

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ
В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ*****В. Б. Берестецкий***

Прогресс, произошедший за последние годы в квантовой электродинамике¹, в значительной степени связан с новой формулировкой теории возмущений. Новая теория возмущений дала возможность представлять результаты в компактном и релятивистски инвариантном виде, что позволило разработать методы регуляризации встречающихся в теории расходящихся выражений, делавших ранее бессмысленными попытки вычисления высших приближений. В этом — её главное достоинство. Однако и для расчётов первых приближений — задачи, решавшейся старыми методами, — пользование новой теорией возмущений представляет значительные преимущества. Существенные черты её — отсутствие необходимости рассмотрения промежуточных состояний и необходимости разделения взаимодействий зарядов на кулоновские и «поперечные» — делают применение новых методов более удобными.

В настоящей статье излагаются основы и методы применения теории возмущений современной квантовой электродинамики. Изложение методов регуляризации в задачу этой статьи не входит.

Мы будем пользоваться такой системой единиц, в которой

$$\hbar = c = 1$$

(c — скорость света, $\hbar$ — квантовая постоянная).

1. МАТРИЦА СТОЛКНОВЕНИЙ

Мы будем рассматривать систему, состоящую из электронов (положительных и отрицательных) и фотонов. Общие результаты будут относиться и к другим частицам (протонам), если ограничиться эффектами, связанными только с наличием у них электрического заряда. Пусть Ψ — волновая функция нашей системы

Уравнение, определяющее изменение Ψ во времени, есть

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad (1)$$

где $\hat{H}$ — оператор энергии системы. Он складывается из операторов энергии фотонов $\hat{W}_\gamma$ и электронов $\hat{W}_e$ и оператора энергии взаимодействия $\hat{V}$:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}; \quad \hat{H}_0 = \hat{W}_e + \hat{W}_\gamma. \quad (2)$$

Пусть Ψ_n есть полная система собственных функций оператора $\hat{H}_0$

$$\left. \begin{aligned} i \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} &= \hat{H}_0 \Psi_n = E_n \Psi_n, \\ \Psi_n &= \Psi_n^0 e^{-iE_n t}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Каждая функция Ψ_n описывает определённое состояние системы электронов и фотонов, не взаимодействующих между собой. Она может быть представлена в виде произведения

$$\Psi_n = \Psi_{n_e}^{(e)} \cdot \Psi_{n_\gamma}^{(\gamma)}, \quad (3a)$$

где $\Psi^{(e)}$ — волновая функция системы электронов, а $\Psi^{(\gamma)}$ — системы фотонов. E_n есть сумма энергий всех электронов и фотонов. В качестве независимых переменных функций Ψ_n мы выберем совокупность чисел электронов n_e и фотонов n_γ , находящихся в определённых индивидуальных состояниях f, q («числа заполнения») (f, q — означает полный набор квантовых чисел частицы, например, импульс и поляризацию). В этом представлении

$$\Psi_n^0 = \prod_{q, f} \delta_{n_q n_q^0} \delta_{n_f n_f^0}, \quad (4)$$

где q, f пробегает все возможные значения; n означает теперь определённую совокупность чисел n_q^0, n_f^0 .

Функции Ψ_n (4) образуют ортонормированную систему

$$(\Psi_{n'}, \Psi_n) \equiv \sum_{n_q, n_f} \Psi_{n'}^*(n_f, n_q) \Psi_n(n_f, n_q) = \delta_{nn'}. \quad (4a)$$

Равенство $n = n'$ означает равенство всех чисел заполнения $n_q^0 = n_q'^0; n_f^0 = n_f'^0$. Операторы $\hat{W}_e$ и $\hat{W}_\gamma$ выражаются через операторы квантованных волновых функций частиц.

Реальная система не может находиться в состоянии, описываемом волновой функцией Ψ_n , так как последняя не является соб-

ственной функцией оператора взаимодействия $\hat{V}$. Однако мы можем волновую функцию системы, удовлетворяющую уравнению (1), разложить по полной системе функций (3)

$$\Psi = \sum_n \Phi(n) \Psi_n. \quad (5)$$

Коэффициенты $\Phi(n)$ зависят от времени. Если в некоторый начальный момент времени t_0 система характеризуется определённым распределением чисел заполнения электронов и фотонов (совокупность их обозначим n_0), то благодаря взаимодействию это распределение со временем меняется. $|\Phi(n, t)|^2$ определяет вероятность некоторой другой совокупности чисел заполнения в момент t . Определение $\Phi(n)$ эквивалентно нахождению Ψ .

Найдём уравнение, определяющее изменение $\Phi(n)$ со временем. Для этого подставим разложение (5) в (1):

$$\sum_n \left(i \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} \Phi(n) + i \frac{\partial \Phi(n)}{\partial t} \Psi_n \right) = \sum_n \left[\Phi(n) \hat{H}_0 \Psi_n + \Phi(n) \hat{V} \Psi_n \right].$$

Первые члены в левой и правой частях этого равенства взаимно уничтожаются в силу (3). Остающееся уравнение умножаем скалярно на Ψ_n^* . Тогда в силу ортонормированности системы функций Ψ_n (4а) получим:

$$i \frac{\partial \Phi(n)}{\partial t} = \sum_{n'} (n | V | n') \Phi(n'), \quad (6)$$

где $(n | V | n')$ — матричный элемент оператора энергии взаимодействия $\hat{V}$:

$$(n | V | n') = (\Psi_n^*, \hat{V} \Psi_{n'}) = (\Psi_n^{0*}, \hat{V} \Psi_{n'}^0) e^{-i(E_{n'} - E_n)t}. \quad (7)$$

Мы можем кратко записать (6) так:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \hat{V} \Phi. \quad (8)$$

Функцию Φ , являющуюся попрежнему совокупностью коэффициентов $\Phi(n)$, можно рассматривать как волновую функцию системы. Оператором энергии для неё является матрица оператора $\hat{V}$ (7). (Отметим, что она явно содержит время.) Ввиду этого описание системы функцией Φ и уравнением (8) иногда называют представлением взаимодействия².

Решение уравнения (8) можно представить в следующей форме:

$$\Phi(t) = \hat{S}(t) \Phi_0, \quad (9)$$

где Φ_0 — значение Φ при $t = t_0$, а $\hat{S}(t)$ — оператор. Подробнее

$$\Phi(n, t) = \sum_{n'} (n | S(t) | n') \Phi(n'). \quad (9a)$$

Пусть при $t = t_0$ система находилась в состоянии n_0 , т. е.

$$\Phi_0(n') = \delta_{n' n_0}. \quad (10)$$

Тогда по (9a)

$$\Phi(n, t) = (n | S(t) | n_0) \equiv (\Psi_n^*, \hat{S}(t) \Psi_{n_0}). \quad (11)$$

Типичной физической задачей является задача о столкновении. Постановка её такова. В начальный момент $t_0 = -\infty$ задано состояние движения невзаимодействующих частиц*), требуется определить состояние движения частиц (опять невзаимодействующих)

при $t = \infty$. Задача решена, если найдена матрица $\hat{S}(\infty)$, которая поэтому может быть названа матрицей столкновений. В действительности, как мы увидим ниже, знание S -матрицы позволяет решить и более широкий круг задач, выходящих за рамки задачи столкновений.

Подстановка (9) в (8) даёт уравнение для матрицы $\hat{S}$

$$i \frac{\partial \hat{S}(t)}{\partial t} = \hat{V}(t) \hat{S}(t) \quad (12)$$

и начальное условие

$$\hat{S}(t_0) = 1. \quad (12a)$$

Уравнение (12) может служить основным уравнением квантовой электродинамики.

2. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Для решения уравнения (12) воспользуемся тем, что энергия взаимодействия электронов с электромагнитным полем пропорциональна величине электрического заряда электрона e , которую можно рассматривать как малый параметр. В выбранной нами системе единиц

$$e \approx \frac{1}{\sqrt{137}}.$$

Поэтому можно решать (12) методом последовательных приближений, т. е. искать для $\hat{S}(t)$ решение в форме ряда по

*) Термин «невзаимодействующие частицы» здесь понимается в смысле отсутствия взаимодействия друг с другом, т. е. в смысле начального условия (10). Такое состояние может учитывать наличие внешнего поля.

степеням ϵ :

$$\hat{S}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{S}_k(t), \quad (13)$$

где $\hat{S}_k$ пропорционально $(\epsilon)^k$. Подставляя (13) в (12) и приравнивая члены одного порядка, получаем (с учётом начального условия (12а))

$$\hat{S}_k(t) = -i \int_{t_0}^t \hat{V}(t') \hat{S}_{k-1}(t') dt' \quad (14)$$

или, подставляя последовательно $\hat{S}_{k-1}$ через $\hat{S}_{k-2}$ и т. д. вплоть до $\hat{S}_0 = 1$,

$$\begin{aligned} \hat{S}_k(t) = (-i)^k \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^{t^{(k-1)}} dt^{(k)} \hat{V}(t') \times \\ \times \hat{V}(t'') \dots \hat{V}(t^{(k)}). \end{aligned} \quad (15)$$

Удобно представить многократный интеграл (15) в несколько иной форме³. Для простоты рассмотрим сначала член $k=2$

$$\hat{S}_2(t) = - \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \hat{V}(t') \hat{V}(t''). \quad (16)$$

Если t' и t'' изобразить в качестве координат точки на плоскости (t' — абсцисса, t'' — ордината), то областью интегрирования в (16) является треугольник, расположенный ниже биссектрисы координатного угла (рис. 1). Если в (16) взаимно изменить обозначения t' на t'' , то

$$\hat{S}_2(t) = - \int_{t_0}^t dt'' \int_{t_0}^{t''} dt' \hat{V}(t'') \hat{V}(t'). \quad (16a)$$

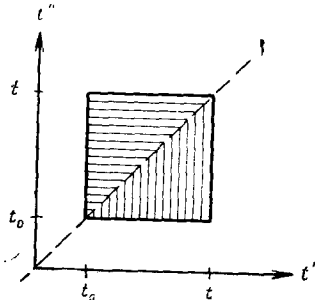


Рис. 1.

В плоскости t' , t'' (считая попережнему t' абсциссой, а t'' ординатой) областью интегрирования является треугольник, расположенный выше биссектрисы координатного угла. Подинтегральное выражение в (16а) отличается от подинтегрального выражения (16) изменением порядка сомножителей. Если бы $\hat{V}(t')$ и $\hat{V}(t'')$

коммутировали, то оба подинтегральных выражения совпадали бы и $\hat{S}_2$ можно было представить как половину интеграла по всему квадрату рис. 1. Мы можем сделать это и в общем случае некоммутирующих $\hat{V}(t')$ и $\hat{V}(t'')$, если введём «хронологизирующий оператор» P :

$$P[\hat{V}(t')\hat{V}(t'')] = P[\hat{V}(t'')\hat{V}(t')] = \begin{cases} \hat{V}(t')\hat{V}(t'') & \text{при } t' > t'', \\ \hat{V}(t'')\hat{V}(t') & \text{при } t' < t''. \end{cases} \quad (17)$$

Тогда

$$\hat{S}_2(t) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' P[\hat{V}(t')\hat{V}(t'')]. \quad (18)$$

Аналогично, в общем случае (15) можно записать как

$$\hat{S}_k(t) = \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' \dots \int_{t_0}^t dt^{(k)} P[\hat{V}(t')\hat{V}(t'')\dots\hat{V}(t^{(k)})], \quad (19)$$

где P — оператор, переставляющий множители так, чтобы всегда слева направо временные аргументы операторов $\hat{V}$ убывали. Формула (19) является основной исходной формулой для квантово-электродинамических расчётов.

