s = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_s}{m}} = 4,75 \cdot 10^{15}$. Далее, принимая $n_c = 5 \cdot 10^{32}$ и $\omega_0 = 1,7 \cdot 10^{11}$ (см. выше) находим, что согласно (4,27) и (4,29) $\epsilon = \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} = 5 \cdot 10^9 - \frac{2,25 \cdot 10^{31}}{\omega^2}$ и, следовательно, положить $\epsilon \simeq \simeq \epsilon_0 = \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}$ можно лишь при частотах, удовлетворяющих условию

$$\omega^2 \gg \frac{\omega_s^2 \omega_0^2}{\omega_c^2}. \quad (4,31)$$

*) Нужно оговорить, что вопрос о значении частот ω_{0k} не вполне ясен, особенно в связи с замечаниями, которые приведены в начале стр. 85.

Подставляя проведённые значения для олова, из (4,31) получаем условие $\omega^2 \gg 4,10^{21}$ или практически $T \sim \frac{\hbar \omega}{k} \gg 1^\circ$.

Мы видим, таким образом, что в рассматриваемом случае для формул (4,26), строго говоря, нет области применимости. Однако, если пренебречь дисперсией и температурной зависимостью ϵ_0 , можно получить другие формулы, применимость которых со стороны низких температур не ограничена. Скорость света в металле, которая нас интересует для вычисления термодинамических величин, равна $u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{\omega}{k}$, где k — волновой вектор. Отсюда и из (4,27) сразу же имеем:

$$\omega^2 = \frac{\omega_s^2}{\epsilon_0} + \frac{c^2 k^2}{\epsilon_0} = \frac{\omega_s^2 \omega_0^2}{\omega_c^2} + \frac{\omega_0^2 c^2 k^2}{\omega_c^2}. \quad (4,32)$$

Другими словами, энергия возбуждений (фотонов) имеет вид $E(p) = \hbar \omega = \sqrt{\frac{\hbar^2 \omega_s^2}{\epsilon_0} + \frac{c^2 p^2}{\epsilon_0}}$, где $p = \hbar k$. Отправляясь от спектра (4,32) и учитывая, что возбуждения подчиняются статистике Бозе, можно вычислить все термодинамические величины. При этом, если существенна область частот, удовлетворяющих условию (4,31), то, конечно, получается прежний результат (4,26). В другом предельном случае очень низких температур, которым мы только и ограничимся, возбуждены лишь длинные волны, так что $c^2 k^2 \ll \omega_s^2$ и

$$\omega = \frac{\omega_s \omega_0}{\omega_c} + \frac{\omega_0 c^2 k^2}{2 \omega_s \omega_c}. \quad (4,33)$$

В этом случае для возбуждений, также как для ротонов в гелии II, можно воспользоваться классической статистикой, и в результате без труда получаем ($E = \hbar \omega$, $p = \hbar k$)

$$\left. \begin{aligned} F_\Phi &= -2 kT \int e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}} \frac{4 \pi p^2 dp}{(2 \pi \hbar)^3} = \\ &= -2 kT \left(\frac{\mu kT}{2 \pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\Delta}{kT}} = -kT N_\Phi, \\ c_\Phi &= 2 \left(\frac{\mu}{2 \pi \hbar^2} \right)^{3/2} \frac{k^{1/2} \Delta^2}{T^{1/2}} e^{-\frac{\Delta}{kT}} \left[1 + \frac{3 kT}{\Delta} + \frac{15}{4} \left(\frac{kT}{\Delta} \right)^3 \right], \\ \Delta &= \frac{\hbar \omega_s \omega_0}{\omega_c}, \quad \mu = \frac{\hbar \omega_s \omega_c}{\omega_0 c^2}, \end{aligned} \right\} \quad (4,34)$$

где N_Φ — число возбуждений, которые ведут себя подобно частицам с массой μ и «энергией покоя» Δ (действительно, согласно (4,33) $E = \Delta + \frac{p^2}{2\mu}$).

В случае олова формулами (4,34) можно пользоваться при $T \ll \frac{\Delta}{k} \sim 0,5^\circ$.

Помимо поперечных волн, в среде, где ϵ может обращаться в нуль, возможны также продольные колебания с частотой, определяемой при $k \rightarrow 0$ из условия $\epsilon(\omega) = 0$ (такие колебания известны для плазмы и часто называются плазменными^{*)}). В нашем случае эта частота равна $\omega = \frac{\omega_s \omega_0}{\omega_c}$. Но таким выражением для ω нельзя ограничиться, так как для вычисления свободной энергии нужно иметь выражение для ω в следующем приближении — с учётом её зависимости от волнового вектора k . Найти подобное выражение можно лишь для конкретной модели, например, для вырожденного ферми-газа. Нужно, впрочем, заметить, что и для поперечных волн выражение (4,32) справедливо только при пренебрежении тепловым и, вообще, так сказать, внутренним движением в системе. Поэтому и в этом случае уточнить формулу (4,32) можно только для конкретной модели. Однако при малых k вид искомого выражения можно получить, прибавив к (4,32) член $\sim v_0^2 k^2$, т. е. оно принимает вид $\omega^2 = \frac{\omega_s^2}{\epsilon_0} + \frac{c^2 k^2}{\epsilon_0} + v_0^2 k^2$, где v_0 — характерная скорость внутреннего движения; в случае упомянутой продольной волны получается такое же выражение, но без члена $\frac{c^2 k^2}{\epsilon_0}$ и с несколько другим значением v_0^2 , чем для поперечных волн. Для классического заряженного газа (плазмы) $v_0^2 \sim \frac{kT}{m}$, для вырожденного ферми-газа $v_0^2 \sim \frac{p_0^2}{m^2}$ (для продольных колебаний⁴⁴ $v_0^2 = \frac{3}{5} \frac{p_0^2}{m}$, для поперечных волн, как сообщал автору В. П. Силин, $v_0^2 = \frac{p_0^2}{5 m^2}$).

В обычных условиях для поперечных волн членом $v_0^2 k^2$ и возможными членами $\sim k^4$ можно пренебречь. Но в нашем случае величина $\frac{c^2 k^2}{\epsilon_0}$ может оказаться меньше, чем $v_0^2 k^2$. Для ферми-газа

^{*)} В работах⁵⁰ представления о плазме и её колебаниях кладутся в основу теории сверхпроводимости. При этом, однако, за исходные принимаются уравнения, эквивалентные уравнениям (1,1) — (1,2), которые как раз и нужно обосновать. Далее, авторы исходят из совершенно ошибочного мнения, что теплоёмкость в сверхпроводящем состоянии меньше, чем в нормальном (?) Поэтому, получая для плазменной частоты частоту $\omega = \omega_s$ (влияния ϵ_0 они не учитывают), авторы ошибочно считают, что получающаяся в результате совершенно ничтожная электронная часть теплоёмкости сверхпроводника отвечает опытным данным. В действительности же электромагнитные возбуждения как продольного, так и поперечного характера могут представлять интерес для теории сверхпроводимости только в случае, если величина ϵ_0 очень велика (порядка $10^9 \div 10^{10}$).

это и имеет место. Как обстоит дело для электронной жидкости в металле, остаётся не ясным, но быть может в этом случае значение τ_0^2 значительно меньше, чем в газе. Если это не так, то неверно основное выражение (4,27) для ϵ и в большой мере все дальнейшие рассуждения. Точнее, если не учитывать членов порядка k^4 и более высокого порядка (в некоторых условиях это может оказаться необходимым), то попрежнему можно записать

$$\epsilon = \epsilon_0 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}, \text{ но оценка величин } \epsilon_0 \text{ и } \omega_s^2 \text{ изменяется *)}. \text{ Дополни-$$

тельные трудности связаны с учётом затухания (поглощения), которым выше пренебрегалось, но которое, начиная с некоторой частоты должно иметь место и при $T \rightarrow 0$.

Помимо всего сказанного нужно иметь в виду, что из соображений о непрерывности перехода из сверхпроводящего состояния в нормальное следует, что ϵ_0 зависит от температуры и при $T \rightarrow T_k$ стремится к значению, отвечающему нормальному металлу, которое относительно невелико и может быть положено равным нулю (несмотря на то, что по абсолютной величине ϵ в нормальном металле может достигать значения $\sim 10^6$. Это подтверждается на опыте⁴⁶, где при $T \rightarrow T_k$ практически $\epsilon_0 \rightarrow 0$. Между тем в (4,26) зависимость ϵ_0 от T при переходе от F к $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ и $c = T \frac{\partial S}{\partial T}$ не учитывалась. Если отбрасывать от выражения (4,26) для F , то, учитывая зависимость ϵ_0 от T , получаем:

$$c_F = \frac{4\pi^2 k^4 \epsilon_0^{3/2} T^3}{15 \hbar^3 c^3} \left[1 + \frac{T}{\epsilon_0} \frac{d\epsilon_0}{dT} + \frac{T^2}{16 \epsilon_0^2} \left(\frac{d\epsilon_0}{dT} \right)^2 + \frac{T^2}{8 \epsilon_0} \frac{d^2 \epsilon_0}{dT^2} \right]. \quad (4,37)$$

Однако нет полной уверенности в том, что за исходное в данном случае нужно брать выражение для свободной энергии F . Последнее справедливо, если ϵ_0 есть диэлектрическая постоянная, имеющая, так сказать, внешний характер по отношению к рассматриваемым электромагнитным волнам. В этом случае $\frac{\epsilon_0 F^2}{8\pi}$ есть

свободная энергия, а её и нужно вычислять. Но в нашем случае величина ϵ_0 , повидимому, тесно связана с самими электромагнитными колебаниями. Действительно, подобно тому, как в случае сверхтекучести с возбуждениями связана часть плотности жидкости (см. (4,14)), так и возбуждения в сверхпроводнике должны, повидимому, относиться к нормальной части электронной жидкости. Так, если считать, что возбуждения суть фотоны со скоростью

*) В этом плане можно, повидимому, заключить, что теоретический вывод о том, что в сверхпроводнике $\epsilon_0 \sim 10^9 \div 10^{10}$ (если $n_e \sim n_0$; см. (4,28)) не является обязательным. Поэтому особенно большое значение имеет экспериментальное определение ϵ_0 .

$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}$, где $\varepsilon_0 = \text{const}$, то по аналогии с (4,14) можно установить, что эффективная концентрация электронов, связанных с возбуждениями, равна (см. также (4,26)) *):

$$n_b = \frac{4 E_{\Phi}}{3 m u^2} = \frac{4 \pi^2 (kT)^4 \varepsilon_0^{5/2}}{45 \hbar^3 m c^5}. \quad (4,36)$$

Для олова при $T_k = 3,7^\circ$, полагая $\varepsilon_0 = 5 \cdot 10^9$, находим $n_b \approx 410^{18}$. Это значение ещё значительно меньше не только $n_c \approx 5 \cdot 10^{22}$, но и $n_s = 7 \cdot 10^{21}$. Однако неточность формулы (4,36) совсем не исключает возможности того, что n_b при T_k будет сравнимо с n_c при $T = 0$. В подобных условиях величина $\varepsilon_0(T)$, зависящая от $n_c(T)$, не независима от самих электромагнитных колебаний, и может оказаться более правильным вычислять сначала не свободную энергию, а энтропию (разница связана с тем, что в определяемую величину входит только ε_0 , в то время как производные величины зависят также от $\frac{d\varepsilon_0}{dT}$; приведённым замечанием автор обязан Л. Д. Ландау).

Резюмируя, можно сказать, что количественная сторона вопроса о вкладе теплового излучения в сверхпроводнике в его теплоёмкость ещё не ясна. Однако необходимость учёта в сверхпроводниках роли теплового излучения или, другими словами, возбуждений фотонного типа несомненна (разумеется, если дальнейшие эксперименты подтвердят вывод о том, что $\varepsilon_0 \approx 10^9 - 10^{10}$). Вклад этих возбуждений в теплоёмкость может оказаться даже главным. Так, если для теплоёмкости c воспользоваться для ориентировки выражением (4,26), то для олова при $\varepsilon_0 = 5 \cdot 10^9$ для температур в 1 и 2° вычисленное значение теплоёмкости всего примерно в два раза меньше измеренных ³² значений.

Фотонные возбуждения удовлетворяют условию сверхпроводимости (4,20) и их учёт, как уже упоминалось, позволяет избежать некоторых затруднений, связанных с принятием спектра (4,21), который для краткости будем называть квазифермиевским. Действительно, отмеченное различие в значениях a_n и a_s и, следовательно, граничных импульсах p_0 в нормальной и сверхпроводящей фазах было связано с предположением, что возбуждения (4,21)

*) Так же, как в случае гелия II (см. (4,14)), плотность $\rho_s = m n_b$ зависит от скорости жидкости v . Подобная зависимость должна приводить (см. ⁵¹ и ² дополнение) к нелинейности электродинамических процессов в сверхпроводниках, так как скорость v прямо связана с магнитным полем H (см. (4,19)). Однако фактически нелинейные явления в сверхпроводниках невелики (см. дополнение к настоящей статье). Это свидетельствует о том, что даже в поле H_k $v^2 \ll u^2$, так же, как это имеет место в гелии II, где $v_c \ll u$. Поэтому в (4,36) зависимость E_{Φ} от v не учтена.