В экспериментах непосредственно измеряемой величиной является вероятность переходов в единицу времени из состояния n_0 в состояние n , которую можно определить как

$$w_{n_0 n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} |(n|S(t)|n_0)|^2 \quad (20)$$

(или просто связанное с $w_{n_0 n}$ сечение столкновения). Найдём выражение w_{nn_0} через матрицу столкновений $\hat{S}(\infty)$. Согласно (19)

$$S(\infty) = \frac{(-i)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt^{(k)} \times \\ \times P[\hat{V}(t')\dots\hat{V}(t^{(k)})]. \quad (21)$$

Пусть здесь проведено $k-1$ интегрирование. Так как матрица V содержит время только в форме $e^{i(E_{n'}-E_n)t}$ [см. (7)], то

полученное выражение будет иметь форму*)

$$(n|S(\infty)|n_0) = -iU_{nn_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu t'} dt' = -2\pi i U_{nn_0} \delta(\nu), \quad (22)$$

где U_{nn_0} — не зависящая от времени величина. Её мы назовём матрицей эффективной энергии возмущения. Изменим теперь порядок перехода к пределу так, чтобы найти (20). Пусть

$$(n|S'(t)|n_0) = -iU_{nn_0} \int_{t_0}^t e^{i\nu t'} dt' \quad (22a)$$

($S'(t)$ не есть истинная матрица $S(t)$, но $S'(\infty) = S(\infty)$).

Далее выкладки совпадают с теми, которые проделываются в обыкновенной квантовомеханической нестационарной теории возмущений:

$$(n|S'_k(t)|n_0) = -i \frac{e^{i\nu t} - e^{i\nu t_0}}{\nu} U_{nn_0},$$

$$|(n|S'(t)|n_0)|^2 = |U_{nn_0}|^2 \frac{\sin^2 \frac{\nu}{2} (t - t_0)}{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2};$$

при больших $t - t_0$

$$\frac{\sin^2 \frac{\nu}{2} (t - t_0)}{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2} = 2\pi \delta(\nu) \cdot (t - t_0).$$

Получаем обычную квантовомеханическую формулу

$$w_{n,n} = 2\pi |U_{nn_0}|^2 \delta(\nu). \quad (23)$$

Основной результат, который мы здесь получили, сводится к связи матрицы столкновений $S(\infty)$ с матрицей U_{nn_0} (22)**).

*) $(n|S_k|n_0)$ может содержать ряд членов типа (22), но, как мы убедимся в дальнейшем, зависимость от времени у всех этих членов совпадает. В действительности ν оказывается не чем иным, как $E_n - E_{n_0}$, и множитель $\delta(\nu)$ обеспечивает сохранение энергии. Форма (21) относится к S в любом приближении.

**) Отметим ещё раз, что $\hat{S}(\infty)$ выражается в форме (21) в любом приближении, а U_{nn_0} входит в выражение (22), имеющее вид уравнения квантовомеханической теории возмущений первого порядка.

3. ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛЕ ФОТОНОВ И ЭЛЕКТРОНОВ

До сих пор мы не конкретизировали вида оператора энергии взаимодействия $\hat{V}$. Его можно найти по аналогии с соответствующим классическим выражением.

Последнее имеет вид

$$V = \int j_i A_i (d\mathbf{r}), \quad (24)$$

где j_i — четырёхмерный вектор плотности электронного тока, A_i — вектор-потенциал электромагнитного поля ($i = 1, 2, 3, 0$),

$$j_i A_i = j_0 A_0 - \mathbf{j} \mathbf{A}.$$

В представлении вторичного квантования все физические величины, относящиеся к фотонам, выражаются через операторы квантованных полей как соответствующие классические величины.

Из уравнения Дирака для движения электрона во внешнем поле также следует, что средняя энергия взаимодействия имеет вид (24), где j_i — квантовомеханическое выражение плотности тока. Мы

примем для $\hat{V}$ выражение (24), в котором j_i и A_i — соответствующие операторы, выражающиеся через операторы квантованных волновых функций электронов и фотонов. Это же выражение (24) следует из соображений релятивистской инвариантности. $j_i A_i$ является

инвариантом. Тогда и интеграл $\int \hat{j}_i \hat{A}_i (d\mathbf{r}) dt$, входящий в матрицу $\hat{S}$, также инвариант.

Оператор потенциала имеет вид

$$\hat{A}_i = \sum_q (\hat{C}_q A_{qi} + \hat{C}_q^+ A_{qi}^*), \quad (25)$$

где $\hat{C}_q$ и $\hat{C}_q^+$ — операторы поглощения и испускания фотона в состоянии q , $A_{qi} + A_{qi}^*$ — вектор-потенциал поля соответствующего фотона. Так как под оператором $\hat{V}$ в представлении взаимодействия [уравнение (12)] мы понимаем матрицу (7), то $\hat{A}_i$ содержит множители $e^i(E_{n'} - E_n)t$. Но матрица $\langle n | C_q | n' \rangle$ отлична от нуля, только если n отличается от n' отсутствием одного фотона в состоянии q , т. е.

$$E_n - E_{n'} = -k,$$

где k — частота поглощённого фотона.

Аналогично $(n|C_q^+|n')$ отлично от нуля, когда n отличается от n' одним лишним фотоном в состоянии q , т. е.

$$E_n - E_{n'} = k.$$

Таким образом, A_{qi} в (25) можно считать включающим временную зависимость e^{-ikt} .

Если квантовые числа q соответствуют состояниям фотона с определёнными импульсом и поляризацией, то

$$\hat{A}_i = \sum_{\mathbf{k}\mu} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu})_i (\hat{C}_{\mathbf{k}\mu} \varphi_{\mathbf{k}\mu} + \hat{C}_{\mathbf{k}\mu}^+ \varphi_{\mathbf{k}\mu}^*) = \sum_{\mathbf{k}\mu} (\hat{A}_{\mathbf{k}\mu})_i, \quad (25a)$$

$$\varphi_{\mathbf{k}\mu} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{d\mathbf{k}}{k}} e^{-iqx} \quad (25b)$$

(q — четырёхмерный волновой вектор, x — совокупность $\mathbf{r}$ и t , — $qx = \mathbf{k}\mathbf{r} - kt$); $(\mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu})$ — единичный вектор поляризации.

Нормировка потенциалов (25b) такова, что энергия электромагнитного поля, имеющего форму волнового пакета ширины $(d\mathbf{k})$,

$$\frac{1}{8\pi} \int (E_{\mathbf{k}\mu}^2 + H_{\mathbf{k}\mu}^2) (d\mathbf{r}) = k.$$

При заданном волновом векторе $\mathbf{k}$ возможны только две поляризации фотона ($\mu = 1, 2$), такие, при которых векторы электрического и магнитного полей поперечны. Этого можно было бы достигнуть, считая и потенциалы поперечными $((\hat{A}_{\mathbf{k}\mu})_3 = (\hat{A}_{\mathbf{k}\mu})_0 \equiv 0$, если ось x_3 направлена по $\mathbf{k}$). Однако такая формулировка релятивистски неинвариантна. Поэтому приходится рассматривать все четыре составляющие оператора вектора-потенциала и, соответственно, четыре поляризации ($\mu = 3$ — «продольные кванты» и $\mu = 0$ — «скалярные кванты»).

При $\mu = 1, 2, 3$ имеют место перестановочные соотношения

$$\hat{C}_{\mathbf{k}\mu} \hat{C}_{\mathbf{k}\mu'}^+ - \hat{C}_{\mathbf{k}\mu'}^+ \hat{C}_{\mathbf{k}\mu} = \delta_{\mu\mu'} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu})_i = \delta_{\mu i}. \quad (26)$$

Для $\mu = 0$ возможны две формулировки: либо

$$\hat{C}_{\mathbf{k}0} \hat{C}_{\mathbf{k}0}^+ - \hat{C}_{\mathbf{k}0}^+ \hat{C}_{\mathbf{k}0} = -1 (\mathbf{e}_{\mathbf{k}0})_i = \delta_{0i},$$

либо

$$\hat{C}_{\mathbf{k}0} \hat{C}_{\mathbf{k}0}^+ - \hat{C}_{\mathbf{k}0}^+ \hat{C}_{\mathbf{k}0} = 1 (\mathbf{e}_{\mathbf{k}0})_i = -i\delta_{0i}. \quad (26a)$$

Мы будем пользоваться последней формулировкой⁴; она удобна

тем, что, как и для поперечных составляющих, операторы $\hat{C}_{k0}^+$ и $\hat{C}_{k0}$ могут быть интерпретированы как операторы испускания и поглощения. При этом, однако, оператор $\hat{A}_0$ оказывается не-самосопряжённым. Самосопряжённым теперь является оператор $\hat{A}_4 = i\hat{A}_0$. Для того чтобы математическое ожидание $\hat{A}_0$ было вещественным, необходимо изменить его определение. Вместо обычного

$$\bar{A}_j = (\Psi^*, \hat{A}_j \Psi)$$

пусть

$$\bar{A}_j = (\Psi^+, \hat{A}_j \Psi), \quad (27)$$

где

$$\Psi^+ = \Psi^* \hat{\eta}, \quad (27a)$$

так что

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= -i\Psi^* \hat{\eta} \hat{A}_4 \Psi, \\ (\bar{A}_0)^* &= i\Psi^* \hat{A}_4 \hat{\eta} \Psi \quad (\hat{A}_4^+ = \hat{A}_4; \quad \hat{\eta}^+ = \hat{\eta}). \end{aligned}$$

Вещественность $\bar{A}_0$

$$(\bar{A}_0)^* = \bar{A}_0$$

будет соблюдена, если определить оператор $\hat{\eta}$ следующим образом:

$$\hat{A}_4 \hat{\eta} = -\hat{\eta} \hat{A}_4 \quad (27b)$$

или

$$\hat{C}_{k0} \hat{\eta} = -\hat{\eta} \hat{C}_{k0}; \quad \hat{C}_{k0}^+ \hat{\eta} = -\hat{\eta} \hat{C}_{k0}^+$$

(с остальными составляющими $\hat{A}_j \hat{\eta}$ коммутирует; можно показать, что эти правила коммутации инвариантны).

Из явного вида матриц $\hat{C}_0$ легко найти, что

$$\hat{\eta} = (-1)^{v_0}, \quad (27b)$$

где v_0 — число скалярных квантов.

Потенциалы $\hat{A}_j$ удовлетворяют волновому уравнению. Для того чтобы оно было эквивалентно уравнениям Максвелла, обычно добавляется условие Лоренца:

$$\left(\operatorname{div} \hat{\mathbf{A}} + \frac{\partial \hat{A}_0}{\partial t} \right) \Psi = 0.$$

Достаточно, однако, более слабого условия, обеспечивающего выполнение уравнений Максвелла для математических ожиданий,

$$\Psi^* \left(\operatorname{div} \hat{\mathbf{A}} + \frac{\partial \hat{A}_0}{\partial t} \right) \Psi = 0. \quad (28)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \hat{\mathbf{A}}^{(+)} + \hat{\mathbf{A}}^{(-)}, \\ \hat{A}_4 &= \hat{A}_4^{(+)} + \hat{A}_4^{(-)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{A}_j^{(+)} &= \sum_{\mathbf{k}\mu} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu})_j \hat{C}_{\mathbf{k}\mu} \varphi_{\mathbf{k}\mu}, \\ \hat{A}_j^{(-)} &= \sum_{\mathbf{k}\mu} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu})_j \hat{C}_{\mathbf{k}\mu}^+ \varphi_{\mathbf{k}\mu}^*. \end{aligned}$$

(Такое разбиение релятивистски инвариантно.) Пусть выполнено условие

$$\left[\operatorname{div} \hat{\mathbf{A}}^{(+)} - i \frac{\partial \hat{A}_4^{(+)}}{\partial t} \right] \Psi = 0. \quad (28a)$$

Сопряжённое выражение имеет вид

$$\Psi^* \left(\operatorname{div} \hat{\mathbf{A}}^{(-)} + i \frac{\partial \hat{A}_4^{(-)}}{\partial t} \right) = 0,$$

или, умножая справа на $\hat{\eta}$, в силу (27б):

$$\Psi^* \left(\operatorname{div} \hat{\mathbf{A}}^{(-)} - i \frac{\partial \hat{A}_4^{(-)}}{\partial t} \right) = 0,$$

т. е. условие (28a) эквивалентно (28). (28a) можно записать как (ось x_3 направлена по $\mathbf{k}$):

$$(\hat{C}_{\mathbf{k}3} + i \hat{C}_{\mathbf{k}0}) \Psi_{\parallel} (\hat{\mathbf{v}}_3 \mathbf{v}_0) = 0, \quad (28б)$$

где ν_s — число продольных квантов, ν_0 — число скалярных квантов, $\Psi_{||}$ — волновая функция «продольных степеней свободы» электромагнитного поля.

Общим решением (28б) является:

$$\Psi_{||} = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s \varphi_s(\nu_s, \nu_0), \quad (29)$$

где

$$\varphi_s = \sum_{r=0}^s (i)^r \sqrt{\binom{s}{r}} \delta_{\nu_s r} \delta_{\nu_0, s-r}$$

$\binom{s}{r}$ — биномиальные коэффициенты).

Замечательно, что

$$(\Psi + \Psi) = \lambda_0 (\varphi_0^+ \varphi), \quad (29a)$$

так как при s или $s' \neq 0$

$$(\varphi_s^+ \varphi_{s'}) = 0.$$

Таким образом, волновая функция $\Psi_{||}$ может быть нормирована:

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_s \neq 0 \text{ произвольны.} \quad (29б)$$

В частности, можно принять:

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_s = 0 \quad (s \neq 0). \quad (29в)$$

Можно убедиться, что любой другой выбор λ_s оставляет неизменным градиентно-инвариантные величины (например, математические ожидания полей, энергии, импульса и т. д.).

Этот результат означает, что существует всего лишь одно состояние продольных степеней свободы. Это состояние, в котором при простейшем выборе постоянных отсутствуют продольные и скалярные кванты (вакуум или нулевые колебания). Поэтому испускание этих квантов невозможно в соответствии с поперечностью поляризации фотонов. Тем не менее, наличие этого «продольного вакуума» сказывается на взаимодействии частиц.

Оператор вектора плотности тока имеет вид:

$$\hat{j}_i = \frac{1}{2} (\hat{\bar{\psi}} \gamma_i \hat{\psi} - \hat{\psi} \gamma_i \hat{\bar{\psi}}), \quad (30)$$

где $\gamma_i = \beta \alpha_i$ ($\alpha_0 = 1$) — дираковские матрицы и $\bar{\psi} = \psi^* \beta$.

Операторы квантованной волновой функции электрона

$$\hat{\psi} = \sum_f (\hat{a}_f \psi_f + \hat{b}_f^\dagger \bar{\psi}_{-f}), \quad (30 \text{ а})$$

$$\hat{\bar{\psi}} = \sum_f (\hat{a}_f^\dagger \bar{\psi}_f + \hat{b}_f \bar{\psi}_{-f}),$$

где $\hat{a}_f$ и $\hat{a}_f^\dagger$ — операторы поглощения и испускания электрона, а $\hat{b}_f$ и $\hat{b}_f^\dagger$ — то же для позитрона. ψ_f — решения уравнения Дирака с положительными частотами, а $\bar{\psi}_{-f}$ — решения с отрицательными частотами. Как и в случае фотонных операторов в ψ_f следует включать временной множитель $e^{-i\varepsilon_f t}$, а в $\bar{\psi}_{-f}$ $e^{-i\varepsilon_{-f} t} = e^{i|\varepsilon_{-f}| t}$. Действительно, в соответствии с (7) матричные элементы $\hat{a}_f$ отличны от 0 только тогда, когда $E_{n'} - E_n = \varepsilon_f$, а матричные элементы $\hat{b}_{-f}$ — когда $E_{n'} - E_n = -\varepsilon_{-f}$ ($|\varepsilon_{-f}| = -\varepsilon_{-f}$ есть энергия позитрона; так как $\hat{b}_f$ умножается на $\bar{\psi}_{-f}$, то это эквивалентно тому что $\bar{\psi}_{-f}$ содержит $e^{-i\varepsilon_{-f} t}$). Соответственно получается и для $\hat{a}_f^\dagger$ и $\hat{b}_f^\dagger$.

Оператор $\hat{j}_i$ в соответствии с (30) и (30а) содержит операторы поглощения и испускания билинейно в следующих сочетаниях:

$$\hat{a}_f^\dagger \hat{a}_{f'} - \hat{a}_{f'} \hat{a}_f^\dagger; \quad \hat{b}_f \hat{b}_{f'}^\dagger - \hat{b}_{f'}^\dagger \hat{b}_f,$$

либо

$$\hat{a}_f \hat{b}_{f'} - \hat{b}_{f'} \hat{a}_f; \quad \hat{a}_f^\dagger \hat{b}_{f'}^\dagger - \hat{b}_{f'}^\dagger \hat{a}_f^\dagger.$$

Входящие сюда операторы антикоммутируют, за исключением операторов $\hat{a}_f \hat{a}_{f'}^\dagger$ и $\hat{b}_f \hat{b}_{f'}^\dagger$ при $f = f'$, когда антикоммутатор их равен 1. Поэтому, кроме последнего случая, разность в каждой скобке можно заменить удвоенным первым членом. Таким образом, оператор тока можно записать в такой форме:

$$\begin{aligned} \hat{j}_i = & \sum_{f \neq f'} (\hat{a}_f^\dagger \hat{a}_{f'} \bar{\psi}_f \gamma_i \psi_{f'} + \hat{b}_f \hat{b}_{f'}^\dagger \bar{\psi}_{-f} \gamma_i \psi_{-f'}) + \\ & + \sum_{f \neq f'} (\hat{a}_f^\dagger \hat{b}_{f'}^\dagger \bar{\psi}_f \gamma_i \bar{\psi}_{-f'} + \hat{b}_f \hat{a}_{f'} \bar{\psi}_{-f} \gamma_i \psi_{f'}) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_f [(\hat{a}_f^\dagger \hat{a}_f - \hat{a}_f \hat{a}_f^\dagger) \bar{\psi}_f \gamma_i \psi_f - (\hat{b}_f^\dagger \hat{b}_f - \hat{b}_f \hat{b}_f^\dagger) \bar{\psi}_{-f} \gamma_i \psi_{-f}]. \quad (31) \end{aligned}$$

(Последняя сумма обращается в 0 для свободных частиц, когда электронные и позитронные состояния одинаковы.) Члены $\hat{a}_f^\dagger \hat{a}_{f'}$ и $\hat{b}_f^\dagger \hat{b}_{f'}$ соответствуют неизменности числа электронов и позитронов в отдельности (может меняться лишь состояние), члены $\hat{a}_f^\dagger \hat{b}_{f'}$, $\hat{a}_f^\dagger \hat{b}_f^\dagger$ — исчезновению или рождению пары электрон—позитрон. Таким образом, билинейная структура $\hat{j}_i$ выражает закон сохранения заряда.

Если ψ_f и $\bar{\psi}_{f'}$ являются решениями уравнения Дирака без внешнего поля, то их можно выбрать в качестве волновых функций состояний с определённым импульсом и поляризацией (проекцией спина). Тогда

$$\begin{aligned}\hat{\psi} &= \sum_{\mathbf{p}\mu} (\hat{a}_{\mathbf{p}\mu} \psi_{\mathbf{p}\mu} + \hat{b}_{\mathbf{p}\mu}^\dagger \bar{\psi}_{-\mathbf{p}, -\mu, -}), \\ \hat{\bar{\psi}} &= \sum_{\mathbf{p}\mu} (\hat{a}_{\mathbf{p}\mu}^\dagger \bar{\psi}_{\mathbf{p}\mu} + \hat{b}_{\mathbf{p}\mu} \bar{\psi}_{-\mathbf{p}, -\mu, -}),\end{aligned}\quad (32)$$

$$\psi_{\mathbf{p}\mu} = u_{\mathbf{p}\mu} + e^{i(\mathbf{p}\mathbf{r} - Vp^2 + m^2 t)} \sqrt{\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}},$$

$$\bar{\psi}_{-\mathbf{p}, -\mu, -} = \bar{u}_{-\mathbf{p}, -\mu, -} e^{-i(\mathbf{p}\mathbf{r} - Vp^2 + m^2 t)} \sqrt{\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}}. \quad (32a)$$

Здесь $\psi_{\mathbf{p}\mu}$ — волновая функция, отвечающая волновому вектору (импульсу) $\mathbf{p}$, проекции спина μ и положительной частоте; $\bar{\psi}_{\mathbf{p}\mu}$ — функция, отвечающая волновому вектору $\mathbf{p}$, поляризации μ и отрицательной частоте, т. е. импульсу $-\mathbf{p}$ и проекции спина $-\mu$ позитрона. $u_{\mathbf{p}\mu} \pm$ — соответствующие спинорные амплитуды, удовлетворяющие соотношению, следующему из уравнения Дирака:

$$f\gamma u = mu, \quad (33)$$

где

$$f\gamma = f_i\gamma_i = \gamma_0 (\pm \sqrt{p^2 + m^2}) - p\gamma, \quad (33a)$$

а знак у корня отвечает знаку частоты.

Волновые функции (32б) нормированы так, что для волнового пакета ширины $(d\mathbf{p})$

$$\int |\psi_{\mathbf{p}\mu}|^2 (d\mathbf{r}) = 1,$$

т. е.

$$u_{\mathbf{p}\mu}^* u_{\mathbf{p}\mu} = 1. \quad (33б)$$

Внешнее поле может учитываться либо точно, путём определения волновых функций ψ , либо приближённо, как возмущение. Во втором случае мы можем пользоваться волновыми функциями без учёта внешнего поля (32а), а последнее учесть в операторе возмущения (24), который в этом случае имеет вид

$$\hat{V} = e \int \hat{j}_i (\hat{A}_i + A_i^{(e)}) (d\mathbf{r}). \quad (34)$$

Внешний потенциал $A_i^{(e)}$ не ограничен условием поперечности. Возможен, конечно, и промежуточный метод, когда часть внешнего поля учитывается точно, а часть входит в возмущение. Потенциалы $A_i^{(e)}$, не являясь операторами, в (31) не действуют на фотонные переменные и не меняют числа фотонов. Зависимость от времени в них может содержаться явно. Если её представить в виде ряда или интеграла Фурье, то S -матрица сохранит форму (22).

4. ПРОЦЕССЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Вернёмся теперь к основной формуле для матрицы столкновений $\hat{S}(\infty)$ (21). В дальнейшем мы будем обозначать её для краткости просто $\hat{S}$. Рассмотрим сначала матрицу столкновений первого порядка *)

$$\hat{S}_1 = -ie \int_{-\infty}^{\infty} \hat{j}_i(x) (\hat{A}_i(x) + A_i^{(e)}(x)) d^4x \quad (35)$$

и выясним, каким процессам соответствуют её элементы. Согласно (25) матричные элементы $\hat{A}_i$ соответствуют излучению или поглощению одного фотона. Пусть в начальном состоянии число фотонов в некотором состоянии q есть n_q , тогда отличны от 0 следующие элементы матрицы $\hat{S}_1$:

$$(\dots n_q + 1 \dots | S_1 | \dots n_q \dots) \text{ (излучение); } (n_q + 1 | C_q^+ | n_q) = \sqrt{n_q + 1}$$

и

$$(\dots n_q - 1 \dots | S_1 | \dots n_q \dots) \text{ (поглощение); } (n_q - 1 | C_q | n_q) = \sqrt{n_q},$$

причём числа фотонов в других состояниях не изменились. В дальнейшем нас будет интересовать случай $n_q = 0$ или 1. Потенциал

*) В применении к процессам первого порядка новая теория возмущений по существу совпадает со старой⁷.

внешнего поля, поскольку он не содержит операторов $\hat{C}_q$ и $\hat{C}_q^+$, диагонален в числах фотонов. Поэтому тот член в (35), который содержит $A^{(e)}$, войдёт в матричные элементы

$$(\dots n_q \dots | S | \dots n_q \dots).$$

Матрица $\hat{j}_i$ согласно (31) содержит элементы, соответствующие следующим процессам.