ответственны за всю теплоёмкость металла. Принимая во внимание наличие фотонных возбуждений, подобное требование уже просто недопустимо и можно положить $\alpha_s = \alpha_n$ (см. (4,22) — (4,23)). Далее, с фотонными возбуждениями может быть связана значительная часть «нормальной» электронной жидкости (см. (4,36)). Этот момент существен с точки зрения понимания характера непрерывного перехода в нормальное состояние. К этому нужно добавить, что при $T \rightarrow T_k$, подобно тому как это имеет место в гелии II при приближении к λ -точке, представление о газе возбуждений может оказаться непригодным и необходимо учитывать взаимодействие возбуждений, что ослабляет остроту вопроса о непрерывности изменения, например, нормальной проводимости при переходе через критическую температуру.

С другой стороны, принятие квазифермиевского спектра (4,21) представляется нам привлекательным по целому ряду причин. Во-первых, введение некоторой щели, отделяющей основное состояние от возбуждённых, диктуется всеми соображениями, указанными в § 3. Щель нужна для обеспечения «жёсткости» волновой функции в основном состоянии, что приводит к сверхпроводимости. Разрушение сверхпроводимости магнитным полем при наличии щели связывается с зеemanовским сдвигом уровней, приводящим к «захлопыванию» щели. Во-вторых, родство квазифермиевского спектра (4,21) с фермиевским спектром представляется (наряду с уже отмеченным возрастанием числа возбуждений) положительным моментом с точки зрения понимания перехода сверхпроводника в нормальное состояние с фермиевским спектром, хотя вопрос об этом переходе и остаётся неясным. Наконец, в-третьих, введение щели Δ можно связать и с появлением большого ϵ_0 и, следовательно, с появлением фотонного спектра. Действительно, как следует из теории дисперсии электромагнитных волн в металлах (см. ^{7a} § 4, 2) и ясно непосредственно, часть ϵ , обратно пропорциональная ω^2 (см. (4,27)), не связана с переходами в другое состояние; значение же ϵ_0 определяется переходами электрона в другие зоны. Поскольку расстояние между зонами велико, т. е. частоты ω_{0k} в (4,27) велики, значение ϵ_0 в нормальном состоянии относительно мало. Появление щели на границе Ферми в рамках существующей одноэлектронной модели металла может быть связано с появлением новой зоны (например, с удвоением числа зон; см. ниже). В этом случае новая зона столь близка к заполненной, что частоты перехода малы (нижние из них порядка $\frac{\Delta}{\hbar}$) и значение ϵ_0 становится большим. Не опираясь на сугубо ограниченные, особенно с точки зрения теории сверхпроводимости, зонные представления, можно просто сказать, что появление большого ϵ_0 связано с наличием низких собственных частот $\omega_0 \sim \frac{kT_k}{\hbar}$, а та-

кие частоты, очевидно, и должны появиться при введении щели Δ , которая согласно § 3 как раз порядка $\hbar T_K$.

Таким образом, имеются, как нам кажется, основания думать, что спектр сверхпроводника является комбинированным и объединяет возбуждения типа (4,21) и возбуждения фотонного типа. При этом исходным, определяющим появление сверхпроводящего состояния со всеми его особенностями, является существование некоторой щели $\Delta \sim \hbar T_K$, отделяющей основное состояние металла от его возбуждений электронного типа (для фотонных возбуждений, как ясно из (4,32), при $\hbar = 0$, щель получается автоматически, но она в этом случае в известном смысле и не существенна).

Механизм образования щели остаётся ещё совершенно не ясным. Об этом уже была речь в § 3 в) и здесь мы ограничились указанием на интересную работу⁵³, где обсуждается возможность образования щели, связанная с изменением (например, удвоением) периода кристаллической решётки и, следовательно, удвоением числа зон в кристалле. Если изменение решётки крайне незначительно, а подобные примеры известны (антиферромагнетики), то щель между вновь образующимися зонами также будет ничтожна. В металле появление малой щели даже у самой границы Ферми будет несущественно, повидимому, до тех пор, пока неопределённость в энергии электронов $\Delta E \sim \frac{\hbar}{\tau} = \hbar \nu$, связанная с конечностью времени свободного пробега $\tau \equiv \frac{1}{\nu}$, не станет меньше или хотя бы порядка ширины щели Δ . Даже в очень чистом металле при низкой температуре из-за остаточного сопротивления $\nu \sim 10^{10} \div 10^{11}$ и $\frac{\Delta E}{\hbar} \sim \frac{\hbar \nu}{\hbar} \sim 0,1 - 1^\circ$. Остаётся, однако, неясным, не нужно ли под τ понимать только время свободного пробега, связанное с неупругими соударениями. Вообще, интересный вопрос о влиянии очень узкой щели (в пределе щели, стремящейся к нулю) на процессы переноса в металле ещё не исследовался, но несомненно, что достаточно узкая щель не может оказывать существенного влияния на какие-либо процессы.

В⁵³ появление очень узкой щели привлекается для объяснения аномального поведения сопротивления несверхпроводящих металлов при $T \rightarrow 0$ (см., например,² § 23 и *). Вопрос о возможной идентификации щели такого типа со щелью, нужной для объяснения сверхпроводимости, заслуживает, по нашему мнению, пристального внимания *). Связь подобной щели с решёткой, имею-

*) С этой точки зрения особый интерес представила бы попытка экспериментального исследования вопроса о наличии в сверхпроводящем состоянии каких-нибудь, хотя бы самых ничтожных, изменений решётки и в особенности её периода по сравнению с нормальным состоянием.

нящаяся с самого начала, представляется естественной с точки зрения изотопического эффекта, для объяснения которого в модели со щелью нужно считать, что ширина щели Δ зависит от массы ядра M (см. § 3 в)).

Вопрос о природе щели относится скорее к микроскопической теории, чем к квазимикроскопической, но, разумеется, всякое противопоставление обоих подходов совершенно неуместно и единственно правильным является их совместное использование. Именно такой путь и представляется наиболее обещающим.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате всего изложенного, положение в области микроскопической теории сверхпроводимости представляется нам следующим. Для гипотезы спонтанных токов нет никаких оснований (§ 2) и единственной заслуживающей внимания является диамагнитная гипотеза (§ 3). Согласно этой последней сверхпроводящий ток аналогичен диамагнитному току в атомах и сверхпроводимость может появиться в результате «жёсткости» волновой функции для части электронов проводимости в металле. Подобная «жёсткость» является скорее всего следствием существования некоторой энергетической щели, отделяющей основное состояние сверхпроводящего металла от его слабо возбуждённого состояния, отвечающего наличию в металле какого-то числа «элементарных возбуждений».

На языке возбуждений появление сверхпроводимости связано с определённым условием, накладываемым на зависимость энергии возбуждений от их импульса (см. (4,20)). Вопрос о причинах, приводящих к появлению энергетической щели в спектре и вообще о сколько-нибудь строгом получении спектра электронов в металле остаётся открытым.

Все предпринятые в последние годы попытки построения микроскопической теории сверхпроводимости (работы Гейзенберга и Коппе¹⁰⁻¹¹, Борна и Шенга¹², Бардина²³, Фрёлиха^{33, 37}, Тиссы и Люттингера^{54, 55}, Мёглиха и Ромше⁵⁰ и др.) являются, по нашему мнению, либо ошибочными, либо лишены позитивных моментов. Объясняется это различными причинами: принятием гипотезы спонтанных токов, использованием теории возмущений за пределами её применимости и игнорированием всей совокупности имеющихся экспериментальных фактов, а также глубокой аналогии между сверхпроводимостью и сверхтекучестью. В качестве одного из наиболее существенных примеров в этом отношении укажем, что ни в одной из перечисленных работ не принимается во внимание наличие в сверхпроводнике огромной диэлектрической постоянной ϵ_0 .

Развитие микроскопической теории сверхпроводимости связано с построением новой модели металла взамен существующей одно-

электронной (газовой) модели или, во всяком случае, с существенным обобщением или дополнением последней. Этим в большой мере и объясняются те исключительные трудности, с которыми сталкивается создание микротeorии сверхпроводимости. Надеяться здесь на успешность более или менее строгих методов анализа спектров системы многих частиц довольно трудно. Наиболее обещающим и плодотворным представляется поэтому квазимикроскопический подход к теории сверхпроводимости и его комбинирование с определёнными модельными соображениями (§ 4).

В этом плане особенно важна непрерывная связь с экспериментом, непрерывный контроль теоретических построений на опыте. При этом с точки зрения микротeorии сверхпроводимости наиболее важны следующие экспериментальные исследования: всестороннее выяснение вопроса о зависимости диэлектрической постоянной ϵ_0 от частоты и температуры; возможно более точное определение теплоёмкости сверхпроводников в сверхпроводящем и нормальном состояниях c_s и c_n (в особенности при низких температурах); определение оптическим методом концентраций свободных электронов в нормальном состоянии n_0 ; нахождение для тех же металлов (и лучше всего для тех же образцов, для которых измеряются ϵ_0 , c_s , c_n и n_0) электропроводности $\sigma(\omega, T)$, а также теплопроводности $\lambda(T)$; для тех же образцов нужно, конечно, знать также глубину проникновения в статическом поле $\delta_0(T)$ (определение всех трёх величин $\epsilon_0(\omega, T)$, $\delta(\omega, T)$ и $\delta_0(T)$ сводится к нахождению комплексной диэлектрической постоянной $\epsilon'(\omega, T)$). Наконец, большой интерес представляли бы также рентгенографические (или какие-либо другие по методике) попытки обнаружить хотя бы самые мало заметные изменения кристаллической структуры металла при его переходе в сверхпроводящее состояние.

Можно думать, что быстрое развитие эксперимента и дальнейшая теоретическая работа с учётом уже выясненных моментов, освещённых в этой статье, приведут в недалёком будущем к созданию микроскопической теории сверхпроводимости, которая по своей полноте и убедительности не будет уступать теоретическим построениям, успешно используемым в других областях физики твёрдого тела и физики низких температур.

ДОПОЛНЕНИЕ. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

Примерно за полтора года, прошедшие со времени написания первой части этой статьи (цитируется как I), прояснился ряд вопросов, относящихся к рассмотренной в I макроскопической теории сверхпроводимости. Целью настоящего дополнения является осветить эти вопросы.

а) Поведение тонких сверхпроводящих плёнок, цилиндров и шариков в магнитном поле

Из развитой в²⁶ (см. I, §§ 3, 4) макроскопической теории сверхпроводимости вытекает весьма своеобразное поведение сверхпроводящих плёнок, а также сверхпроводящих образцов другой формы (цилиндры, шарики) с малыми размерами. Недавно некоторые выводы теории были подтверждены на опыте^{48, 49, 20}. В этой связи целесообразно подробнее, чем в I, остановиться на свойствах сверхпроводящих плёнок⁵⁶ и некоторых близких вопросах^{57, 58}.

Как с точки зрения прозрачности теоретических выводов, так и с точки зрения однозначной интерпретации экспериментальных данных, особое значение имеют тонкие плёнки, для которых

$$\left(\frac{\chi d}{\delta_0}\right)^2 \ll 1, \quad (D1)$$

где d — полутолщина плёнки, δ_0 — глубина проникновения в слабом поле и χ — характерный параметр, входящий в теорию (см. I) и равный для Hg и Sn примерно 0,15 или даже ещё меньшему значению.

Ввиду малости χ^2 для плёнок с $d \lesssim \delta_0$ в хорошем приближении можно вообще положить $\chi = 0$, т. е., как ясно из I, пренебречь зависимостью концентрации сверхпроводящих электронов $n_s = |\Psi|^2$ от координат. В этом случае вся теория приобретает особенно простую форму и легко может быть развита независимо от более общего рассмотрения, предпринятого в²⁶ и I.

Плотность свободной энергии нормальной фазы с учётом энергии магнитного поля равна

$$F_{nH} = F_{n0} + \frac{H_0^2}{8\pi}, \quad (D2)$$

где F_{n0} — свободная энергия без учёта энергии поля и H_0 — напряжённость внешнего магнитного поля, которое считается ниже параллельным плёнке.

Плотность свободной энергии сверхпроводящей фазы при $\chi = 0$ равна (см. (I; 3,5)):

$$F_{sH} = F_{n0} + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{e^2}{2mc^2} A^2 |\Psi|^2 + \frac{H^2}{8\pi}, \quad (D3)$$

где $H = \frac{dA}{dz}$ — напряжённость поля в металле.

Плотность сверхпроводящего тока $\mathbf{j}_s = -\frac{e^2}{mc} |\Psi|^2 \mathbf{A}$, а вводящий обычно в теорию параметр $\Lambda = \frac{m}{e^2 n_s} = \frac{m}{e^2 |\Psi|^2}$ (см. (I; 2,9)).

Поэтому плотность (Д3) равна $F_{sH} = F_{n0} + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{A_s^2}{2} + \frac{H^2}{8\pi}$ и отличается при $x=0$ от плотности энергии, используемой в старой теории (см. (I; 2,22)) только членами $\alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 = \alpha n_s + \frac{\beta}{2} n_s^2$, учитывающими зависимость свободной энергии от концентрации сверхпроводящих электронов и имеющими вид, обычный в теории фазовых переходов 2-го рода.