1. Переход электрона из состояния f в состояние f' :

$$(0_f 1_{f'} | a_f^+ a_f | 1_f 0_{f'}) = 1$$

(в силу принципа Паули n_f может принимать значения 0 или 1). Этому может отвечать:

а) Излучение фотона. Соответствующий элемент матрицы S , согласно (35), (31) и (25),

$$(f' q | S | f) = -ie \int \bar{\psi}_{f'}(x) \gamma_i A_{qi}^*(x) \psi_f(x) d^4x. \quad (36)$$

Здесь обозначено

$$(f' q | S | f) = (\dots 1_{f'} \dots 0_f \dots 1_q | S | \dots 0_q \dots 1_f \dots 0_{f'} \dots).$$

б) Поглощение фотона

$$(f' | S | q f) = -ie \int \bar{\psi}_{f'}(x) \gamma_i A_{qi}(x) \psi_f(x) d^4x. \quad (36a)$$

в) Рассеяние электрона внешним полем

$$(f' | S | f) = -ie \int \bar{\psi}_{f'}(x) \gamma_i A_i^{(e)}(x) \psi_f(x) d^4x. \quad (36b)$$

Заметим, что (36) и (36a) обращаются в 0, если f и f' — свободные состояния электрона (без внешнего поля). Действительно, тогда матричный элемент содержит интеграл

$$\int e^{i(f-f'-q)x} d^4x = (2\pi)^4 \delta(f-f'-q), \quad (37)$$

где f_i , f'_i , q_i — соответствующие четырёхмерные импульсы электрона и фотона. Формула (37) выражает законы сохранения энергии и импульса, которые не могут быть одновременно выполнены. (Свободный электрон не может излучить или поглотить фотон.)

II. Переход позитрона из состояния g в состояние g' . Соответствующие матричные элементы:

$$(g' q | S_1 | g) = ie \int \bar{\psi}_{-g}(x) \gamma_i A_{qi}^*(x) \psi_{-g'}(x) d^4x, \quad (38)$$

$$(g' | S_1 | q g) = ie \int \bar{\psi}_{-g} \gamma_i A_{qi} \psi_{-g'} d^4x, \quad (38a)$$

$$(g' | S_1 | g) = ie \int \bar{\psi}_{-g} \gamma_i A_i^{(e)} \psi_{-g'} d^4x. \quad (38b)$$

Выражение (37) отличается от (36) знаком (что соответствует противоположному заряду позитрона). Кроме того, в (37), по сравнению с (36), начальная и конечная волновые функции как бы поменялись местами (это соответствует тому, что изменение состояния позитрона, как «дырки», противоположно изменению электронного состояния с отрицательной частотой).

III. Образование пары фотоном:

$$(fg|S_1|q) = -ie \int \bar{\psi}_f A_{qi}^* \gamma_i \psi_{-g} d^4x \quad (39)$$

или внешним полем:

$$(fg|S_1|0) = -ie \int \bar{\psi}_f A_i^{(e)} \gamma_i \psi_{-g} d^4x. \quad (39a)$$

Матричный элемент (39a) обращается в 0 для свободных электронов, ибо, аналогично (37), содержит

$$\int e^{-i(U+g-q)x} d^4x = (2\pi)^4 \delta(f+g-q),$$

где f , g и q — 4-импульсы электрона, позитрона и фотона, и опять требования законов сохранения энергии и импульса оказываются несовместимыми. В силу закона сохранения энергии в любом случае обращается в 0 матричный элемент

$$(fgq|S_1|0),$$

содержащий

$$\int e^{i(\epsilon_f + |\epsilon_{-g}| + k)t} dt$$

(каждая из этих трёх величин положительна).

IV. Превращение пары в фотон:

$$(q|S_1|fg) = -ie \int \bar{\psi}_{-g} \gamma_i A_{qi} \psi_f d^4x \quad (39b)$$

и поглощение пары внешним полем:

$$(0|S_1|fg) = -ie \int \bar{\psi}_{-g} \gamma_i A_i^{(e)} \psi_f d^4x. \quad (39b)$$

Выражение (39b) обращается в 0 для свободных электронов. Всегда равен 0 матричный элемент

$$(0|S_1|qfg).$$

Заметим ещё, что образование или аннигиляция пары внешним полем требует наличия в его разложении Фурье высоких частот порядка $2m$, ибо (39a) или (39b) содержат интегралы по времени

$$\int e^{\pm i(\epsilon_f + |\epsilon_{-g}|)t} A_i^{(e)}(t) dt.$$

Последние члены в (31) диагональны по отношению к электронным состояниям. Поэтому в силу закона сохранения энергии они не приводят ни к излучению, ни к поглощению фотона.

Удобно изображать матричные элементы соответствующих процессов диаграммами, построенными по следующему принципу. Каждый из записанных выше матричных элементов представляет

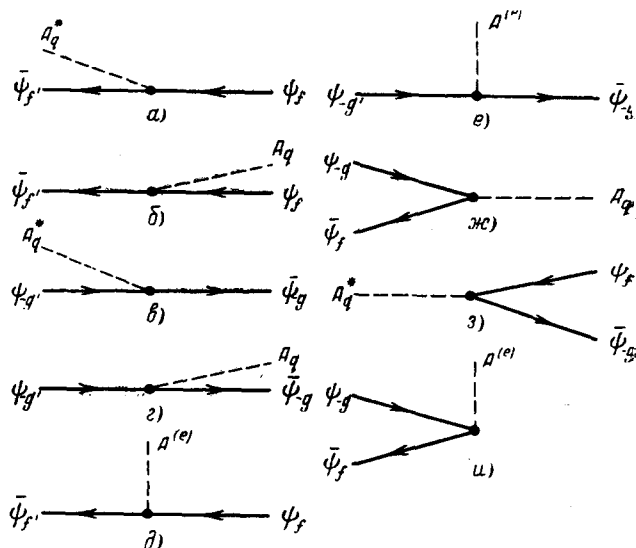


Рис. 2. а) — излучение фотона электроном (36 а); б) — поглощение фотона электроном (36 а); е) — испускание фотона позитроном (37 а); з) — поглощение фотона позитроном (38 а); д) — рассеяние электрона внешним полем (36 б); ж) — рассеяние позитрона внешним полем (38 б); з) — образование пары фотоном (39 а); и) — превращение пары в фотон (39 б); и) — образование пары во внешнем поле (39 а)

собой интеграл от произведения трёх величин, являющихся функциями одного и того же аргумента x . Соответственно этому строим три луча из одной узловой точки. Электронные функции изображаем сплошными линиями, фотонную — пунктирной. Для различения ψ и $\bar{\psi}$ линию, отвечающую ψ , снабжаем стрелкой, направленной к узловой точке, линию $\bar{\psi}$ — стрелкой, направленной от узловой точки. Линии, отвечающие состоянию системы при $t = -\infty$, помещаем справа от узловой точки, линии состояний при $t = \infty$ — слева («ось времени направлена налево»). Таким образом, пунктирной линии справа всегда отвечает A_q , а слева — A_q^* . Внешнее поле изображаем вертикальной пунктирной линией. Электронные линии справа соответствуют ψ , а слева — $\bar{\psi}$.

(направление стрелок вдоль «оси времени»), а позитронные — наоборот (направление стрелок против «оси времени» *). На рис. 2 приведены диаграммы всех матричных элементов этого параграфа.

5. ФУНКЦИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ЗАРЯДОВ

Перейдём к рассмотрению матрицы столкновений второго порядка. Подставляя в (18) выражение $\hat{V}$, имеем:

$$\hat{S}_2 = -\frac{e^2}{2} \iint P \left[\hat{j}_i(x_1) \hat{A}_i(x_1) \hat{j}_j(x_2) \hat{A}_j(x_2) \right] d^4x_1 d^4x_2.$$

Так как электронные и фотонные операторы коммутируют между собой, то порядок расположения $\hat{j}$ относительно $\hat{A}$ несуществен и

$$\hat{S}_2 = -\frac{e^2}{2} \iint P \left[\hat{j}_i(x_1) \hat{j}_j(x_2) \right] P \left[\hat{A}_i(x_1) \hat{A}_j(x_2) \right]. \quad (40)$$

Выражение (40) содержит произведение двух фотонных операторов. Поэтому матрица $\hat{S}_2$ содержит элементы, диагональные по числу фотонов. Особенное значение для нас будут иметь диагональные элементы, отвечающие отсутствию фотонов. Мы займёмся поэтому нахождением матричного элемента

$$\left(0 \left| P \left[\hat{A}_i(x_1) \hat{A}_j(x_2) \right] \right| 0 \right) = (\Psi_0^{(i)*}, P[A_i(x_1) A_j(x_2)] \Psi_0^{(j)}), \quad (41)$$

который можно назвать средним по вакууму этого оператора.

Подставим в это выражение разложение операторов потенциала (25). Произведение $\hat{A}_i \hat{A}_j$ будет содержать различные произведения операторов излучения и поглощения, причём

$$\begin{aligned} \left(0 \left| \hat{C}_q \hat{C}_{q'} \right| 0 \right) &= \left(0 \left| \hat{C}_q^+ \hat{C}_{q'}^+ \right| 0 \right) = \left(0 \left| \hat{C}_q^+ \hat{C}_{q'} \right| 0 \right) = 0, \\ \left(0 \left| \hat{C}_q \hat{C}_{q'}^+ \right| 0 \right) &= \delta_{qq'}. \end{aligned} \quad 42$$

Это относится как к поперечным, так и к продольной и скалярной составляющим.

*) На возможность такого изображения движения позитрона впервые указал Г. А. Зисман⁵.

Для учёта хронологизирующего оператора P выпишем отдельно (41) для случаев $t_1 > t_2$ и $t_1 < t_2$:

$$\begin{aligned} \left(0 \left| P \left[\hat{A}_i(x_1) \hat{A}_j(x_2) \right] \right| 0 \right) &= \left(0 \left| \hat{A}_i(x_1) \hat{A}_j(x_2) \right| 0 \right) = \\ &= \sum_q A_{qi}(x_1) A_{qj}^*(x_2) \quad (t_1 > t_2), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \left(0 \left| P \left[\hat{A}_i(x_1) \hat{A}_j(x_2) \right] \right| 0 \right) &= \left(0 \left| \hat{A}_j(x_2) \hat{A}_i(x_1) \right| 0 \right) = \\ &= \sum_q A_{qi}^*(x_1) A_{qj}(x_2) \quad (t_1 < t_2). \end{aligned} \quad (43a)$$

Для A_q воспользуемся состояниями с определённым импульсом и поляризацией (25б). Тогда

$$\begin{aligned} \left(0 \left| P \left[\hat{A}_i(x_1) \hat{A}_j(x_2) \right] \right| 0 \right) &= \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{(d\mathbf{k})}{k} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - ik(t_1 - t_2)} \sum_{\mu} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu})_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu})_j \quad (t_1 > t_2), \\ &\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{(d\mathbf{k})}{k} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + ik(t_1 - t_2)} \sum_{\mu} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu})_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu})_j \quad (t_1 < t_2). \end{aligned} \right\} \quad (44) \end{aligned}$$

Согласно (26), (26a)

$$\sum_{\mu} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu})_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu})_j = g_{ij}. \quad (45)$$

(Здесь $g_{ij} = -1$ при $i = j \neq 0$; $g_{00} = 1$).

Подставив это в (44), получим:

$$\left(0 \left| P \left[\hat{A}_i(x_1) \hat{A}_j(x_2) \right] \right| 0 \right) = -g_{ij} D(x_1 x_2), \quad (46)$$

где

$$D(x_1 x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - ik(t_1 - t_2)} \frac{(d\mathbf{k})}{k}. \quad (46a)$$

(В (44) $e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}$ при интегрировании, произведя замену переменной $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, можно заменить на $e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}$.)

Произведение составляющих вектора-потенциала не является градиентно-инвариантным. Но при любом произвольном выборе постоянных λ_s в (29) выражение для

$$\left(0 \left| P \left[\hat{A}_i(x_1) \hat{A}_j(x_2) \right] \right| 0 \right)$$

будет отличаться от (46) слагаемым вида $\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_i \partial x_j}$ (где Λ — некоторая функция x_1 и x_2), которое даст в матрице $\hat{S}_2$ (40) интеграл

$$\int F_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_{1i} \partial x_{2j}} d^4 x_1 d^4 x_2,$$

где

$$F_{ij} = \left(n \left| P \left[\hat{j}_i(x_1) \hat{j}_j(x_2) \right] \right| n' \right).$$

Интегрированием по частям его можно свести к интегралу, содержащему $\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_i}$. В силу уравнения неразрывности для вектора плотности тока

$$\frac{\partial \hat{j}_i}{\partial x_i} = 0$$

таким же свойством будет обладать и F_{ij} . Тогда второй член в (46) можно отбросить. Мы не будем доказывать в общем виде, что

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_i} = 0; \quad \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (47)$$

(достаточно выполнения одного из этих условий). Во всех конкретных вычислениях легко убедиться, что (47) имеет место.

Выражению для D (46a) можно придать форму четырехмерного интеграла, откуда будет явствовать его инвариантность относительно преобразований Лоренца.

Рассмотрим для этого интеграл

$$I(\tau) = \int \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 - k^2} d\omega, \quad (48)$$

взятый в плоскости комплексной переменной ω по контуру, идущему вдоль вещественной оси и обходящему полюсы подынтегральной функции; $\omega_1 = k$ — сверху и $\omega_2 = -k$ — снизу (рис. 3, а). При $\tau > 0$ контур можно замкнуть по бесконечно большому полуокружности снизу.

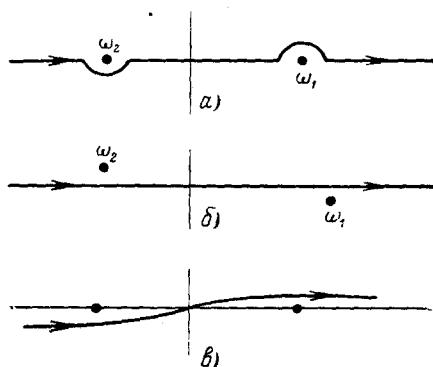


Рис. 3.

Тогда значение I определится вычетом в точке $\omega_1 = k$:

$$I(\tau) = -\pi i \frac{e^{-ik\tau}}{k} \quad (\tau > 0).$$

При $\tau < 0$ контур можно замкнуть по бесконечно большому полукругу сверху и будет играть роль вычет в точке $\omega_2 = -k$:

$$I(\tau) = -\pi i \frac{e^{+ik\tau}}{k} \quad (\tau < 0).$$

В обоих случаях

$$I(\tau) = -\pi i \frac{e^{-ik|\tau|}}{k}. \quad (48a)$$

Таким образом,

$$\frac{e^{-ik|t_1 - t_2|}}{k} = \frac{i}{\pi} I(t_1 - t_2) \quad (48b)$$

и (46a) примет следующий вид:

$$D(x_1 x_2) = \frac{i}{4\pi^3} \int e^{ik(r_1 - r_2) - \omega(t_1 - t_2)} \frac{(dk) d\omega}{k^2 - \omega^2} \quad (49)$$

или ⁶

$$D(x_1 x_2) = \frac{i}{4\pi^3} \int e^{iq(x_2 - x_1)} \frac{d^4 q}{q^2}. \quad (49a)$$

В (49) — $qx = \mathbf{kr} - \omega t$ и $q_0 = \omega$ является независимой переменной (не связанной с k). Условие обхода полюсов можно сформулировать несколько иначе. Будем рассматривать знаменатель в интеграле (49) как предел выражения $q^2 + i\delta$ при $\delta \rightarrow 0$, где δ — положительная величина. Тогда полюсы подинтегрального выражения сместятся, первый ($q_0 = k$) вниз, а второй ($q_0 = -k$) вверх (рис. 3, б), и интегрирование в (49) происходит по всем четырём переменным от $-\infty$ до ∞ . Из (49) очевидно, что D является инвариантом.

Обозначим усреднённую по вакууму фотонов матрицу $\hat{S}_2$

$$\hat{S}_2^{(e)} = \left(\Psi_0^{(r)*}, \hat{S}_2 \Psi_0^{(r)} \right). \quad (50)$$

Тогда из (40) и (46), при условии выполнения (47),

$$\hat{S}_2^{(e)} = -\frac{e^2}{2} \iint P \left[\hat{j}_i(x_1) \hat{j}_j(x_2) \right] D(x_1 x_2) d^4 x_1 d^4 x_2. \quad (50a)$$

В нерелятивистской квантовой механике взаимодействие частиц описывается потенциальной энергией, зависящей от расстояний их координат. Оператор потенциальной энергии взаимодей-

ствия в представлении метода вторичного квантования имеет вид

$$\iint \hat{\rho}(\mathbf{r}_1) \hat{\rho}(\mathbf{r}_2) U(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) (d\mathbf{r}_1) (d\mathbf{r}_2).$$

В электродинамике такого оператора нет. Электроны взаимодействуют не непосредственно, а через электромагнитное поле. Однако существует матрица столкновений, в первом приближении представленная оператором (50), играющая аналогичную роль. $S_2^{(e)}$ содержит только координаты электронов. Степени свободы электромагнитного поля исключены. Функцию U можно назвать функцией взаимодействия двух зарядов. В дальнейшем мы увидим, что в нерелятивистском приближении она действительно содержит оператор энергии взаимодействия двух зарядов (в частности закон Кулона).

6. ФУНКЦИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОНА С ФОТОНОМ

В качестве типичного недиагонального по отношению к фотонам матричного элемента $\hat{S}_2$ рассмотрим матричный элемент для столкновения электрона с фотоном:

$$(f'q' | S_2 | qf) = -\frac{e^2}{2} \iint (f' | P \left[\hat{j}_i(x_1) \hat{j}_j(x_2) \right] | f) \times \\ \times (q' | P \left[\hat{A}_i(x_1) \hat{A}_j(x_2) \right] | q) d^4x_1 d^4x_2 \quad (51)$$

(фотон переходит из состояния q в q' , электрон — из f в f').

От оператора $\hat{A}_i(x_1) \hat{A}_j(x_2)$, входящего в $\hat{S}_2$, в (51) войдут только члены, содержащие $C_q^\dagger C_q$.

Так как $C_q^\dagger$ коммутирует с C_q ($q \neq q'$), то оператор P несуществен и

$$(q' | P \left[\hat{A}_i(x_1) \hat{A}_j(x_2) \right] | q) = A_{qi}(x_1) A_{q'j}^*(x_2) + A_{qi}^*(x_1) A_{qj}(x_2). \quad (52)$$

Оператор произведения токов

$$\hat{j}_i(x_1) \hat{j}_j(x_2) = (\gamma_i)_{\alpha\beta} (\gamma_j)_{\alpha'\beta'} \hat{\psi}_\alpha(x_1) \hat{\psi}_\beta(x_1) \hat{\psi}_{\alpha'}(x_2) \hat{\psi}_{\beta'}(x_2)$$

($\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ — спинорные индексы, по которым подразумевается суммирование) состоит из произведений четырёх операторов испускания или поглощения электронов. Отличные от нуля матричные элементы дадут те члены, которые содержат $\hat{a}_f^\dagger$ и $\hat{a}_f$. Поэтому мы можем заменить один из операторов $\hat{\psi}(x)$ на $\hat{\psi}_f(x) = \hat{a}_f \hat{\psi}(x)$ и один из операторов $\hat{\bar{\psi}}(x)$ на $\hat{\bar{\psi}}_{f'}(x) = \hat{a}_f^\dagger \hat{\bar{\psi}}(x)$.

В остальных двух операторах $(\hat{\psi} \text{ и } \hat{\bar{\psi}})$ следует оставить лишь те члены, которые соответствуют испусканию и поглощению частицы в одном и том же состоянии,

$$\hat{\psi}_\alpha(x_1) \hat{\bar{\psi}}_\beta(x_2) = \sum_f \hat{a}_f \hat{a}_f^\dagger \psi_{f\alpha}(x_1) \bar{\psi}_{f\beta}(x_2).$$

Выражения, содержащие эти операторы с совпадающими аргументами, следует опустить, ибо соответствующие члены в (51) будут содержать:

$$\int \bar{\psi}_{f\alpha}(x) \psi_{f\beta}(x) A_{qi}(x) dt \sim \int e^{-ikt} dt = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P \left[\hat{j}_i(x_1) \hat{j}_j(x_2) \right] = \\ = (\gamma_i)_{\alpha\beta} (\gamma_j)_{\alpha'\beta'} P \left[\hat{\bar{\psi}}_{f'\alpha}(x_1) \hat{\psi}_\beta(x_1) \hat{\bar{\psi}}_{\alpha'}(x_2) \hat{\psi}_{f\beta'}(x_2) + \right. \\ \left. + \hat{\bar{\psi}}_\alpha(x_1) \hat{\psi}_{f\beta}(x_1) \hat{\bar{\psi}}_{f'\alpha'}(x_2) \hat{\psi}_{\beta'}(x_2) \right]. \quad (53) \end{aligned}$$

Равенство (53) следует понимать в том смысле, что операторы левой и правой частей дают тождественные матричные элементы (51). Два члена в (53) отличаются друг от друга лишь заменой аргументов x_1 на x_2 и наоборот, что соответствует перемене обозначений переменных в интеграле (51):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P \left[\hat{j}_i(x_1) \hat{j}_j(x_2) \right] = \\ = (\gamma_i)_{\alpha\beta} (\gamma_j)_{\alpha'\beta'} P \left[\hat{\bar{\psi}}_{f'\alpha}(x_1) \hat{\psi}_\beta(x_1) \hat{\bar{\psi}}_{\alpha'}(x_2) \hat{\psi}_{f\beta'}(x_2) \right]. \quad (53a) \end{aligned}$$

Это выражение можно привести к более простому виду. Заметим, что при $t_1 < t_2$ благодаря действию оператора P порядок множителей в (53a) станет следующим:

$$\hat{\bar{\psi}}_{\alpha'}(x_2) \hat{\psi}_{f\beta'}(x_2) \hat{\bar{\psi}}_{f'\alpha}(x_1) \hat{\psi}_\beta(x_1).$$

В силу того, что операторы

$$\hat{\psi}_f \text{ с } \hat{\bar{\psi}}_{f'} \quad (f \neq f'), \quad \hat{\psi}_f \text{ с } \hat{\psi} \quad \text{ и } \quad \hat{\bar{\psi}}_{f'} \text{ с } \hat{\bar{\psi}}$$

антикоммутируют, это выражение равно

$$- \hat{\bar{\psi}}_{f'\alpha}(x_1) \hat{\psi}_{\alpha'}(x_2) \hat{\bar{\psi}}_\beta(x_1) \hat{\psi}_{f\beta'}(x_2),$$

т. е. отличается от соответствующего выражения для случая $t_1 > t_2$ знаком и порядком внутренних множителей. Таким образом,

$$P \left[\hat{\psi}_{f'\alpha}(x_1) \hat{\psi}_\beta(x_1) \hat{\psi}_{\alpha'}(x_2) \hat{\psi}_{f\beta'}(x_2) \right] = \\ = \hat{\psi}_{f'\alpha} P' \left[\hat{\psi}_\beta(x_1) \hat{\psi}_{\alpha'}(x_2) \right] \hat{\psi}_{f\beta'}(x_2), \quad (54)$$

где

$$P' \left[\hat{X}(t_1) \hat{Y}(t_2) \right] = \begin{cases} \hat{X} \hat{Y} & \text{при } t_1 > t_2, \\ -\hat{Y} \hat{X} & \text{при } t_1 < t_2. \end{cases} \quad (54a)$$

Оператор $\hat{\psi}_f$ имеет единственный отличный от нуля матричный элемент

$$(0 | \hat{\psi}_f | f) = \psi_f,$$

а оператор $\hat{\psi}_{f'}$

$$(f' | \hat{\psi}_{f'} | 0) = \bar{\psi}_{f'}.$$

Поэтому

$$(f' | P \left[\hat{\psi}_{f'\alpha}(x_1) \hat{\psi}_\beta(x_1) \hat{\psi}_{\alpha'}(x_2) \hat{\psi}_{f\beta'}(x_2) \right] | f) = \\ = \bar{\psi}_{f'\alpha}(x_1) \psi_{f\beta'}(x_2) (0 | P' \left[\hat{\psi}_\beta(x_1) \hat{\psi}_{\alpha'}(x_2) \right] | 0). \quad (55)$$

Задача теперь сводится к нахождению «среднего по вакууму» от произведений электронных операторов, входящих в (55). Введём обозначения

$$K_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1 x_2) = (0 | P' \left[\hat{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \hat{\psi}_{\alpha_2}(x_2) \right] | 0). \quad (56)$$

(Мы будем употреблять обозначение $K(1, 2) \equiv K(x_1 \alpha_1; x_2 \alpha_2)$, подразумевая включёнными в аргументы спинорные операторы α_1, α_2 .) Оператор $\hat{S}_2$ можно теперь заменить оператором $\hat{S}_2^{(\gamma)}$ (в том смысле, что

$$(f' q' | \hat{S}_2 | q f) = (f' q' | \hat{S}_2^{(\gamma)} | q f), \quad (57)$$

где

$$\hat{S}_2^{(\gamma)} = -e^2 \iint \hat{\bar{\psi}}(1) \hat{A}_i(1) \gamma_i K(1, 2) \gamma_j \hat{A}_j(2) \hat{\psi}(2) d^4 x_1 d^4 x_2. \quad (57a)$$

Функцию $K(x_1\alpha_1; x_2\alpha_2)$ можно назвать функцией взаимодействия электрона с фотоном.