При отсутствии магнитного поля в состоянии равновесия $\frac{\partial F_{sH}}{\partial n_s} = 0$, т. е. $n_s = |\Psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$ и $F_{n0} - F_{s0} = \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi} = \frac{\alpha^2}{2\beta}$, где $H_{\text{км}}$ — критическое магнитное поле в случае массивного металла. Магнитное поле при $x=0$ определяется уравнением (см. (I; 3,8)):

$$\Delta A = -\frac{4\pi j_s}{c} = \frac{4\pi e^2}{mc^2} |\Psi|^2 A. \quad (\text{Д4})$$

Для дальнейшего удобно перейти к приведённой концентрации сверхпроводящих электронов $\Psi_0^2 = \frac{\Psi^2}{\Psi_\infty^2}$ ($\Psi_\infty^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$ — концентрация при $H_0=0$), где вместо модулей употребляются сами величины, поскольку в интересующем нас случае функция Ψ вещественна.

Уравнение (Д4) и его решение для пластины с толщиной $2d$, находящейся во внешнем поле H_0 , принимает вид

$$\frac{d^2 A}{dz^2} - \frac{\Psi_0^2}{\delta_0^2} A = 0, \quad A = \frac{\delta_0 H_0 \text{sh} \frac{\Psi_0 z}{\delta_0}}{\Psi_0 \text{ch} \Psi_0 \frac{d}{\delta_0}}, \quad H = \frac{dA}{dz} = \frac{H_0 \text{ch} \Psi_0 \frac{z}{\delta_0}}{\text{ch} \Psi_0 \frac{d}{\delta_0}}, \quad (\text{Д5})$$

где, напомним ещё раз, δ_0 — глубина проникновения в слабом поле $H_0 \rightarrow 0$ (при $H_0=0$, $\Psi_0^2=1$), координата z отсчитывается от середины пластины, поле H и потенциал A направлены соответственно по осям y и x (см. I, § 3).

Найдём теперь свободную энергию пластины в сверхпроводящем состоянии F'_{sH} , отнесённую к единице объёма. Для этой цели нужно проинтегрировать по z от $-d$ до $+d$ выражение (Д3), где A и H имеют значения (Д5), и разделить результат на $2d$. Кроме того, поскольку мы интересуемся полной энергией металла и поля, нужно учесть изменение энергии поля, расположенного вне пластины (это изменение выступает в явном виде, если пластина конечна). Для этой цели, как показано в I (см. также ⁵⁷), к плотности F_{sH} нужно добавить плотность энергии «намагничивания»

$-MH_0 = -\frac{H_0 - H}{4\pi}H_0$. В результате энергия $F'_{sH} = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d (F_{sH} - MH_0) dz$ равна *)

$$F'_{sH} = F'_{nH} + \frac{H_0^2}{8\pi} \left(1 - \frac{\Psi_0 d}{\Psi_0^2} \right) + \frac{H_{KM}^2}{8\pi} (\Psi_0^4 - 2\Psi_0^2), \quad (D6)$$

где уже произведён переход к единицам $\Psi_0^2 = \frac{\Psi^2}{\Psi_\infty^2}$ и учтено, что $\frac{H_{KM}^2}{8\pi} = \frac{a^2}{2\beta}$ и $\Psi_\infty^2 = -\frac{a}{\beta}$.

Величина Ψ_0 в состоянии равновесия определяется из условия минимальности F'_{sH} , т. е. из условия $\frac{\partial F'_{sH}}{\partial \Psi_0} = 0$, сразу же приводящего к уравнению

$$\left(\frac{H_0}{H_{KM}} \right)^2 = \frac{4\Psi_0^2(\Psi_0^2 - 1) \operatorname{ch}^2 \frac{\Psi_0 d}{\delta_0}}{1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{2\Psi_0 d}{\delta_0}}{2\Psi_0^2 \frac{d}{\delta_0}}}. \quad (D7)$$

Зависимость $F'_{sH} - F'_{nH}$ от Ψ_0 согласно (D6) ясна из рис. 4 и 5, а зависимость экстремального значения Ψ_0 , определяемого из (D7), показана на рис. 6.

Все кривые делятся на два класса в зависимости от величины отношения $\frac{d}{\delta_0}$, причём, как показано ниже (см. также I), критическое значение d_k , лежащее на границе между этими классами, равно

$$d_k = \frac{\sqrt{5}}{2} \delta_0 = 1,12 \delta_0. \quad (D8)$$

Если $d < d_k$ (рис. 4, кривая *в* на рис. 6), уравнение (D7) имеет при $\Psi_0 \neq 0$ только решение, отвечающее минимуму (т. е. устойчивому сверхпроводящему состоянию), причём с ростом поля H_0 значение Ψ_0 в этом минимуме убывает и обращается в нуль при

$$\frac{H_{K1}}{H_{KM}} = \sqrt{6} \frac{\delta_0}{d}. \quad (D9)$$

(Это значение есть также условие обращения производной $\frac{\partial^2 F'_{sH}}{\partial \Psi_0^2}$ в нуль при $\Psi_0 = 0$.)

*) В нормальном состоянии поле в пластине однородно и равно H_0 . Поэтому энергия единицы объёма F'_{nH} просто равна плотности энергии

$$F_{nH} = F_{n0} + \frac{H_0^2}{8\pi}.$$

Нормальная фаза, в которой $\Psi_0 = 0$, при $d < d_k$ и $H_0 < H_k$, существовать даже как метастабильная не может. Напротив, при $H_0 > H_{k1}$ не может существовать сверхпроводящая фаза. Этот случай есть случай фазового перехода 2-го рода — в точке фазового перехода $\Psi_0 = 0$. Гистерезис в этой области, очевидно, невозможен.

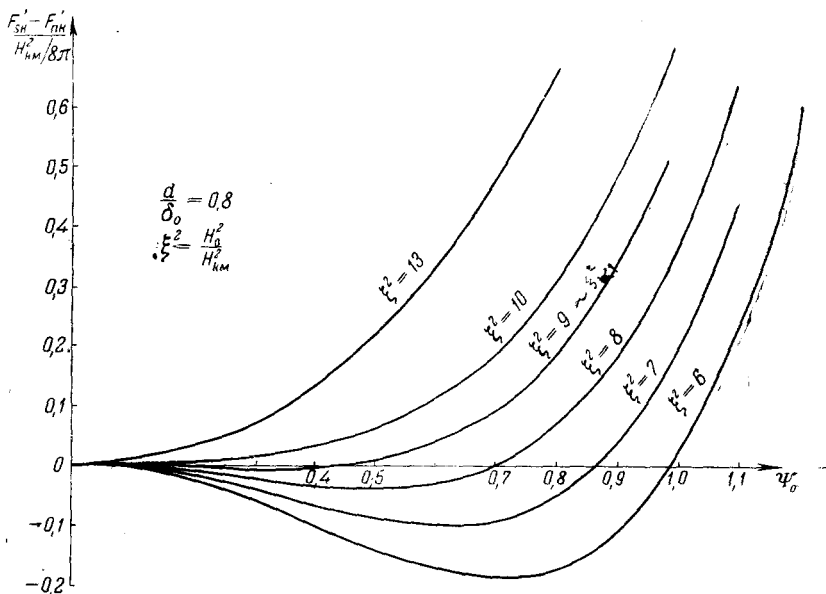


Рис. 4.

Если $d > d_k$, то при $H_0 < H_{k1}$ уравнение (Д7) имеет только решение, отвечающее минимуму, но при $H_{k2} > H_0 > H_{k1}$ имеется также решение, отвечающее максимуму (область ниже точек А на кривых а и б рис. 6; см. также рис. 5).

В этой области полёй могут существовать как нормальная, так и сверхпроводящая фазы, причём одна из них является метастабильной (например, нормальная фаза метастабильна, если $F_{nH} > F_{sH}$). Фазовый переход в равновесных условиях имеет место, когда $F_{sH} = F_{nH}$, т. е. согласно (Д6) в поле H_k , определяемом из условия

$$\left(\frac{H_k}{H_{kM}}\right)^2 = \frac{\Psi_0^2 (2 - \Psi_0^2) \frac{d}{\delta_0}}{1 - \frac{\text{th} \Psi_0}{\Psi_0} \frac{d}{\delta_0}}. \quad (\text{Д10})$$

Для нахождения поля H_k и соответствующего значения Ψ_{0k} в точке перехода, являющегося, очевидно, переходом 1-го рода.

нужно совместно решать уравнение (Д10) и уравнение (Д7) с $H_0 = H_k$ (эти уравнения совпадают при этом с (1; 4,26), (1; 4,27)).

В поле $H_0 > H_{k2}$, где поле H_{k2} отвечает максимуму на кривых рис. 6, сверхпроводящая фаза существовать не

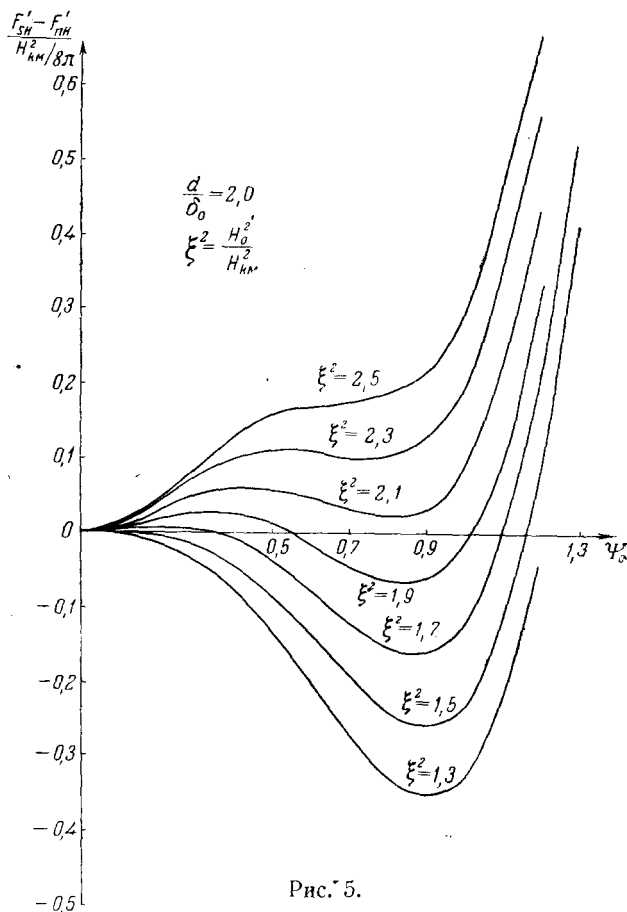


Рис. 5.

может. Из (Д7) и рис. 6 легко видеть, что при $\Psi_0 = 0$, $\frac{\partial H_0}{\partial \Psi_0} = 0$, а в точке $d = d_k$, кроме того, $\frac{\partial^2 H_0}{\partial \Psi_0^2} = 0$; из этого последнего условия особенно легко прийти к формуле (Д8). Существование критической толщины d_k , ниже которой невозможен гистерезис и критическое поле должно определяться выражением (Д9), было подтверждено работой^{48, 49}.

Для плёнок с полутолщиной d , большей $d_k = 1,12 \delta_0$, как сказано, переход из сверхпроводящей в нормальную фазу, и наоборот, является переходом 1-го рода и возможно существование метастабильной нормальной и сверхпроводящей фаз, а следовательно, и наличие гистерезиса. При этом характерно, что области существования метастабильных фаз ограничены. Так, нормальная фаза

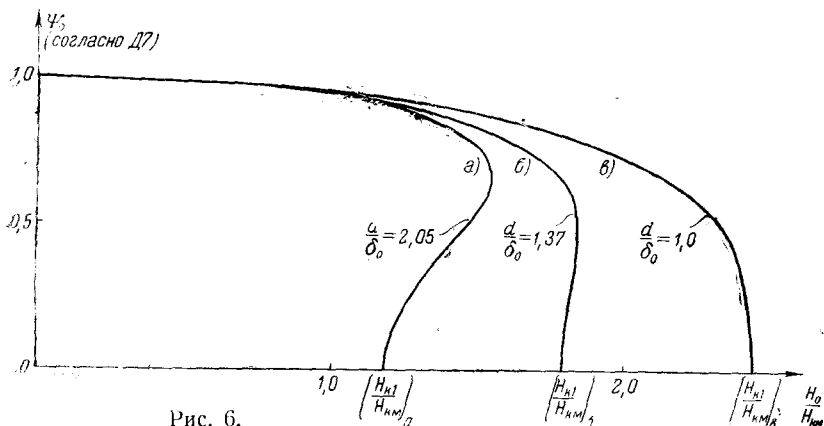


Рис. 6.

может существовать лишь в поле $H_0 > H_{k1}$ (см. (Д9)). Поэтому область «переохлаждения» (т. е. область существования метастабильной нормальной фазы) отвечает полям H_0 в интервале $H_{k1} < H_0 < H_k$. Область «перегрева», где может наблюдаться метастабильная сверхпроводящая фаза, лежит при $H_k < H_0 < H_{k2}$. Максимальная амплитуда гистерезиса ограничена, таким образом, полями H_{k1} и H_{k2} (см. рис. 7, на котором дана зависимость полей H_{k1} , H_k и H_{k2} от $\frac{d}{\delta_0}$; заметим, что при сравнении теории с опытом удобнее представлять критические поля как функцию $\frac{\delta_0}{d}$, а не $\frac{d}{\delta_0}$, так как зависимость $\frac{H_{k1}}{H_{km}}$ от $\frac{\delta_0}{d}$ представляется прямой линией).

На опыте гистерезис весьма несимметричен в том отношении, что переохлаждение наблюдается без особого труда, перегрев же обычно, повидимому, не заметен⁴⁸; то же относится к массивным образцам, где перегрев наблюдался лишь недавно (указание на это имеется в^{58, 104}). Трудно сомневаться в том, что подобная несимметрия связана с существенно различными условиями, в которых при наличии магнитного поля оказываются зародыши нормальной и сверхпроводящей фаз, обладающих совершенно различными «магнитными» свойствами. Детальнее этот вопрос ещё не рассмотрен.