Легко видеть, что матрица $\hat{S}_2^I$ относится не только к рассеянию, но и к другим процессам, в которых фигурируют два электронных и два фотонных состояния, а именно:

излучению или поглощению двух фотонов

$$(f'q'q|S_2^I|f); \quad (f'|S_2^I|qq'f),$$

или превращению пары в два фотона

$$(qq'|S_2^I|fg),$$

и аналогичным.

Вернёмся к выражению для $K(1, 2)$ (56):

$$K(1, 2) = \begin{cases} (0|\hat{\psi}(1)\hat{\psi}(2)|0) \text{ при } t_1 > t_2, \\ -(0|\hat{\psi}(2)\hat{\psi}(1)|0) \text{ при } t_1 < t_2. \end{cases}$$

Подставим сюда разложение операторов $\hat{\psi}$ и $\hat{\bar{\psi}}$ (30a).

Отличные от нуля матричные элементы дадут те члены, которые содержат произведение оператора поглощения на оператор испускания частицы в том же состоянии, причём последний должен быть справа от первого. Поскольку $\hat{\psi}$ содержит операторы поглощения электронов и испускания позитронов, а $\hat{\bar{\psi}}$ — наоборот, то при $t_1 > t_2$ $K(1, 2)$ будет содержать только электронные операторы, а при $t_1 < t_2$ — только позитронные.

Получаем⁶

$$K(1, 2) = \begin{cases} \sum_f \phi_f(1) \bar{\psi}_f(2) & (t_1 > t_2), \\ -\sum_{-f} \psi_{-f}(1) \bar{\phi}_{-f}(2) & (t_1 < t_2), \end{cases} \quad (53)$$

где $\sum_f$ означает суммирование по состояниям с положительными

частотами, а $\sum_{-f}$ — по состояниям с отрицательными частотами.

Выражение (58) можно представить как решение неоднородного уравнения Дирака. Пусть $\hat{L}$ — оператор Дирака,

$$\hat{L} = \gamma_i (\hat{p}_i - e A_i^{(e)}) - m = \beta \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_D \right) \\ (\hat{H}_D = (\alpha \mathbf{p} + \beta m)), \quad (59)$$

действующий на переменные x_1, α_1 (x_2, α_2 будем рассматривать как параметры). Докажем, что $K(1, 2)$ есть решение уравнения

$$\hat{L}(1) K(1, 2) = i\delta(x_1 - x_2) \delta_{\alpha_1 \alpha_2}. \quad (60)$$

Пространственную часть четырёхмерной δ -функции

$$\delta(x_1 - x_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(t_1 - t_2)$$

представим, используя свойство полноты системы собственных функций оператора $\hat{H}_D$, в виде

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta_{\alpha_1 \alpha_2} = \sum_f \psi_f^0(\mathbf{r}_1 \alpha_1) \psi_f^{0*}(\mathbf{r}_2 \alpha_2) = \sum_f \bar{\psi}_f^0(\mathbf{r}_2 \alpha_2) \beta \psi_f^0(\mathbf{r}_1 \alpha_1),$$

где

$$\hat{H}_D \psi_f^0 = \varepsilon_f \psi_f^0, \quad \psi_f = \psi_f^0 e^{-i\varepsilon_f t};$$

суммирование проводится по всем состояниям (как с положительными, так и с отрицательными частотами). Временную часть δ -функции запишем как

$$\delta(t_1 - t_2) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega(t_1 - t_2)} d\omega.$$

Решение уравнения (60) будем искать в виде разложения

$$K(1, 2) = \int d\omega \sum_f C_{f\omega} \psi_f^0(\mathbf{r}_1 \alpha_1) e^{-i\omega t_1}.$$

Подставляя всё это в (60), получим:

$$\beta(\omega - \varepsilon_f) C_{f\omega} = \frac{i}{2\pi} \bar{\psi}_f^0(\mathbf{r}_2 \alpha_2) \beta e^{i\omega t_1}.$$

Так как оператор β не действует на переменную α_2 , то, умножив это уравнение на β , получим:

$$(\omega - \varepsilon_f) C_{f\omega} = \frac{i}{2\pi} \bar{\psi}_f^0(\mathbf{r}_2 \alpha_2) e^{i\omega t_1}$$

или

$$K(1, 2) = \frac{i}{2\pi} \sum_f \bar{\psi}_f^0(\mathbf{r}_2 \alpha_2) \psi_f^0(\mathbf{r}_1 \alpha_1) \int \frac{e^{-i\omega(t_1 - t_2)}}{\omega - \varepsilon_f} d\omega. \quad (61)$$

Установим следующее правило обхода полюсов, расположенных на вещественной оси в точках $\omega = \varepsilon_f$: на положительной оси контур проходит выше полюсов, на отрицательной — ниже полюсов (рис. 3, в). Тогда, замыкая контур по полукругу бесконечно большого радиуса книзу при $t_1 > t_2$ и кверху при $t_1 < t_2$, получаем (58).

Для свободного электрона нетрудно получить явное выражение $K(1,2)$. Для этого ищем решение уравнения (60) в виде интеграла Фурье

$$K(1,2) = \int K_f e^{-ifx_1} d^4 f \quad (62)$$

и, так как правая часть уравнения

$$i\delta(x_1 - x_2) \delta_{a_1 a_2} = \frac{i\delta_{a_1 a_2}}{(2\pi)^4} \int e^{if(x_2 - x_1)} d^4 f,$$

то

$$(\gamma f - m) K_f = \frac{i\delta_{a_1 a_2}}{(2\pi)^4} e^{ifx_1}. \quad (62a)$$

Умножив это равенство слева на

$$(\gamma f + m),$$

получаем, ввиду того, что

$$\begin{aligned} (f\gamma + m)(f\gamma - m) &= f^2 - m^2, \\ K_f &= \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\gamma f + m}{f^2 - m^2} e^{ifx_2}, \end{aligned} \quad (62b)$$

т. е.

$$(K_f)_{a_1 a_2} = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{e^{ifx_2}}{f^2 - m^2} (\gamma f + m)_{a_1 a_2}.$$

Подставляя в (62), получаем:

$$K(1,2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{(\gamma f + m)}{f^2 - m^2} e^{-if(x_1 - x_2)} d^4 f. \quad (63)$$

Это можно переписать также в форме

$$K(1,2) = \frac{1}{4\pi} \hat{\Delta}(x_1, x_2), \quad (64)$$

где

$$\Delta(x_1, x_2) = \frac{i}{4\pi^3} \int \frac{e^{-if(x_1 - x_2)}}{f^2 - m^2} d^4 f \quad (64a)$$

переходит в выражение (49) для $D(x_1, x_2)$ при $m = 0$. Подынтегральные выражения (63) и (64a) содержат два полюса:

$$f_0 = \pm \sqrt{p^2 - m^2}.$$

Контур интегрирования совпадает с контуром рис. 3, а. Его можно считать совпадающим с вещественной осью, если заменить m^2 на $m^2 - i\delta$. Если определить обратный оператор Дирака

$$(\gamma f - m)^{-1} = \frac{\gamma f + m}{f^2 - m^2}, \quad (65)$$

то (63) можно записать также в форме⁶

$$K(1,2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int (\gamma f - m)^{-1} e^{-if(x-x_2)} d^4 f. \quad (66)$$

К формуле (63) можно прийти и непосредственно из (58). После подстановки в качестве ψ_f плоских волн (58) даст

$$K(1,2) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(2\pi)^3} \int (d\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - i\sqrt{p^2 + m^2}(t_1 - t_2)} \times \\ \quad \times \sum_{\mu+} (u_{\mathbf{p}\mu+})_{\alpha_1} (\bar{u}_{\mathbf{p}\mu+})_{\alpha_2} \quad (t_1 > t_2), \\ - \frac{1}{(2\pi)^3} \int (d\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + i\sqrt{p^2 + m^2}(t_1 - t_2)} \times \\ \quad \times \sum_{\mu-} (u_{\mathbf{p}\mu-})_{\alpha_1} (\bar{u}_{\mathbf{p}\mu-})_{\alpha_2} \quad (t_1 < t_2), \end{array} \right\} \quad (67)$$

где $u_{\mathbf{p}\mu}$ — единичные спинорные амплитуды, знак $\sum_{\mu+}$ означает суммирование по амплитудам положительных частот, а $\sum_{\mu-}$ — отрицательных. Для суммирования можно воспользоваться тем, что, поскольку

$$\begin{aligned} (\gamma \mathbf{p} + \gamma_0 \sqrt{p^2 + m^2}) u_{\mathbf{p}\mu\pm} &= -m u_{\mathbf{p}\mu\pm}, \\ \bar{u}_{\mathbf{p}\mu\pm} (\gamma \mathbf{p} + \gamma_0 \sqrt{p^2 + m^2}) &= -m \bar{u}_{\mathbf{p}\mu\pm}, \end{aligned}$$

то можно, заменив $u_{\mathbf{p}\mu}$ на

$$u_{\mathbf{p}\mu} = \frac{m \pm \gamma_0 \sqrt{p^2 + m^2} - \gamma \mathbf{p}}{2m} u_{\mathbf{p}\mu}, \quad (68a)$$

производить суммирование по полной системе собственных функций оператора

$$\gamma \mathbf{p} + \gamma_0 \sqrt{p^2 + m^2},$$

имеющего кроме собственного значения $-m$ ещё собственное значение $+m$. Это даёт:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu\pm} (u_{\mathbf{p}\mu\pm})_{\alpha_1} (\bar{u}_{\mathbf{p}\mu\pm})_{\alpha_2} = \\ &= \sum_{\mu\pm} \sum_{\alpha} (\bar{u}_{\mathbf{p}\mu\pm})_{\alpha_2} (u_{\mathbf{p}\mu\pm})_{\alpha} \frac{(m \pm \gamma_0 \sqrt{p^2 + m^2} + \gamma \mathbf{p})_{\alpha_1 \alpha}}{2m}. \end{aligned} \quad (68b)$$

Далее, так как

$$u^* u = \bar{u} \beta u = 1,$$

то

$$\sum_{\mu \pm} (\bar{u}_{\mathbf{p}\mu \pm})_{\alpha} (u_{\mathbf{p}\mu \pm})_{\alpha} = \pm \frac{m}{\sqrt{p^2 + m^2}} \delta_{\alpha\alpha}. \quad (68\text{в})$$

После этого

$$K(1,2) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int - \frac{\gamma \mathbf{p} + m \pm \gamma_0 \sqrt{p^2 + m^2}}{\sqrt{p^2 + m^2}} \times \\ \times e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mp i \sqrt{p^2 + m^2} (t_1 - t_2)} (d\mathbf{p}) \quad (t_1 \geq t_2). \quad (69)$$

Аналогично (48)

$$- \frac{\gamma \mathbf{p} + m \pm \gamma_0 \sqrt{p^2 + m^2}}{\sqrt{p^2 + m^2}} e^{-i \sqrt{p^2 + m^2} |t_1 - t_2|} = \\ = \frac{i}{\pi} \int \frac{-\gamma \mathbf{p} + m + \gamma_0 \omega}{f^2 + m^2 - \omega^2} e^{-i\omega(t_1 - t_2)} d\omega, \quad (70)$$

где интеграл берётся по контуру рис. 3, а, что приводит к (63).

7. ПРОЦЕССЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Матрица столкновений первого порядка $\hat{S}_1$ содержит элементы, относящиеся к процессам, в которых меняется одно фотонное и два электронных состояния (вместо изменения фотонного состояния может рассматриваться действие внешнего поля). Матрица второго порядка содержит элементы двух типов: соответствующих изменению четырёх электронных состояний без изменения фотонных состояний и изменению двух электронных и двух фотонных состояний. Первые содержатся в матрице $\hat{S}_2^e$ (50а), вторые — в матрице $\hat{S}_2^f$ (57а).

Суть метода, изложенного в разделах 5—6, сводится к тому, что матрица столкновений приводится к такой форме, что в ней фигурируют только начальные и конечные состояния. «Промежуточные состояния» исключены и заменены функциями взаимодействия.

В (50а) будут входить те члены из произведения $\hat{j}_i(x_1)\hat{j}_i(x_2)$, которые содержат операторы испускания или поглощения, относящиеся все к различным состояниям. Поэтому эти члены антикоммутируют между собой, а их попарные произведения коммутируют, так что для рассматриваемых процессов

$$\hat{j}_i(x_1)\hat{j}_i(x_2) = \hat{j}_i(x_2)\hat{j}_i(x_1)$$

и оператор P в (50a) можно опустить:

$$\begin{aligned}\hat{S}_2^e &= -\frac{e^2}{2} \int \int \hat{j}_i(x_1) D(x_1 x_2) \hat{j}_i(x_2) d^4 x_1 d^4 x_2 = \\ &= -\frac{e^2}{2} \int \int \hat{\psi}(1) \hat{\gamma}_i \hat{\psi}(1) D(x_1 x_2) \hat{\psi}(2) \hat{\gamma}_i \hat{\psi}(2) d^4 x_1 d^4 x_2. \quad (71)\end{aligned}$$

Пусть a, b, c, d — квантовые числа четырёх участвующих в процессе электронных состояний, причём b и d относятся к начальным (или конечным позитронным), а a и c — к конечным (или начальным позитронным) состояниям. Тогда

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_a(x_1) \hat{\psi}_b(x_1) \hat{\psi}_c(x_2) \hat{\psi}_d(x_2) &= \hat{\psi}_{a\alpha}(x_1) \hat{\psi}_{b\beta}(x_1) \hat{\psi}_{c\gamma}(x_2) \hat{\psi}_{d\delta}(x_2) + \\ &+ \hat{\psi}_{c\alpha}(x_1) \hat{\psi}_{d\beta}(x_1) \hat{\psi}_{a\gamma}(x_2) \hat{\psi}_{b\delta}(x_2) + \hat{\psi}_{a\alpha}(x_1) \hat{\psi}_{d\beta}(x_1) \hat{\psi}_{c\gamma}(x_2) \hat{\psi}_{b\delta}(x_2) + \\ &+ \hat{\psi}_{c\alpha}(x_1) \hat{\psi}_{b\beta}(x_1) \hat{\psi}_{a\gamma}(x_2) \hat{\psi}_{d\delta}(x_2) \quad (72)\end{aligned}$$

или, используя антикоммутацию всех множителей и располагая во всех членах операторы рождения и поглощения в одинаковом порядке,

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_a(x_1) \hat{\psi}_b(x_1) \hat{\psi}_c(x_2) \hat{\psi}_d(x_2) &= \hat{\psi}_{a\alpha}(x_1) \hat{\psi}_{b\beta}(x_1) \hat{\psi}_{c\gamma}(x_2) \hat{\psi}_{d\delta}(x_2) + \\ &+ \hat{\psi}_{a\gamma}(x_2) \hat{\psi}_{b\delta}(x_2) \hat{\psi}_{c\alpha}(x_1) \hat{\psi}_{d\beta}(x_1) - \hat{\psi}_{a\alpha}(x_1) \hat{\psi}_{b\delta}(x_2) \hat{\psi}_{c\gamma}(x_2) \hat{\psi}_{d\beta}(x_1) - \\ &- \hat{\psi}_{a\gamma}(x_2) \hat{\psi}_{b\beta}(x_1) \hat{\psi}_{c\alpha}(x_2) \hat{\psi}_{d\delta}(x_2). \quad (72a)\end{aligned}$$

В последнем выражении второй член от первого и четвёртый от третьего отличаются лишь заменой переменных $x_1 \leftrightarrow x_2$; $\alpha \leftrightarrow \gamma$; $\beta \leftrightarrow \delta$. Так как функция $D(x_1 x_2)$ симметрична относительно своих аргументов, то при подстановке в интеграл (71) соответствующие члены дадут тождественные результаты.

Таким образом,

$$\begin{aligned}(\dots | S_2^e | \dots) &= -e^2 \int \int d^4 x_1 d^4 x_2 \{ \bar{\psi}_a(1) \hat{\gamma}_i \psi_b(1) D(12) \bar{\psi}_c(2) \hat{\gamma}_i \psi_d(2) - \\ &- \bar{\psi}_a(1) \hat{\gamma}_i \psi_d(1) D(12) \bar{\psi}_c(2) \hat{\gamma}_i \psi_b(2) \}. \quad (73)\end{aligned}$$

Матричные элементы (73) можно изобразить графически по тому же принципу, как это делалось на рис. 2 для $\hat{S}_1$. Поскольку теперь интеграл содержит две переменные 1 и 2, диаграмма будет включать две узловые точки. От каждой отходят две электронные линии. Вместо потенциалов, отвечающих фотону, (73) содержит функцию взаимодействия $D(12)$ от двух переменных. На диаграмме она изображается пунктирной линией, соединяющей узловые точки. Двум слагаемым в (73) будут соответствовать две диаграммы, отвечающие одному процессу. На рис. 4 приведены

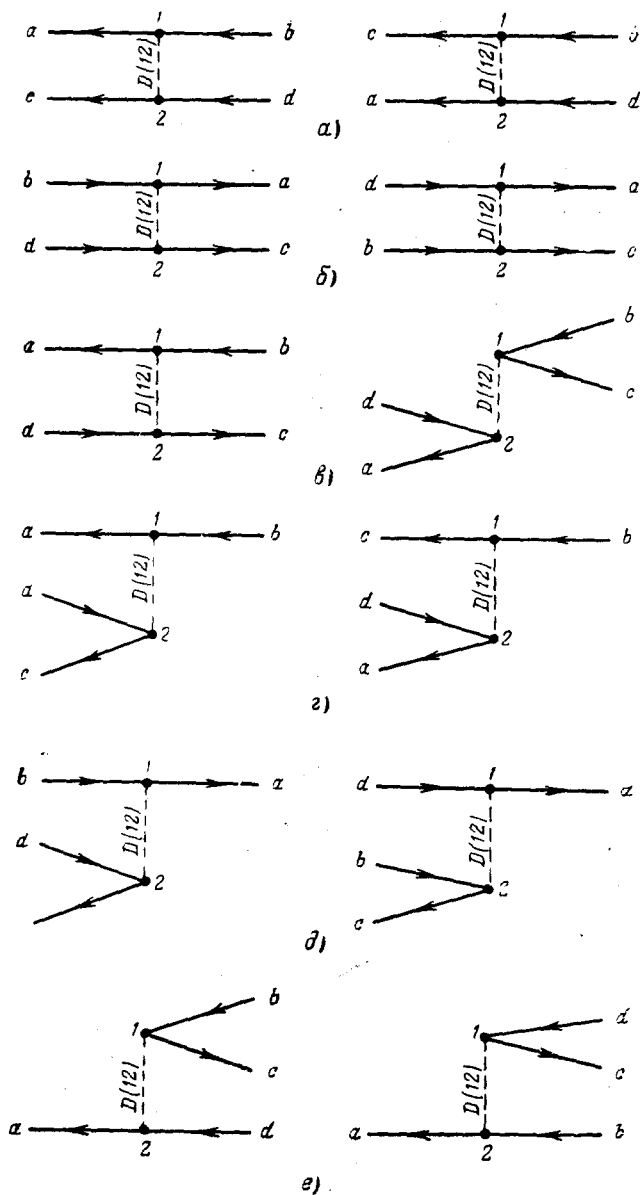


Рис. 4. а) — рассеяние электрона электроном (также эффект Оже); б) — рассеяние позитрона позитроном; в) — рассеяние позитрона электроном; г) — образование пары электроном; д) — образование пары позитроном; е) — поглощение пары без излучения.

диаграммы, изображающие матричные элементы различных процессов, описываемых формулой (73). Процессы, изображённые на рисунках 4, *г*, 4, *е*, в силу законов сохранения невозможны для свободных частиц.

Матрица (71) описывает также взаимодействие двух зарядов различной природы, например электрона и протона. В этом случае $\hat{j}(1)$ относится к одной частице, а $\hat{j}(2)$ — к другой, операторы от различных аргументов между собой коммутируют. Пусть, например, a и b относятся к протону, а c и d — к электрону. В (72) и (72а) остаются только первые два члена. Вторые два, выражающие «обменные эффекты», отсутствуют ввиду нетождественности частиц. В (73) теперь останется только первый член (с изменённым знаком, соответственно различию знаков заряда электрона и протона)

$$(\cdots | S_2^e | \cdots) = -e^2 \int \int d^4x_1 d^4x_2 (\bar{\psi}_a(1) \gamma_i \psi_b(1)) D(1,2) (\bar{\psi}_c(2) \gamma_i \psi_d(2)). \quad (73a)$$

Процесс перехода протона в ядре из высшего энергетического состояния в низшее с передачей энергии электрону атомной оболочки или с образованием электронно-позитронной пары, называется внутренней конверсией γ -лучей. На рис. 5 изображены диаграммы процессов взаимодействия электрона с протоном, соответствующие матрице (73а). Протонные линии в отличие от электронных изображены более жирными линиями.

Матрица S_2^e содержит по одному

оператору $\hat{\psi}$ и $\hat{\bar{\psi}}$ и два оператора $\hat{A}$. Пусть квантовые числа начального состояния электрона (или конечного позитрона) есть a , а конечного (или начального позитрона) — b , а квантовые числа фотонных состояний, участвующих в процессе, c и d . Тогда из разложе-

ния оператора $\hat{\psi}$ мы должны взять член $\hat{\psi}_a$, а из $\hat{\bar{\psi}}$ — член $\hat{\bar{\psi}}_b$. Каждый из двух фотонных операторов содержит операторы, соответствующие поглощению

или испусканию фотонов в состояниях c и d : $\hat{A}_c$ и $\hat{A}_d$, причём эти операторы коммутируют.

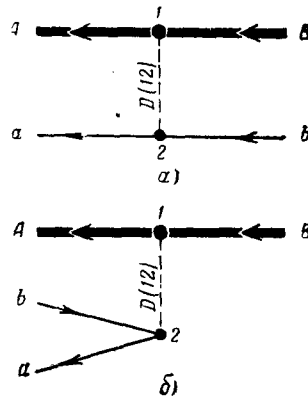


Рис. 5. а) — 1) — внутренняя конверсия γ -лучей на электронной оболочке; 2) — рассеяние электрона на протоне; б) — внутренняя конверсия с образованием пары.

Поэтому

$$(\cdots | S_2 | \cdots) = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ \bar{\psi}_a(1) A'_{ai}(1) \gamma_i K(1,2) \gamma_j A'_{aj}(2) \times \right. \\ \left. \times \psi_b(2) + \bar{\psi}_a(1) A'_{ai}(1) \gamma_i K(1,2) \gamma_j A'_{cj}(2) \psi_b(2) \right\}. \quad (74)$$

Здесь вектор-потенциалы фотонных состояний суть $A'_c = A_c$, если c — начальное состояние, и $A'_d = A_d^*$, если c — конечное состояние (то же для A_d). Формула (74) справедлива и для процессов с участием внешнего поля. В этом случае A'_e или A'_d есть внешний потенциал $A^{(e)}$.

Матричные элементы (74) также изображаются диаграммами⁶, содержащими две узловые точки, соответственно двум переменным. От каждой точки отходит одна электронная линия и одна фотонная (или линия внешнего поля). Функция взаимодействия $K(12)$ изображается сплошной линией, соединяющей две узловые точки. Двум членам в (74) соответствуют две диаграммы, совокупность которых изображает данный процесс. На рис. 6 изображены диаграммы процессов, описываемых матрицей (74).