При утолщении плёнки гистерезис вначале должен увеличиваться (при $d \leq d_k$ он равен нулю), но затем перестаёт расти и, вероятно, даже уменьшается. Дело в том, что фазовый переход в образцах малых размеров затруднён, так как в этом случае

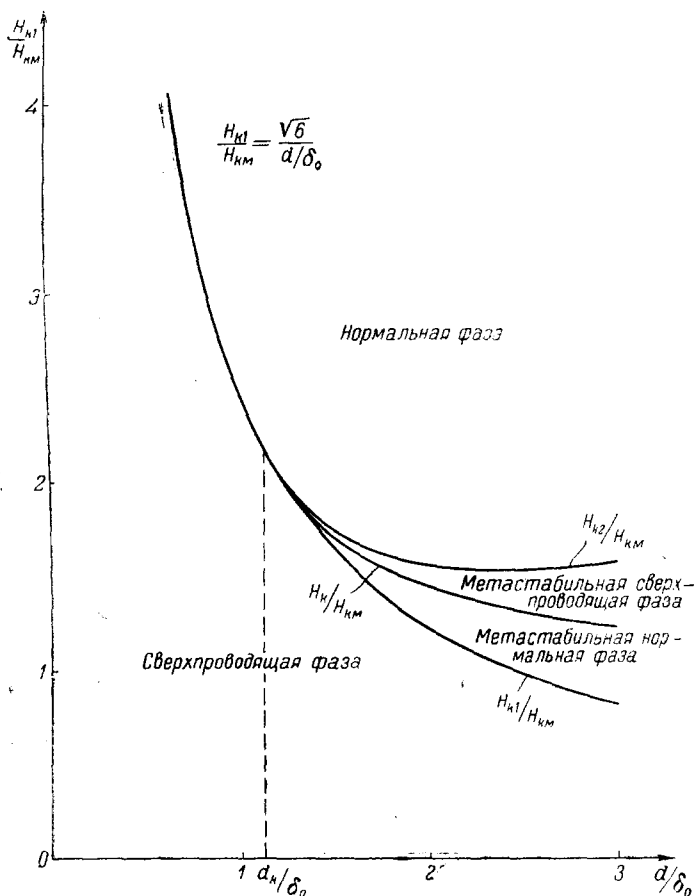


Рис. 7.

удельный вес поверхностной энергии зародышей особенно велик. Переход от сверхпроводящей фазы к нормальной не является к тому же резким, а происходит в области с толщиной $\frac{\delta_0}{\chi} \sim 10^{-4}$ см (см. ниже). Подобные границы в сверхпроводниках малых размеров ($d \sim \delta_0 \sim 10^{-5}$) вообще не могут существовать, при утоньшении же переходного слоя энергия резко возрастает. Поэтому образцы малых размеров должны переходить из одной фазы в другую

целиком, что приведёт к увеличению гистерезиса с возрастанием размеров образца. Но при достижении достаточно больших размеров образование зародышей облегчается и для возрастания гистерезиса уже не только нет оснований, но он может даже уменьшаться.

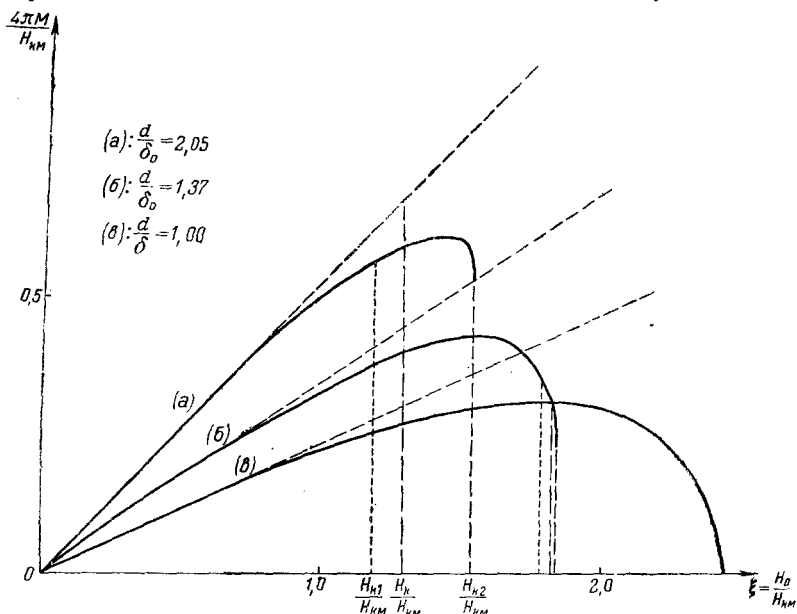


Рис. 8.

Помимо критического поля можно также измерять магнитный момент плёнки в зависимости от напряжённости внешнего поля H_0 . Магнитный момент плёнки, отнесённый к единице площади

её поверхности, равен $\mu = \int_{-d}^d \frac{H - H_0}{4\pi} dz \doteq 2 d \bar{M}$ (см. (I; 4,16) и

(I; 4,32)), причём среднее «намагничение» $\bar{M}$ равно

$$\bar{M} = -\frac{H_0}{4\pi} \left(1 - \frac{th \frac{\Psi_0 d}{\delta_0}}{\Psi_0 \frac{d}{\delta_0}} \right), \quad (\text{Д11})$$

где функция Ψ_0 определяется уравнением (Д7).

Зависимость M от H_0 ясна из рис. 8 и находится в качественном согласии с результатами, полученными в ²⁰ (по целому ряду причин в данном случае количественного согласия и нельзя было ожидать). По старой теории зависимость $\bar{M}$ от H_0 должна была бы иметь форму треугольника ($\bar{M} = \text{const} \cdot H_0$ при $H_0 < H_K$;

$\bar{M}=0$ при $H_0 > H_k$), показанного пунктиром на кривой α рис. 8. Если не касаться технических трудностей, то проверку формулы (Д11) лучше всего производить на плёнках с $d < d_k$, когда эффект зависимости $\bar{M}$ от H_0 выражен наиболее ярко и при строгой параллельности плёнки и поля не должно быть гистерезиса.

Выше было положено $\chi=0$, в то время как фактически в известных случаях $\chi \simeq 0,15$. Поэтому теперь необходимо остановиться на вопросе о влиянии величины χ на критическое поле.

При $d \leq d_k$ поправки, связанные с тем, что $\chi \neq 0$, определяются параметром $\left(\frac{\chi d}{\delta_0}\right)^2$ и, например, вместо (Д9) имеем:

$$\left(\frac{H_{k1}}{H_{km}}\right)^2 = 6 \left(\frac{\delta_0}{d}\right)^2 \left[1 + \text{const} \left(\frac{\chi d}{\delta_0}\right)^2\right],$$

где введённая постоянная порядка единицы или меньше *). Даже при $d \sim d_k \left(\frac{\chi d}{\delta_0}\right)^2 \sim 2 \div 3\%$ и поэтому в области, где имеет место переход 2-го рода, соответствующая поправка не существенна. Однако в области, где $\frac{\chi d}{\delta_0} \gtrsim 1$, влияние χ сказывается уже в 1-м порядке, т. е. членах порядка χ , а не χ^2 (см. ²⁶ и I). К сожалению, эта область весьма трудна для исследования аналитическими методами и формула для $\frac{H_k}{H_{km}}$ получена пока только в предельном случае $\frac{\chi d}{\delta_0} \gg 1$. Этой формулой является формула (I; 4,20):

$$\frac{H_k}{H_{km}} = 1 + \frac{\delta_0}{2d} \left(1 + \frac{\chi}{8\sqrt{2}}\right), \quad \frac{\chi d}{\delta_0} \gg 1, \quad (\text{Д12})$$

где учтено, что $\chi \ll 1$. В I и ²⁶ без достаточных на то оснований в качестве условия применимости формулы (Д12) указано неравенство $d \gg \delta_0$ вместо более жёсткого неравенства $\frac{\chi d}{\delta_0} \sim \frac{d}{6\delta_0} \gg 1$ (заметим, что при $\chi=0$ и $d \gg \delta_0$ справедлива формула (Д12) с $\chi=0$).

На опыте условие $\frac{\chi d}{\delta_0} \gg 1$ обычно не выполняется. Поэтому несовпадение ⁴⁸ значения δ_0 , получаемого из измерения H_k/H_{km} для

*) В ²⁶ и в (I; 4,33) приведено значение этой постоянной $\text{const} = 7/60$. Однако соответствующий расчёт при $\left(\frac{\chi d}{\delta_0}\right)^3 \ll 1$, как выяснилось, недостаточно корректен и поэтому формулы (I; 4,33) и (I; 4,34), повидному, не верны. Более точный расчёт поправок порядка χ^2 к значениям H_{k1} и d_k ещё не производился.

толстых плёнок с применением формулы (Д 12), где членом $\frac{x}{8\sqrt{2}} \sim 1\%$ можно пренебречь, со значением δ_0 , определяемым другими методами (из (Д 9) или (Д 11); см.^{20, 48, 49}), может быть связано с непригодностью для недостаточно толстых плёнок формулы (Д 12). Кроме того, из-за наличия гистерезиса и, вообще, возможности переохлаждения и перегрева, без дальнейшего неизвестно с каким именно значением H_k мы имеем дело на опыте. Формула же (Д 12) относится, разумеется, к «равновесному» критическому полю, для которого $F'_{sH} = F'_{nH}$. Вопрос о поведении в магнитном поле толстых плёнок нуждается в дальнейшем экспериментальном и теоретическом исследовании.

Помимо тонких плёнок представляют также интерес образцы другой формы и, в первую очередь, сверхпроводящие цилиндры и шарики. Поведение таких образцов по старой теории указано в I, § 2 и цитируемой там литературе. Решение задачи о сверхпроводящем цилиндре и шаре в магнитном поле на основе теории²⁶ проведено в²⁷. Соответствующие результаты в предположении, что $x = 0$, таковы:

Сверхпроводящий цилиндр в параллельном его оси поле

$$r_k = \sqrt{3} \delta_0, \quad \frac{H_{k1}}{H_{km}} = \frac{4\delta_0}{r}. \quad (\text{Д } 13)$$

Сверхпроводящий цилиндр в перпендикулярном поле

$$r_k = \sqrt{3} \delta_0, \quad \frac{H_{k1}}{H_{km}} = \frac{\sqrt{8} \delta_0}{r}. \quad (\text{Д } 14)$$

Шар

$$r_k = \frac{\sqrt{21}}{2} \delta_0, \quad \frac{H_{k1}}{H_{km}} = \frac{2\sqrt{5} \delta_0}{r}, \quad (\text{Д } 15)$$

где r_k — критическое значение радиуса шара или цилиндра. При $r < r_k$ разрушение сверхпроводимости полем происходит в результате перехода второго рода, причём соответствующее критическое поле даётся формулами (Д 13) — (Д 15). Эти формулы аналогичны выражениям (Д 8) — (Д 9) для плёнок.

В случае массивного шара или цилиндра в перпендикулярном поле полному разрушению сверхпроводимости предшествует переход в промежуточное состояние. Однако для образцов достаточно малого размера возникновение промежуточного состояния невозможно, так как образование границы между сверхпроводящей и нормальной фазами, во всяком случае, сильно затруднено. Поэтому перехода в промежуточное состояние можно ожидать только для образцов, для которых $r > 10^{-4}$, и может быть даже $r \gg 10^{-4}$. Далее, при $r < r_k$ разрушение сверхпроводимости цилиндров и шариков не может сопровождаться гистерезисом по

той же причине как для плёнок с $d < d_k$ (см. выше). При $r > r_k$ гистерезис возможен и по указанным ранее причинам можно даже ожидать, что гистерезисные явления с возрастанием r будут сначала проявляться всё более ярко, а затем опять уменьшаться. Повидимому, именно такое поведение и характерно для гистерезиса в случае мелких (коллоидальных) сверхпроводящих шариков ртути (в⁵⁸ указывается, что при $r < 5 \cdot 10^{-6}$ гистерезис выражен очень слабо, затем гистерезис растёт до значений r , равных нескольким единицам на 10^{-5} , а при дальнейшем увеличении r гистерезис снова падает *)). Помимо значений r_k и H_k для цилиндра и шара в⁵⁷ получены также выражения для магнитного момента в этих случаях (точнее, в⁵⁷ приведены не магнитные моменты, а эффективные восприимчивости $\chi = \frac{\mu}{VH_0}$, где μ — магнитный момент, V — объём образца и H_0 — внешнее поле; в случае цилиндра μ и V отнесены к единице длины, т. е. $V = \pi r^2$).

б) Поверхностная энергия и некоторые другие вопросы

Вопрос о поверхностной энергии σ_{ns} на границе между сверхпроводящей и нормальной фазами принадлежит к числу наиболее важных. Согласно²⁶ (см. I, § 4) переход между двумя фазами происходит не резко, а в некотором слое с толщиной порядка $\frac{\delta_0}{\chi} \sim 5 \div 10 \cdot \delta_0$, в котором функция Ψ_0 плавно меняется от 0 (нормальная фаза) до 1 (сверхпроводящая фаза). При достаточно малом значении χ поверхностная энергия положительна и равна

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ns} &= \Delta \frac{H_{KM}^2}{8\pi}, & \Delta &= \frac{\sqrt{2} \cdot 4 \delta_0}{3\chi} = \frac{1,89 \delta_0}{\chi}, \\ & & \chi &\lesssim 1. \end{aligned} \right\} \quad (D16)$$

При больших значениях χ $\sigma_{ns} < 0$, что не может иметь места в «идеальных» сверхпроводниках. В I остался, однако, неосвещённым вопрос о значении χ , для которого $\sigma_{ns} = 0$ и о возможности пользоваться формулой (D16) при значении $\chi = 0,165$, отвечающем по некоторым данным ртути. В результате численного интегрирования было выяснено, что при $\chi = 0,165$, $\Delta = 5,2 \delta_0$, в то время как согласно (D16) в этом случае $\Delta = 11,4 \delta_0$. Подобное несогласие не может вызвать удивления, так как в рас-

*) Заметим, что теоретические соображения, приведённые в⁵⁸, в известной мере аналогичны использованным в²⁶ (степень порядка ω в⁵⁸ аналогична Ψ^2), но в ряде отношений грубее и в целом представляются нам ненадёжными и необоснованными.

смаатриваемом примере $\sqrt{\kappa} = 0,407$ и условие $\sqrt{\kappa} \ll 1$ не выполнено. При $\kappa = 0,6$, $\Delta = 0,29 \delta_0$ и при $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$, $\Delta = 0$. Разумеется, доказать численным методом, что $\Delta = 0$, точно при $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$, весьма трудно и это сделано с точностью только до третьего знака. Тем не менее, по нашему мнению, нельзя сомневаться в том, что $\Delta = 0$ именно при $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. как раз при том значении κ , при котором возникает своеобразная неустойчивость нормальной фазы (см.²⁶ § 2). Эта неустойчивость связана, повидимому, как раз с тем, что при $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma_{ns} < 0$. По мысли Л. Д. Ландау,

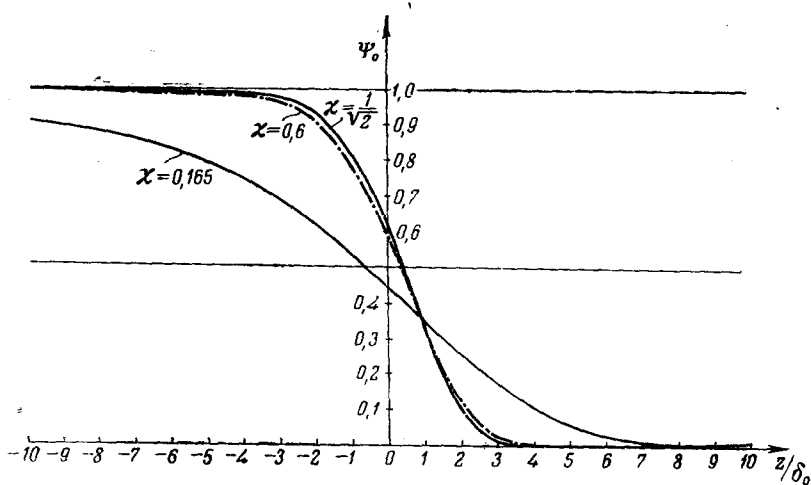


Рис. 9а.

развиваемой А. А. Абрикосовым, значения $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$ реализуются в сверхпроводящих сплавах, поведение которых, как известно (см., например,² гл. V), существенно отличается от поведения «идеальных» сверхпроводников.

Зависимость функции Ψ_0 и магнитного поля H в переходной области между нормальной и сверхпроводящей фазами ясна из рис. 9а и 9б (на рис. 9б кривая для случая $\kappa = 0,6$ не показана, так как она в принятом масштабе почти совпадает с соответствующей кривой для $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$).

На границе сверхпроводника с вакуумом имеется некоторая поверхностная энергия, которая может несколько отличаться в за-

зависимости от того, находится ли металл в сверхпроводящем или в нормальном состоянии. Соответствующая разность поверхностных энергий $\sigma'_n - \sigma'_s$ входит в выражение для критического магнитного поля, при котором разрушается сверхпроводимость. До последнего времени существовала тенденция (см., например,²⁾ использовать это обстоятельство, т. е. отличие величины $\sigma'_n - \sigma'_s$ от нуля, для объяснения зависимости критического поля от толщины сверхпроводящей плёнки. Однако, как было указано в²⁶ (см. I, § 2), можно ожидать, что $\sigma'_n - \sigma'_s = \beta \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi} \sim 10^{-8} \div 10^{-7} \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi}$, но не $\sigma'_n - \sigma'_s \sim \sigma_0 \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi} \sim 10^{-5} \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi}$, как нужно для того, чтобы влияние разности поверхностных энергий было существенно с точки зре-

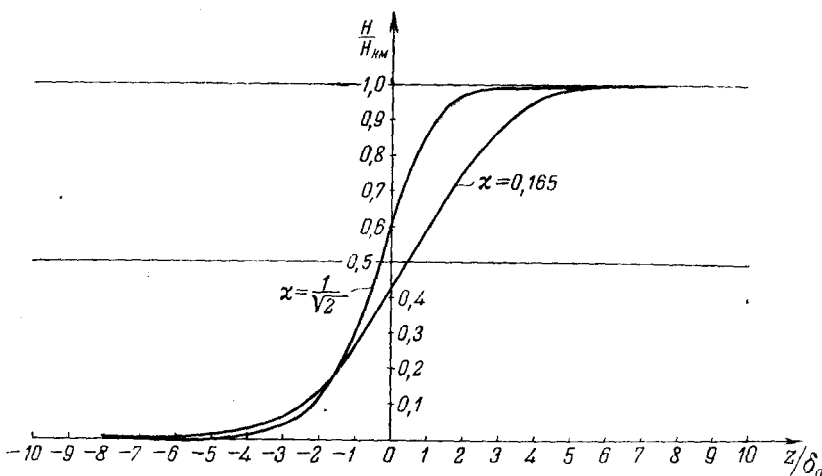


Рис. 96.

ния какого-то влияния на величину критического поля. По этой причине в²⁶ и $|\sigma'_n - \sigma'_s|$ пренебрегается. В этой связи важно отметить, что, как недавно было указано^{59, 20}, малость разности $\sigma'_n - \sigma'_s$, повидимому, непосредственно следует из экспериментальных данных.

Рассмотрим сверхпроводящую плёнку, находящуюся в параллельном ей магнитном поле H_0 , и допустим, что это внешнее поле H_0 меняется от значения $H_0 = 0$ до $H_0 = H_{\text{к}}$, в результате чего плёнка изотермически переходит в нормальное состояние. В подобных условиях как в начале процесса ($H_0 = 0$), так и в конце его (металл в нормальном состоянии) магнитный момент плёнки μ равен нулю. Разность свободных энергий в конце

и начале указанного процесса без учёта энергии поля равна

$$\Phi_n - \Phi_s = \int_{\bar{M}=0, H_0=0}^{\bar{M}=0, H_0=H_K} H_0 dM = - \int_0^{H_K} \bar{M} dH_0, \quad (Д17)$$

где $\bar{M}$ — среднее намагничение плёнки (т. е. её магнитный момент, отнесённый к единице объёма), $\Phi_n = F_{n_0} + \frac{\sigma'_n}{d}$, $\Phi_s =$

$= F_{s_0} + \frac{\sigma'_s}{d}$, F_{n_0} и F_{s_0} — объёмные свободные энергии нормальной и сверхпроводящей фаз, а $\frac{\sigma'_n}{d}$ и $\frac{\sigma'_s}{d}$ — поверхностные энергии тех же фаз, отнесённые к единице объёма плёнки *).

Далее, $F_{n_0} - F_{s_0} = \frac{H_{KM}^2}{8\pi}$ и

$$- \frac{\int_0^{H_K} \bar{M} dH_0}{\frac{H_{KM}^2}{8\pi}} = 1 + \frac{\beta}{d}, \quad \beta = \frac{\sigma'_n - \sigma'_s}{\frac{H_{KM}^2}{8\pi}}. \quad (Д18)$$

*) Если не опираться на феноменологическую теорию магнетиков, формулу (Д17) можно получить аналогично тому, как это сделано в § 17. На этом пути легко показать, что поток энергии, втекающий в плёнку при изменении поля H_0 от нуля до H_K и последующем переходе плёнки в нормальное состояние равен

$$A_{12} = \frac{c}{4\pi} \int [EH_0]_n dz dt = - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \int_0^{t_K} H_0 \frac{\partial H(z)}{\partial t} dz dt \quad (\text{см. } § 17).$$

Далее $F_{s_0} + \frac{\sigma'_s}{d} = \left(F_{n_0} + \frac{\sigma'_n}{d} + \frac{H_K^2}{8\pi} \right) = A_{12}$ и так как $\frac{H_K^2}{8\pi} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \int_0^{t_K} H_0 \frac{\partial H_0}{\partial t} dz dt$ (в начале процесса при $t=0, H_0=0$ и в конце процесса при $t=t_K, H_0=H_K$) получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_n - \Phi_s &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \int_0^{t_K} H_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{H(z) - H_0}{4\pi} \right] dz dt = \\ &= - \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \int_0^{H_K} \left[\frac{H - H_0}{4\pi} \right] dz dH_0 = - \int_0^{H_K} \bar{M} dH_0 \end{aligned}$$

(см. (Д11)); учтено, что в начале и в конце процесса $\bar{M}=0$, так как в начале $H_0=H=0$, а в конце $H_0=H=H_K$).

Величина $-\int_0^{H_K} \bar{M} dH_0$ (площадь кривой намагничивания) непосредственно измеряется на опыте и таким образом из (Д 18) можно сразу же найти значение параметра β . Обработка соответствующих данных для плёнок свинца, индия и олова привела к заключению³⁰, что значение $\beta = \frac{\sigma_n - \sigma_s}{H_{KM}^2}$ существенно меньше δ_0 . При

этом точно определить β нельзя из-за наличия гистерезиса (в (Д 17) и (Д 18) предполагается, разумеется, что процесс протекает обратимо). Для более точного и надёжного определения β в дальнейшем нужно работать с плёнками с полутолщиной $d < d_K$, где гистерезис невозможен, по крайней мере, если отвлечься от непараллельности плёнки и поля и краевых эффектов. Заметим также, что определение β из опытов с шариками, а не плёнками также возможно, но использование³⁹ простой формулы (Д 17) не представляется достаточно обоснованным. Дело в том, что для образцов с отличным от нуля размагничивающим фактором работа, затрачиваемая полем, не выражается просто в виде $\int H_0 d\bar{M}$ (по образцу)

(см., например,³⁷) и переход к формуле (Д 17) для макроскопического образца с вкрапленными в него сверхпроводящими шариками без дальнейшего не оправдан. Мы не будем разбирать этот вопрос подробнее, так как случай плёнок, освещённый выше, представляется более интересным*).

Перейдём теперь к важному вопросу о зависимости глубины проникновения магнитного поля в массивный сверхпроводник от напряжённости магнитного поля. Согласно²⁶ и I, § 4

$$\delta(H_0) = \delta_0 \left(1 + \frac{\gamma}{4\sqrt{2}} \left(\frac{H_0}{H_{KM}} \right)^2 \right) = \delta_0 \left(1 + \gamma \left(\frac{H_0}{H_{KM}} \right)^2 \right), \quad (\text{Д 19})$$

где $\delta(H_0)$ — глубина проникновения в поле H_0 (H_0 — поле на поверхности плоской границы сверхпроводника), δ_0 — глубина проникновения в поле $H_0 = 0$. Формула (Д 19), как и вся теория²⁶, количественно должна быть пригодна лишь вблизи T_K , где

$$H_{KM} = \left(\frac{dH_{KM}}{dT} \right)_{TK} (T - T_K), \quad \delta_0 = \frac{\text{const}}{\sqrt{T_K - T}}. \quad (\text{Д 20})$$

*) Формула (Д 17) без дальнейшего применима также в случае цилиндрических образцов с осью, параллельной полю. При этом для круглого цилиндра с радиусом r в (Д 18) нужно β/d заменить на $\frac{2\beta}{r}$, так как отнесённая к единице объёма цилиндра поверхностная энергия равна $\frac{2\pi r\sigma}{\pi r^2} = \frac{2\sigma}{r}$.

На опыте может также непосредственно измеряться не величина, а производная $\frac{\partial \delta}{\partial T}$, равная

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta(H_0)}{\partial T} &= \frac{\partial \delta_0}{\partial T} \left\{ 1 + \frac{z}{4\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{H_{\text{км}}} \frac{dH_{\text{км}}}{dT} \frac{\delta_0}{\partial T} \right) \left(\frac{H_0}{H_{\text{км}}} \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{\partial \delta_0}{\partial T} \left(1 + \frac{5z}{4\sqrt{2}} \left(\frac{H_0}{H_{\text{км}}} \right)^2 \right) = \frac{\partial \delta_0}{\partial T} \left\{ 1 + 5\gamma \left(\frac{H_0}{H_{\text{км}}} \right) \right\}, \quad (\text{Д21}) \end{aligned}$$

где переход к последнему выражению сделан при учёте (Д20). В формулах (Д19) и (Д21) величина δ по определению равна

$$\delta = \frac{\int_0^\infty H(z) dz}{H_0}, \quad \text{где } z \text{ — расстояние от поверхности металла.}$$

На опыте при использовании слабого переменного магнитного поля H_{10} и одновременно сильного поля H_0 измеряется не ука-

занная величина δ , а величина $\delta_1 = \frac{\int_0^\infty H_1(z, H_0) dz}{H_{10}}$, т. е. глубина проникновения слабого поля при наличии сильного ($H_1(z, H_0)$ — напряжённость слабого поля в сверхпроводнике, $H_{10} = H_1(0, H_0)$ — напряжённость слабого поля на поверхности металла). Опираясь на формулу (32) из²⁶, легко показать, что

$$\delta_1(H_0) = \delta_0 \left(1 + \frac{3z}{4\sqrt{2}} \left(\frac{H_0}{H_{\text{км}}} \right)^2 \right) = \delta_0 \left(1 + 3\gamma \left(\frac{H_0}{H_{\text{км}}} \right)^2 \right). \quad (\text{Д22})$$

В новых экспериментальных работах^{60, 61} зависимость глубины проникновения от силы поля, повидимому, может считаться установленной. Однако количественная сторона дела ещё не ясна.

В⁶¹ измерялась величина $\frac{\partial \delta(H_0)}{\partial T}$ для Sn и получилось, что коэффициент γ в формуле типа (Д21) равен примерно $\gamma_{\text{эксп}} \simeq 0,06$, причём это значение в интервале $2,5^\circ < T < T_K$ не зависит от температуры. В то же время, если воспользоваться значением $\delta_0 = \frac{4,6 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{T_K - T}}$, полученным в той же работе, то, используя формулу (I; 3,14), (I; 3,14a):

$$z = \sqrt{2} \frac{e}{\hbar c} \delta_0^2 H_{\text{км}} = 2,16 \cdot 10^7 \delta_0^2 H_{\text{км}}, \quad (\text{Д23})$$

получаем $z = 0,07$ и согласно (Д21) теоретическое значение

$\gamma = \frac{\chi}{4\sqrt{2}} = 0,012$, т. е. в 5 раз меньше экспериментального значения $\gamma_{\text{эксп}} \simeq 0,06$. С другой стороны, в⁶⁰ также на *Sn* измерялась величина $\delta_1(H_0)$ и оказалось, что $\gamma_{\text{эксп}}$ зависит от температуры и не превосходит значения 0,008, т. е. даже несколько меньше теоретического значения. Данные⁶¹ получены в хороших условиях, но обнаруженная зависимость $\frac{\partial \delta}{\partial T}$ от H_0 лежит на пределе точности измерений; кроме того, по некоторым причинам в⁶¹ могли быть получены завышенные значения. Точность метода⁶⁰ более высока, но в этом случае поле на поверхности образца неоднородно и, главное, поле H_{01} было таким высокочастотным ($\lambda \simeq 3$ см), что сравнение результатов эксперимента с теорией²⁶, относящейся к статистическим или медленно переменным полям, может оказаться незаконным даже несмотря на то, что сильное поле H_0 было в этом случае постоянным.

Вопрос о зависимости глубины проникновения магнитного поля в массивный металл от силы поля нуждается, очевидно, в дальнейшем исследовании. Работа в этом направлении особенно важна потому, что из соответствующих данных можно определить величину χ и сравнить её с теоретическим значением (Д23). При этом не нужно забывать, что в (Д23) переход к численному коэффициенту совершён в предположении, что фигурирующий в теории заряд равен заряду свободного электрона. Это предположение в рамках теории²⁶ представляется естественным и против него не видно никаких возражений. Тем не менее подобное предположение не кажется нам совершенно обязательным. Если бы формула (Д23) с $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ оказалась несогласующейся с данными о глубине проникновения в сильном поле (как сказано, для такого утверждения оснований ещё нет), то из измерений δ , δ_1 или $\frac{\partial \delta}{\partial T}$ нужно определить входящий в теорию параметр χ , а проверка теории состояла бы в измерении поверхностной энергии σ_{ns} , которая определяется тем же параметром χ .

Следует также помнить, что развитая в²⁶ теория непосредственно относится только к изотропным материалам (поликристаллы) или металлам кубической симметрии. В случае металлов с более низкой симметрией, к числу которых относится сильно тетрагональное белое олово, теория нуждается в обобщении⁶². Это обобщение довольно очевидно и сводится к тому, что в системе главных осей выражение для свободной энергии (I; 3,5) принимает вид:

$$F_{sH} = F_{s_0} + \frac{H^2}{8\pi} + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2m_k} \left| -i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - \frac{e}{c} A_k \Psi \right|^2, \quad (\text{Д24})$$

где индексы $k = 1, 2, 3$ отвечают осям x, y, z , в качестве кото-

рых, как сказано, выбраны главные оси (таким образом m_k — собственные значения тензора масс m_{kl}). Если $m_1 = m_2 = m_3$, то материал изотропен и (Д24) переходит в (I; 3,5). Выражение (I; 3,8) для плотности тока имеет теперь вид

$$j_k = -\frac{ie\hbar}{2m_k} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_k} \right) - \frac{e^2}{m_k c} \Psi^* \Psi A_k.$$

Не останавливаясь на анизотропном случае подробнее, обратимся сразу к одномерной задаче о проникновении магнитного поля в массивный сверхпроводник, занимающий полупространство $z > 0$; ток j и потенциал A считаем так же, как в I, направленными по оси x , в силу чего $H = H_y = \frac{dA_x}{dz}$.

Предполагая, что выбранные оси x, y, z являются главными осями, можно свести анизотропную задачу к рассмотренной ранее изотропной, если ввести переменные (см. (I; 3,12)):

$$z' = \frac{z}{\delta_{0x}}, \quad \Psi'^2 = \frac{\Psi^2}{\Psi_\infty^2}, \quad A' = \frac{A}{\sqrt{2} H_{\text{км}} \delta_{0z}} = \sqrt{\frac{e^2}{2 m_z c^2 |\alpha|}} A,$$

$$H' = \frac{dA'}{dz'} = \frac{\delta_{0x} H}{\sqrt{2} \delta_{0z} H_{\text{км}}}, \quad \delta_{0x}^2 = \frac{m_x c^2}{4 \pi e^2 \Psi_\infty^2},$$

$$\delta_{0z}^2 = \frac{m_z c^2}{4 \pi e^2 \Psi_\infty^2}, \quad \chi_{xz}^2 = \frac{2 e^2}{\hbar^2 c^2} \delta_{0x}^2 \delta_{0z}^2 H_{\text{км}}^2.$$

В этих переменных уравнения (I; 3,13) сохраняются с заменой χ^2 на χ_{xz}^2 .

Последующее решение задачи о глубине проникновения поля в сверхпроводник приводит к формулам (Д19)—(Д22), но с заменой δ_0 и χ на

$$\delta_{0x} = \sqrt{\frac{m_x c^2}{4 \pi e^2 \Psi_\infty^2}}, \quad \chi_{xz} = \frac{\sqrt{2} e}{\hbar c} \delta_{0x}^2 \delta_{0z}^2 H_{\text{км}}. \quad (\text{Д25})$$

Таким образом, в общем случае для проверки теории нужно знать обе величины δ_{0x} и δ_{0z} . В случае олова, если ось y есть тетрагональная ось, то $\delta_{0x} = \delta_{0z}$ и для вычисления χ достаточно проводить измерения при одной ориентации.

При работе на высокой частоте нужно помнить, что несвязанная со сверхпроводящим током диэлектрическая постоянная ϵ_0 (см. I, §§ 5, 6) при учёте анизотропии является уже не скаляром, а симметричным тензором второго ранга с главными значениями $\epsilon_{0k}(\omega, T)$. Для олова, разумеется, $\epsilon_{0x} = \epsilon_{0z}$ (тетрагональная ось есть ось y). Высокочастотные измерения в первую очередь должны

ставиться с целью нахождения функций $\varepsilon_{0k}(\omega, T)^*$. Исследование же зависимости глубины проникновения δ от напряжённости магнитного поля и его ориентации относительно осей кристалла нужно проводить раньше всего в статических или квазистатических полях (практически, квазистатическими можно, повидимому, считать измерения и на частотах $\omega \sim 10^7 \div 10^8$).

В связи с обсуждаемым материалом отметим, что согласно теории сверхпроводимости^{10, 11} зависимость глубины проникновения от силы поля должна быть очень ярко выражена — значительно сильнее, чем согласно²⁶, что заведомо противоречит ответу²⁰.

Следующий вопрос, на котором мы остановимся, связан с поведением сверхпроводника в высокочастотном поле.

В дополнение к I, § 6 укажем, что при обработке экспериментальных данных, относящихся к массивному сверхпроводящему металлу, проще всего пользоваться интерполяционными формулами, получающимися при введении эффективной комплексной диэлектрической постоянной⁶³:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_{эфф} &= \varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \frac{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \delta_{ск}}{l}, \quad \delta_{ск} = - \frac{ic}{\omega \sqrt{\varepsilon'_{эфф}}}, \\ Z &= \frac{4\pi}{c \sqrt{\varepsilon'_{эфф}}}, \end{aligned} \right\} \quad (D26)$$

где $Z = R + iX$ — импеданс, σ — статистическая проводимость и l — длина свободного пробега. Постоянная $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ в (D26) выбрана таким образом, чтобы для нормального металла получалась формула (I; 6,21), выведенная из кинетического уравнения в предположении о диффузном отражении электронов от поверхности металла. В силу (D26) для $y = \sqrt{\varepsilon'_{эфф}}$ получается уравнение

$$y^3 - \varepsilon y + \frac{8\pi^2 c \sigma}{\sqrt{3} \omega^2 l} = 0, \quad \text{из которого легко видеть, что}$$

$$\frac{\sigma}{l} = \frac{16\pi\omega^2}{c^4} \frac{\sqrt{3} R}{(R^2 + X^2)^2}, \quad \varepsilon = - \frac{16\pi^2 (X^2 - 3R^2)}{c^2 (R^2 + X^2)^2}. \quad (D27)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ эти формулы приводят к соотношению $X = \sqrt{3} R$ и к выражению для $\frac{\sigma}{l}$, принимаемому в теории аномального скин-эффекта в нормальном металле (см. (I; 6,27), где в силу опечатки стоит R_n вместо R_n^3); при $\sigma \rightarrow 0$ $R \rightarrow 0$ и из (D27) получается совершенно

*) Значение $\varepsilon_{0k} \sim 10^8 - 10^{10}$ так велико, что уже в сравнительно слабом электрическом поле E линейность задачи (т. е. независимость ε_0 от E) может быть нарушена. Этот момент при соответствующих экспериментальных исследованиях нужно всегда иметь в виду.

точная формула

$$\varepsilon = - \frac{16 \pi^2}{c^2 X^2} \quad (\text{см. (1; 6,33)}).$$

В промежуточной области температур между $T_0 = 0$ и T_K формулы (Д27) носят интерполяционный характер, но, вероятно, довольно надёжны. Во всяком случае без детального знания характера возбуждений в сверхпроводнике любые другие формулы такого типа вряд ли могут претендовать на большую точность. На опыте измеряется лишь изменение величины X (т. е. реактанса) при понижении температуры ниже T_K . Поэтому для нахождения самого значения X приходится базироваться на теоретическом соотношении $X_n = \sqrt{3} R_n$, которое, правда, представляется довольно надёжным. Однако ещё более надёжными в ряде отношений являются опыты с плёнками⁴⁶, для которых можно просто положить $X_n = 0$ (индекс n относится к нормальному состоянию). Действительно, в плёнке с толщиной $d \ll l$ и $d \ll \delta_{\text{СК}}$ (l — длина свободного пробега, $\delta_{\text{СК}}$ — глубина скин-слоя) по существу имеет место нормальный скин-эффект, т. е. $\varepsilon'_{\text{эфф}} = \varepsilon - i \frac{4 \pi \sigma}{\omega}$, где σ — проводимость плёнки (очевидно, $\sigma \sim \frac{\sigma(0)d}{l}$, где $\sigma(0)$ — проводимость массивного металла). При соблюдающихся для тонких плёнок условиях

$$\left| \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} d \right|^2 \ll 1, \quad |\sqrt{\varepsilon'}| \gg 1, \quad \left| \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} d \right| \gg \frac{1}{|\sqrt{\varepsilon'}|}, \quad (\text{Д28})$$

импеданс плёнки равен⁶³

$$\left. \begin{aligned} Z = R + iX &= \frac{4 \pi}{c \sqrt{\varepsilon'} \left(i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} d \right)} = \frac{4 \pi}{i \omega \varepsilon' d}, \\ \sigma &= \frac{R}{d(R^2 + X^2)}, \quad \varepsilon = - \frac{4 \pi X}{\omega d (R^2 + X^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д29})$$

В нормальном состоянии $|\varepsilon| \ll \frac{4 \pi \sigma}{\omega}$ и таким образом $X \ll R$, в силу чего и можно положить $X = 0$. В результате измерений X и R для сверхпроводящих плёнок Sn в⁴⁶ найдена величина $\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{c^2}{\omega^2 \delta_0^2}$; используя затем данные о статической глубине

проникновения δ_0 , полученные для вполне аналогичных плёнок⁴⁸, оказалось возможным определить и величину $\varepsilon_0(T)$, которая монотонно возрастает с понижением температуры (условно можно положить $\varepsilon_0 = 0$ при $T = T_K$) и при $T = 2^\circ$ достигает значения $\varepsilon_0 = 5 \cdot 10^9$ ($\pm 30\%$). Дальнейшее возрастание ε_0 при $T \rightarrow 0$ должно быть уже невелико, так как производная $\left| \frac{d\varepsilon_0}{dT} \right|$ с падением температуры

уменьшается. Измерения производились на частоте $\omega \cong 6 \cdot 10^{10}$, причём оказалось, что $\varepsilon_0 \sim \frac{c^2}{\omega^2 \delta_0^2}$, но ещё $\varepsilon < 0$. С увеличением

частоты, если не учитывать зависимость ε_0 от ω , величина ε должна стать положительной, т. е. сверхпроводник станет прозрачным. Вопрос о том, будет ли в каком-либо интервале частот наблюдаться этот эффект или он всегда маскируется поглощением, остаётся ещё совершенно неясным. Изучение зависимости ε_0 от частоты ω , как уже указывалось в § 4 б) и § 5, является одной из самых интересных и важных задач, которые необходимо решить для дальнейшего продвижения вперёд в области понимания сверхпроводимости.

В заключение кратко остановимся ещё на двух вопросах: аномальной теплопроводности некоторых сверхпроводящих сплавов и вопросе о «предварении» сверхпроводимости, т. е. наличии каких-то особенностей в поведении сверхпроводящего металла при $T > T_k$.

В некоторых сверхпроводящих сплавах, в отличие от чистых сверхпроводников, теплопроводность в сверхпроводящем состоянии оказывается выше, чем в нормальном (см. I, § 5). На первый взгляд казалось, что этот факт свидетельствует в пользу существования в сверхпроводниках конвекционного механизма теплопередачи (см. ², § 16 и I, § 5). Однако, как было показано в ⁶³ и (I, § 5), конвекционная теплопередача в сверхпроводниках, вообще говоря, очень мала и недостаточна для объяснения наблюдаемого эффекта возрастания теплопроводности, который оставался таким образом совершенно необъяснённым. Весьма вероятная причина, могущая объяснить обсуждаемый эффект, указана в ⁶⁴. Как оказывается, в металлах с содержанием примесей, большим 0,1%, теплопроводность решётки сравнима с электронной теплопроводностью. Далее, в некоторых случаях теплопроводность решётки определяется рассеянием фононов (бегущих в решётке воли) на электронах проводимости. При переходе в сверхпроводящее состояние и понижении температуры число электронов проводимости уменьшается (см. I, § 6), т. е. число рассеивающих частиц понижается, а теплопроводность возрастает. Для проверки этой гипотезы следует, в частности, обратить внимание на закон Видемана-Франца, который относится только к электронной части теплопроводности и может помочь выделению этой последней (см. ⁶⁵).

Переходя к вопросу о «предварении» сверхпроводимости, напомним, что при этом речь идёт о том, имеются ли в нормальном состоянии вблизи T_k (т. е. при $T - T_k \ll T_k$) какие-либо явления, предвещающие происходящий при понижении температуры сверхпроводящий переход. До сих пор было лишь одно положительное указание в этом направлении, а именно, утверждалось ⁶⁶, что при температуре на $0,1 \div 0,2^\circ$ выше T_k начинает довольно сильно изменяться дифференциальная термоэлектродвижущая сила металла. Однако в другой работе ⁶⁶ указания на такой эффект отсутствуют.

Вместе с тем нам хотелось бы обратить внимание на то, что имеются определённые основания ожидать наличия каких-то явлений, предваряющих сверхпроводящий переход⁶⁷. Дело в том, что при отсутствии магнитного поля этот переход является переходом 2-го рода, а для таких переходов вблизи точки перехода (т. е. вблизи T_k) должны быть относительно велики флуктуации характеризующего данный переход параметра. В случае сверхпроводимости этот «параметр упорядочения» есть концентрация сверхпроводящих электронов $n_s = \Psi_\infty^2$. При $T > T_k$ в равновесном состоянии $n_s = 0$ и перегрев сверхпроводящей фазы невозможен (это характерно для переходов 2-го рода, при которых выше точки перехода не могут существовать не только устойчивые, но даже метастабильные зародыши фазы, устойчивой ниже точки перехода). Однако, как сказано, быстропеременные флуктуации n_s при $T > T_k$ не только возможны, но при $T \rightarrow T_k$ должны даже быть велики. Таким образом, в нормальной фазе вблизи T_k всё время образуются флуктуационные «зародыши» сверхпроводящей фазы. Эти «зародыши» могут сказаться на значении комплексной диэлектрической постоянной в нормальном состоянии, повлиять на термоэлектрические свойства металла и т. д. Вопрос о том, какого эффекта здесь можно ожидать и может ли он быть замечен, остаётся пока совершенно открытым.

В свете сказанного представляется, однако, несомненным, что проблема «предварения» сверхпроводимости представляет интерес и должна явиться объектом исследования.

Помимо работ, освещённых в настоящей статье, за последнее время появился целый ряд других, в содержании которых мы не останавливались. С целью облегчить ознакомление с новой литературой в списке литературы помимо работ, цитированных в тексте, указаны все известные автору работы по сверхпроводимости, как теоретические⁶⁹⁻⁸⁷, так и экспериментальные⁸⁸⁻¹¹⁹, кроме указанных в², I и реферативных сборниках^{68 *}.

*) Пользуемся возможностью указать здесь на важнейшие из замеченных в I опечаток. На стр. 173 во фразе, разделённой рис. 2, запятая должна стоять после слова «ферромагнетиком», а не после скобок (при $T > T_k$). В примечании к стр. 192 у членов $\frac{H_{\text{км}}^2}{4\pi}$ нужно поставить знак минус. В самом конце стр. 217 должно стоять $\chi \approx 0,15$, а не $\chi^2 \approx 0,015$. В формуле (5,7) стр. 337 должно стоять $\left\{ \frac{4\pi}{c} \left(\sigma + \frac{1}{i\omega\Lambda} \right) + \frac{i\omega}{c} \varepsilon_0 \right\}$. Внизу стр. 340 должно быть $R = \text{Re } Z \propto \sigma^{-1/2}$. Внизу стр. 342 нужно читать $\frac{\partial f_1}{\partial z} \sim \frac{f_1}{\delta_{\text{ск}}}$ вместо $\frac{\partial f_1}{\partial t} \sim \frac{f_1}{\delta_{\text{ск}}}$. В формуле (6,26) стр. 348 нужно поставить R^3 вместо R . В формуле (6,31) на стр. 350 в знаменателе должно стоять $3^{1/2}$, а не $3^{1/3}$. Сноска^{92а}, выпавшая из списка литературы I, есть сноска⁶³ настоящей статьи.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Статистическая физика, Гостехиздат (1951).
2. В. Л. Гинзбург, Сверхпроводимость, Изд. АН СССР (1946).
3. В. Л. Гинзбург, Замечания к теории сверхпроводимости, ЖЭТФ **14**, 134 (1946).
4. E. Mendoza and J. G. Thomas, The electrical resistance of Au, Ag and Cu at low temperatures, Phil. Mag. **42**, 291 (1951).
5. С. В. Вонсовский, Теория взаимодействия электронов в кристаллической решетке, Изв. АН СССР (серия физическая) **12**, 337 (1948).
6. а) Г. Бете и А. Зоммерфельд, Электронная теория металлов, ОНТИ (1938).
б) Ф. Зейтц, Современная теория твёрдого тела, Гостехиздат (1949).
7. а) А. Вильсон, Квантовая теория металлов, Гостехиздат (1941).
б) Р. Пайерльс, Электронная теория металлов, ИЛ (1947).
в) Л. Ландау и А. Компанеев, Электропроводность металлов, ОНТИ (Харьков) (1935).
8. E. F. Barton, H. G. Smith and J. O. Wilhelm, Phenomena at the temperatures of liquid helium, N. Y. (1940).
9. Л. Д. Ландау, К теории сверхпроводимости, Sow. Phys. **4**, 43 (1933).
10. W. Heisenberg, Zur Theorie der Supraleitung, Zeits. f. Naturforsch. **2a**, 185 (1947); Ann. d. Phys. **3**, 289 (1948).
11. Н. Корпе, Theory der Supraleitung. Erg. d. exakten Naturwissenschaften **23**, 283 (1950).
12. М. Борн и Кай-Шиан-Шенг, К теории сверхпроводимости, ДАН **62**, 313 (1948); Nature, **161**, 968, 1017 (1948); Journ. de Phys. et Rad. **9**, 249 (1948); Nature **163**, 247 (1949).
13. D. Bohm, Note on a theorem of Bloch concerning possible causes of superconductivity, Phys. Rev. **75**, 502 (1949).
14. F. London, Superfluids, v. I. Macroscopic theory of superconductivity, N. Y. (1950).
15. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Квантовая механика, Гостехиздат, (1948).
16. F. London, On the problem of the molecular theory of superconductivity, Phys. Rev. **74**, 562 (1948).
17. A. R. Miller, The phenomenological theory of superconductivity, Phys. Rev. **76**, 1001 (1949).
18. Л. Д. Ландау, Теория сверхтекучести гелия II, Journ. of Phys. **5**, 71 (1941); **11**, 91 (1947).
19. Е. М. Лифшиц, Сверхтекучесть (теория), гл. VIII в книге В. Кезома «Гелий» ИЛ (1949).
20. J. M. Lock, Penetration of magnetic fields into superconductors, III, Proc. Roy. Soc. **208**, 391 (1951).
21. А. Мешковский и А. Шальников, Поверхностные явления у сверхпроводников в промежуточном состоянии, ЖЭТФ, **17**, 851 (1947); см. также ЖЭТФ **19**, 54 (1949).
22. Б. Т. Гейликман, К вопросу об аномальном диамагнетизме, ЖЭТФ **10**, 497 (1940).
23. J. Bardeen, Relation between lattice vibration and London theory of superconductivity, Phys. Rev. **81**, 829 (1951); см. также Phys. Rev. **79**, 167 (1950); **80**, 567 (1950); **81**, 469, 1070 (1951) и **82**, 978 (1951).

24. F. London, Microscopic interpretation of superconductivity, Proc. Roy. Soc. **152**, 24 (1935); УФН **16**, 410 (1936).
25. Л. Д. Ландау, Диамагнетизм металлов, Zeits. f. Phys. **64**, 629 (1930).
26. В. Л. Гинзбург и Л. Д. Ландау. К теории сверхпроводимости, ЖЭТФ **20**, 1064 (1950).
27. J. Bardeen, Electron-vibration interaction and superconductivity, Rev. Mod. Phys. **23**, 261 (1951).
28. H. Welker, Über ein elektronen-theoretisches Modell des Supraleiters, Sitzungsberichte der Bayer. Akad. Wiss., стр. 115 (1938); Phys. Zeits. **39**, 920 (1938).
29. H. Welker, Supraleitung und magnetische Austauschwechselwirkung, Zeits. f. Phys. **114**, 525 (1939).
30. H. Welker, Zur Elektronentheorie der Supraleitung, Phys. Zeits **44**, 134 (1943).
31. J. M. Lock, A. B. Pippard a. D. Shoenberg, Superconductivity of tin isotopes, Proc. Cambr. Phil. Soc. **47**, 811 (1951).
32. C. A. Reynolds, B. Serin a. L. B. Nesbitt, Isotope effect in superconductivity, I, Mercury, Phys. Rev. **84**, 691 (1951).
33. H. Frölich, Theory of the superconducting state, I. The ground state at the absolute zero of temperature, Phys. Rev. **79**, 845 (1950).
34. G. Wentzel, Interaction of lattice vibrations with electrons in a metal, Phys. Rev. **83**, 168 (1951).
35. W. Kohn a. Vachaspati, Difficulty in Frölich's theory of superconductivity, Phys. Rev. **83**, 462 (1951).
36. S. D. Drell, On the interaction of conduction electrons with lattice vibrations, Phys. Rev. **83**, 838 (1951).
37. H. Frölich, Theory of a superconducting state, II. Magnetic properties at absolute zero of temperature, Proc. Phys. Soc. **64A**, 129 (1951).
38. M. R. Schafroth, Bemerkungen zur Frölich'schen Theorie der Supraleitung, Helv. Phys. Acta **24**, 667 (1951).
39. Л. Д. Ландау, К теории сверхтекучести, ДАН **61**, 253 (1948).
40. И. М. Халатников, Исследования по теории сверхтекучести, Диссертация, И. Ф. П. АН СССР (1952).
41. В. Л. Гинзбург, Теория сверхтекучести и критическая скорость гелия II, ДАН **69**, 161 (1949).
42. H. Frederikse, On the specific heat of absorbed helium, Physica **15**, 860 (1949).
43. Н. Н. Боголюбов, К теории сверхтекучести, Изв. АН СССР, серия физик. **11**, 77 (1947).
44. Ю. Л. Климонтович и В. П. Силин, К теории спектров возбуждений макроскопических систем, ДАН **82**, 361 (1952).
- 44 a. D. Bohm a. D. Pines, Collective description of electron interactions, Phys. Rev. **82**, 625 (1951); **85**, 338 (1952).
45. A. D. Misener, The specific heat of superconducting mercury, indium and thallium, Proc. Roy. Soc. **174**, 262 (1940).
46. М. С. Хайкин, Измерение поверхностного сопротивления сверхпроводящего олова на частоте 9400 мц. Диссертация И. Ф. П. АН СССР (1952).
47. А. А. Галкин и П. А. Безуглый, О поглощении электромагнитного поля сверхпроводниками, Доклады АН УССР № **6**, 414 (1951).
48. Н. В. Заварицкий, Исследование сверхпроводящих свойств плёнок, Диссертация И. Ф. П. АН СССР (1951).
49. Н. В. Заварицкий, Критическое магнитное поле сверхпроводящих плёнок из олова, ДАН **78**, 665 (1951).

50. F. Möglich u. R. Rompe, Plasmaschwingungen als Ursache der Superleitung, *Ann. d. Phys.* **1**, 27 (1947); см. также *Ann. d. Phys.* **3**, 322 (1948); **4**, 335 (1949); **6**, 177 (1949).
51. В. Л. Гинзбург, О нелинейности электродинамических процессов в сверхпроводниках, *Journ. of Phys.* **11**, 93 (1947).
52. W. H. Keesom a. P. H. Van Lear, Measurements of the atomic heats of tin in superconductive and in nonsuperconductive state, *Physica* **5**, 193 (1938).
53. J. C. Slater, Note on superlattices and Brillouin Zones, *Phys. Rev.* **84**, 179 (1951); см. также E. Katz, *Phys. Rev.* **85**, 495 (1952).
54. L. Tisza, Theory of superconductivity, *Phys. Rev.* **80**, 717 (1950).
55. J. M. Luttinger, Note on Tisza's theory of superconductivity, *Phys. Rev.* **80**, 727 (1950).
56. В. Л. Гинзбург, О поведении сверхпроводящих плёнок в магнитном поле, *ДАН* **83**, 385 (1952).
57. В. П. Силин, Сверхпроводящие цилиндр и шар в магнитном поле, *ЖЭТФ* **21**, 1330 (1951).
58. A. B. Pippard, Magnetic hysteresis in superconducting colloids, *Phil. Mag.* **43**, 273 (1952).
59. A. B. Pippard, The surface energies of superconductors, *Proc. Cambr. phil. Soc.* **47**, 617 (1951).
60. A. B. Pippard, Field variation of the superconducting penetration depth, *Proc. Roy. Soc.* **203**, 210 (1950).
61. Ю. В. Шарвин, Исследования глубины проникновения магнитного поля в массивный сверхпроводник. II, *ЖЭТФ*, **22**, 367 (1952).
62. В. Л. Гинзбург, Об учёте анизотропии в теории сверхпроводимости, *ЖЭТФ* **23**, 236 (1952).
63. В. Л. Гинзбург, О поведении сверхпроводников в высокочастотном поле, *ЖЭТФ* **21**, 979 (1951).
64. J. K. Hulm, The thermal conductivity of tin, mercury, indium and tantalum at liquid helium temperatures, *Proc. Roy. Soc.* **204**, 98 (1950).
65. H. Casimir a. A. Rademakers, The thermo-electric behavior of a superconductor in the neighbourhood of transition point, *Physica* **13**, 33 (1947).
66. M. S. Steel, Thermoelectromotive force of a superconductor versus the same metal in the nonsuperconducting state, *Phys. Rev.* **81**, 262 (1951).
67. В. Л. Гинзбург, Некоторые вопросы теории электрических флуктуаций, *УФН* **46**, 348 (1952).
68. Физика низких температур. Реферативные сборники по вопросам современной физики, ИЛ, серия 2, вып. 12 (1950) и серия 3, вып. 18 (1951).
69. Б. Т. Гейликман, Об устойчивом течении и колебаниях электронной жидкости, связанной с решёткой, *ЖЭТФ* **21**, 618 (1951).
70. И. М. Лифшиц, О кинетике разрушения сверхпроводимости магнитным полем. I, *ЖЭТФ* **20**, 834 (1950).
71. Е. М. Лифшиц и Ю. В. Шарвин, О промежуточном состоянии сверхпроводников, *ДАН* **79**, 783 (1951).
72. W. Band, The occurrence of superconductivity in a collective electron assembly, *Phys. Rev.* **69**, 41 (1946); см. также *Phys. Rev.* **69**, 241 (1946).
73. W. Band, The exclusion principle and the theory of superconductivity, *Phys. Rev.* **83**, 885 (1951).
74. D. Bohm a. T. Staver, Application of collective treatment of electron and ion vibrations to theories of conductivity and superconductivity, *Phys. Rev.* **84**, 836 (1951).

75. L. J. F. Broer, Note on the superconductors and diamagnetic media, *Physica* **13**, 473 (1947).
76. H. Frölich, Crystal structure and superconductivity, *Nature* **168**, 280 (1951).
77. H. Frölich, Superconductivity and effective mass of electrons *Nature* **168**, 280 (1951).
- 77 a. H. Ichimura, Statistical thermodynamics of the superconducting state, *Phys. Rev.* **84**, 375 (1951).
78. K. M. Koch, Fundamental considerations of the behaviour of a superconductor in a magnetic field, *Öst. Ingen. Arch.* **3**, 344 (1949).
79. J. de Launay a. R. L. Dolecek., Superconductivity and the Debye characteristic temperature, *Phys. Rev.* **72**, 141 (1947).
80. O. Klein, On the specific heat of the superconductive state, *Arkiv för math. o. fysik* **33 B**, № 2 (1946).
81. O. Klein, Theory of superconductivity, *Nature* **169**, 578 (1952).
82. H. Koppe, Zur phänomenologischen Theorie der Supraleitung, *Zeits. f. Naturforsch.* **6 a**, 284 (1951).
- 82 a. C. G. Kuper, An unbranched laminar model of the intermediate state of superconductors, *Phil. Mag.* **42**, 961 (1951).
83. Kun Huang, On Heisenberg's theory of superconductivity *Nat. Peking Univ. Semi-Cent. vol. Math-Phys. ser* (1948), стр. 89; *Phys. Abstr. A* (1950), стр. 827.
84. Kun Huang, A note on Frölich theory of superconductivity, *Proc. Phys. Soc.* **64 A** 867 (1951).
85. B. Makiej, On the existence of an electric field in superconductors, *Acta Phys. Polonica* **9**, 141 (1947—1948).
- 85 a. L. Tisza, On the nature of superconducting state, *Phys. Rev.* **84**, 163 (1951).
86. R. Schachenmeier, Weiteres zur Quantentheorie der Supraleitung, *Zeits. f. Phys.* **130**, 243 (1951).
87. F. J. Wisniewski, Sur la theorie de la supraconductibilite, *Comptes Rendus* **226**, 1964 (1948).
88. Н. Е. Алексеевский, Сверхпроводимость Bi_2K , *ЖЭТФ* **20**, 863 (1950).
89. Н. Е. Алексеевский, Н. Б. Брандт и Т. И. Костина, К вопросу о сверхпроводимости бинарных сплавов висмута, *ЖЭТФ* **21**, 951 (1951).
90. Н. Е. Алексеевский и Н. Б. Брандт, К вопросу о смещении критической температуры сверхпроводников с давлением, *ЖЭТФ* **22**, 200 (1952).
91. А. А. Галкин, Я. С. Кан и Б. Г. Лазарев, О некоторых особенностях перехода в сверхпроводящее состояние. I, *ЖЭТФ* **20**, 865 (1950).
92. А. А. Галкин, Б. Г. Лазарев и П. А. Безуглый, О некоторых особенностях перехода в сверхпроводящее состояние. II, *ЖЭТФ* **20**, 987 (1950).
93. А. А. Галкин и П. А. Безуглый, О разрушении сверхпроводимости переменным током, *ЖЭТФ* **20**, 1145 (1950).
94. Н. В. Заварицкий, Свойства тонких слоёв из сверхпроводящих металлов, *ДАН* **82**, 229 (1952).
95. Б. Н. Самойлов, К вопросу о сверхпроводимости кадмия, *ДАН* **81**, 791 (1951).
96. М. С. Хайкин, Измерение поверхностного сопротивления сверхпроводящего олова на частоте 9380 Мгц, *ДАН* **75**, 661 (1950).

97. В. И. Хоткевич и В. Р. Голик, Влияние пластической деформации на сверхпроводимость металлов, ЖЭТФ **20**, 427 (1950).
98. А. И. Шальников и К. А. Туманов, К вопросу о структуре промежуточного состояния, Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе (1950), стр. 303.
99. P. B. Aiers, J. W. McWhirter a. S. F. Squire, Eddy currents and supercurrents, in rotating metal spheres at liquid helium temperatures, Phys. Rev. **84**, 104 (1951).
100. J. Babiskin, Magnetic properties of hollow superconducting sphere, Phys. Rev. **85**, 104 (1952).
101. W. Buckel u. R. Hilsch., Supraleitung und Widerstand von Zinn mit Gitterstörungen, Zeits. f. Phys. **131**, 420 (1952).
102. E. Callen, W. F. Zove a. F. C. Nix, Meissner effect in alloys of In—Tl and Sn—Bi, Phys. Rev. **85**, 715 (1952).
103. J. R. Clement a. E. H. Quinnett, The atomic heat of lead in the region of its transition to superconductivity, Phys. Rev. **85**, 502 (1952).
104. M. P. Garfunkel a. B. Serin, Formation of a boundary between normal-conducting and superconducting metal, Phys. Rev. **85**, 834 (1952).
105. B. B. Goodman a. E. Mendoza, The critical magnetic fields of Al, Cd, Ga and Zn, Phil Mag. **42**, 594 (1951).
106. R. P. Hudson, Magnetic threshold field curve of a superconductor, Phys. Rev. **85**, 382 (1952).
107. E. Justi, Zeitfähigkeit und Leitungsmechanismus fester Stoffe, Göttingen (1948).
108. A. L. Lathrop, Studies of superconductivity with a torsion pendulum, Phys. Rev. **85**, 743 (1952).
109. W. F. Love, Some observations the superconductive transition in pure metals, Phys. Rev. **85**, 715 (1952).
110. W. Meissner, F. Shmeissner u. H. Meissner, Messungen im Übergangsgebiet zur Supraleitung, I u. II, Zeits. f. Phys. **130**, 521, 529 (1951).
111. K. Mendelssohn, Low temperature physics. Rep. Prog. in Physics, **12**, 270 (1949).
112. K. Mendelssohn, Adiabatic Magnetisation of superconductors, Nature **169**, 366 (1952).
113. M. Olsen, Superconductivity of lead isotopes, Nature **168**, 245 (1951).
114. A. B. Pippard a. G. T. Pullan, A superconducting galvanometer, Proc. Cambr. Phil. Soc. **48**, 188 (1952).
115. B. Serin, C. A. Reynolds, J. R. Feldmeier a. M. P. Garfunkel, Experiments with audiofrequencies on superconductors, Phys. Rev. **84**, 802 (1951).
116. B. Serin a. C. A. Reynolds, Experiment with audiofrequencies on superconductors, Phys. Rev. **85**, 938 (1952).
117. R. T. Weber, Time effects in superconducting cylinders, Phys. Rev. **76**, 167 (1949).
118. R. T. Weber a. D. A. Spohr, Thermal conductivity of superconducting lead in the intermediate state, Phys. Rev. **84**, 384 (1951).
119. A. Wexler a. W. S. Corak, Superconductivity of Vanadium, Phys. Rev. **85**, 85 (1952).
120. Л. А. Игнатьева и С. Г. Калашников, Сопротивление металлов при большой плотности тока в импульсном режиме, ЖЭТФ **22**, 385 (1952).
121. E. N. Adams, Bardeen's theory of superconductivity and the f-sum rule, Phys. Rev. **86**, 258 (1952).

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

1. A. Brown, M. W. Zemansky a. H. A. Boorse, Behavior of heat capacity of superconducting niobium below 4,5° K, Phys. Rev. **86**, 134, 627 (1952).
 2. C. J. Crebenkemper a. J. P. Hagen, The high frequency resistance of metals in the normal and superconducting state, Phys. Rev. **86**, 673 (1952).
 3. D. P. Detwiler a. H. A. Fairbank, Thermal conductivity in the intermediate state of pure superconductors, Phys. Rev. **86**, 574 (1952).
 4. M. Dresden, Lattice oscillations and superconductivity, Phys. Rev. **86**, 627 (1952).
 5. M. Horowitz, A. A. Silvidi, S. F. Malaker a. J. G. Daunt, The specific heat of lead in the temperature range 1,0° K to 75° K, Phys. Rev. **86**, 818 (1952).
 6. W. F. Love, Magnetic properties of superconducting tin-bismuth alloys, Phys. Rev. **86**, 650 (1952).
 7. P. M. Marcus, Free energies and phase transition of a cylindrical superconductor, Phys. Rev. **86**, 649 (1952).
 8. E. Maxwell, Superconductivity of the isotopes of tin. Phys. Rev. **86**, 235 (1952).
 9. E. Maxwell a. O. S. Lutes, Superconductivity of thallium isotopes, Phys. Rev. **86**, 649 (1952).
 10. K. Mendelsohn a. H. M. Rosenberg, The thermal conductivity of metals at low temperatures, Proc. Phys. Soc. **65A**, 385, 388, (1952).
 11. J. L. Olsen, Heat transport in lead — bismuth alloys, Proc. Phys. Soc. **65A**, 518 (1952).
 12. R. H. Pry, A. L. Lathrop a. W. V. Houston, Gyromagnetic effect in superconductor, Phys. Rev. **86**, 628, 905 (1952).
 13. K. G. Ramanathan, Infra-red absorption of metals at low temperatures, Proc. Phys. Soc. **65A**, 532 (1952).
 14. T. S. Smith a. J. G. Daunt, On the influence of physical strain on the physical properties of superconductors, Phys. Rev. **86**, 818 (1952).
 15. B. Serin, C. A. Reynolds a. C. Lohman, The isotope effect in superconductivity, II Tin and lead, Phys. Rev. **86**, 162 (1952).
-