Заметим, что матричные элементы с внешним полем (рис. 6, b — d) относятся к тем же процессам, которые содержались в матрице первого порядка $\hat{S}_1$ (раздел 1, рис. 2, a), b), $ж$), $з$)). Разница состоит в том, что внешнее поле включено в волновые функции электрона (при отсутствии внешнего поля, как отмечалось в разделе 4, эти матричные элементы обращаются в 0), а здесь оно рассматривается как возмущение. Сравним, для примера, матричные элементы диаграмм 6, b) и 2, a). Для первого из (74) получаем ($b = f$; $a = f'$; $e = q$):

$$(qf' | S_2 | f) = -e^2 \int \bar{\psi}_{f'}(1) [\gamma_i A_{qi}(1) K(12) \gamma_j A_q^{(e)}(2) + \\ + A_i^e(1) \gamma_i K(12) \gamma_j A_{qj}^*(2)] \psi_f(2) d^4x_1 d^4x_2, \quad (75)$$

для второго (36)

$$(qf' | S_1 | f) = -ie \int \bar{\psi}_{f'}(1) A_{qi}^*(1) \gamma_i \psi_f'(1) d^4x_1. \quad (75a)$$

В (75a) волновые функции электрона снабжены штрихом, чтобы отметить то обстоятельство, что они учитывают внешнее поле; в (75) входят волновые функции свободного электрона. Пусть

$$\psi_f' = \psi_f + \psi_f^{(e)}, \quad (76)$$

где $\psi_f^{(e)}$ — та часть волновой функции электрона, которая отличает

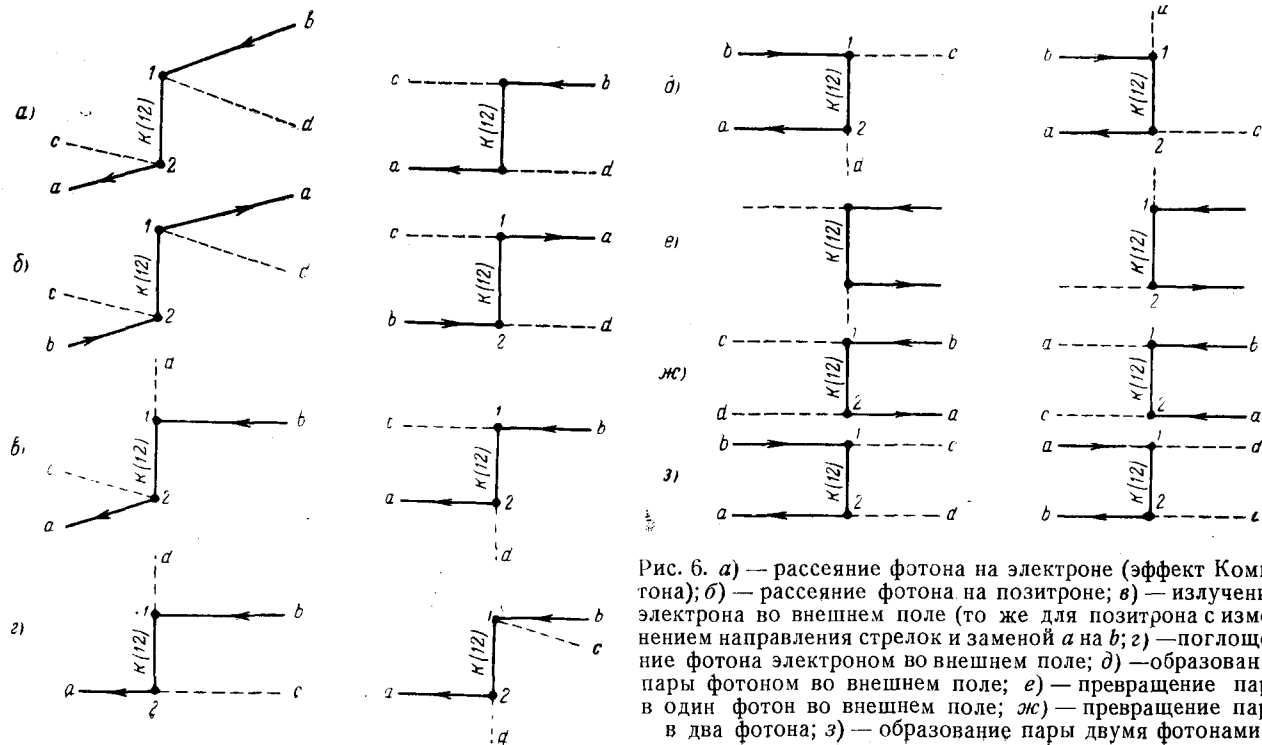


Рис. 6. а) — рассеяние фотона на электроне (эффект Комптона); б) — рассеяние фотона на позитроне; в) — излучение электрона во внешнем поле (то же для позитрона с изменением направления стрелок и заменой а на б; г) — поглощение фотона электроном во внешнем поле; д) — образование пары фотоном во внешнем поле; е) — превращение пары в один фотон во внешнем поле; ж) — превращение пары в два фотона; з) — образование пары двумя фотонами.

её от волновой функции свободной частицы. Тогда, подставив (76) в (75а) и сравнивая с (75), мы можем получить $\psi_f^{(e)}$ в первом, по отношению к внешнему полю, приближении. Учитывая, что (75б) обращается в 0 при замене $\bar{\psi}_{f'}$ на $\bar{\psi}_{f'}$ и ψ_f на ψ_f , находим⁶:

$$\psi_f^{(e)}(2) = -ie \int K(12) \gamma_i A^{(e)}(2) \psi_f(2) d^4 x_2 \quad (77)$$

и, аналогично,

$$\bar{\psi}_{f'}^{(e)}(1) = -ie \int \bar{\psi}_{f'}(2) \gamma_i A^{(e)}(2) K(21) d^4 x_2.$$

8. ПРИМЕРЫ

Разберём кратко в качестве примера приложения формулы матрицы столкновения двух электронов (73). Рассмотрим столкновение двух свободных электронов. Пусть f_b , f_a 4-импульсы начальных состояний, а f_a и f_c — конечных.

Их волновые функции

$$\psi_a = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u_a e^{i f_a x},$$

где u_a — спинорная амплитуда; аналогично для всех остальных состояний. Для функции взаимодействия D воспользуемся выражением (49). Тогда (73) даст:

$$\begin{aligned} (f_a f_c | S_2^e | f_b f_a) = & \\ = \frac{-ie^2}{4\pi^3 (2\pi)^3} \int \frac{d^4 q}{q^2} \{ (\bar{u}_a \gamma_i u_b) (\bar{u}_c \gamma_i u_d) \int e^{-i(f_b - f_a + q) x_1} d^4 x_1 \times & \\ \times \int e^{-i(f_d - f_c + q) x_2} d^4 x_2 - (\bar{u}_a \gamma_i u_d) (\bar{u}_c \gamma_i u_b) \times & \\ \times \int e^{-i(f_d - f_a + q) x_1} d^4 x_1 \int e^{-i(f_b - f_c - q) x_2} d^4 x_2 \}. & \quad (78) \end{aligned}$$

Интегрируем сначала по координатам

$$\int e^{-i(f_b - f_a + q) x_1} d^4 x_1 = (2\pi)^4 \delta(f_b - f_a + q)$$

(и аналогично другие), а затем по q . Получаем:

$$\begin{aligned} (f_a f_c | S_2^e | f_b f_a) = \frac{ie^2}{\pi} \left\{ \frac{(\bar{u}_a \gamma_i u_b) (\bar{u}_c \gamma_i u_d)}{(f_a - f_b)^2} - \frac{(\bar{u}_a \gamma_i u_d) (\bar{u}_c \gamma_i u_b)}{(f_a - f_d)^2} \right\} \times & \\ \times \delta(f_a + f_c - f_b - f_d). & \quad (79) \end{aligned}$$

Если пространственная составляющая 4-импульса (импульс) есть $\mathbf{p}$, а временная (энергия) — ε , то

$$\delta(f_a + f_c - f_b - f_d) = \delta(\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_c - \mathbf{p}_b - \mathbf{p}_d) \delta(\varepsilon_a + \varepsilon_c - \varepsilon_b - \varepsilon_d).$$

Согласно (22) матричный элемент эффективной энергии возмущения

$$(f_a f_c | U | f_b f_d) = \frac{e^2}{2\pi^2} \left\{ \frac{(\bar{u}_a \gamma_i u_b)(\bar{u}_c \gamma_i u_d)}{(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b)^2 - (\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2} - \frac{(\bar{u}_a \gamma_i u_d)(\bar{u}_c \gamma_i u_b)}{(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_d)^2 - (\varepsilon_a - \varepsilon_d)^2} \right\} \times \\ \times \delta(\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_c - \mathbf{p}_b - \mathbf{p}_d). \quad (80)$$

Формула (80) позволяет по обычным правилам определить эффективное сечение рассеяния электрона на электроном (формула Мёллера). Та же формула определяет рассеяние позитрона на электроном, если попрежнему $\mathbf{p}_b$ — начальный и $\mathbf{p}_a$ — конечный импульсы электрона, но $-\mathbf{p}_c$ — начальный импульс позитрона, а $-\mathbf{p}_d$ — его конечный импульс ($\mathbf{p}_c$ и $\mathbf{p}_d$ — импульсы соответствующих состояний электрона с отрицательными частотами).

Преобразуем теперь (73) к несколько иному виду. Пусть

$$\psi_a(x) = \varphi_a(\mathbf{r}) e^{-i\varepsilon_a t}$$

(и аналогично для других состояний). φ_a может относиться к состоянию электрона в произвольном внешнем поле, ε_a — энергия соответствующего стационарного состояния.

$$(ac | S_2 | bd) = \frac{ie^2}{4\pi^3} \iint (\bar{\varphi}_a(\mathbf{r}_1) \gamma_i \varphi_b(\mathbf{r}_2)) (\bar{\varphi}_c(\mathbf{r}_2) \gamma_i \varphi_d(\mathbf{r}_2)) (d\mathbf{r}_1) (d\mathbf{r}_2) \times \\ \times \int (d\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \int \frac{d\omega}{k^2 - \omega^2} \int e^{i(\varepsilon_a - \varepsilon_b - \omega)t_1} dt_1 \int e^{i(\varepsilon_c - \varepsilon_d + \omega)t_2} dt_2 - \\ - \frac{ie^2}{4\pi^3} \iint (\bar{\varphi}_a(\mathbf{r}_1) \gamma_i \varphi_d(\mathbf{r}_1)) (\bar{\varphi}_c(\mathbf{r}_2) \gamma_i \varphi_b(\mathbf{r}_2)) (d\mathbf{r}_1) (d\mathbf{r}_2) \int (d\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \times \\ \times \int \frac{d\omega}{k^2 - \omega^2} \int e^{i(\varepsilon_a - \varepsilon_d - \omega)t_1} dt_1 \int e^{i(\varepsilon_c - \varepsilon_b + \omega)t_2} dt_2. \quad (81)$$

Выполним интегрирование сначала по t_1 и t_2 :

$$\int e^{i(\varepsilon_a - \varepsilon_b - \omega)t_1} dt_1 = 2\pi \delta(\varepsilon_a - \varepsilon_b - \omega).$$

Затем интегрируем по ω :

$$\int \delta(\varepsilon_a - \varepsilon_b - \omega) \delta(\varepsilon_c - \varepsilon_d + \omega) \frac{d\omega}{k^2 - \omega^2} = \\ = \frac{1}{k^2 - (\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2} \delta(\varepsilon_a + \varepsilon_c - \varepsilon_b - \varepsilon_d)$$

и, наконец, по $\mathbf{k}$:

$$\int \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}}{k^2 - (\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2} (d\mathbf{k}) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin k |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \cdot k dk}{k^2 - (\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2} = 2\pi^2 \frac{e^{i|\varepsilon_a - \varepsilon_b| |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

В последнем интеграле полюс подинтегрального выражения

$$k = |\varepsilon_a - \varepsilon_b|$$

обходится согласно правилу рис. 2. Подставляя результаты этих интегрирований и переходя, по (22), к матричному элементу эффективной энергии возмущения, получим:

$$(ac|U|bd) = e^2 \iint (d\mathbf{r}_1)(d\mathbf{r}_2) \left\{ [\bar{\varphi}_a(\mathbf{r}_1) \gamma_i \varphi_b(\mathbf{r}_1)] [\bar{\varphi}_c(\mathbf{r}_2) \gamma_i \varphi_d(\mathbf{r}_2)] \times \right. \\ \left. \times \frac{e^{i|\varepsilon_a - \varepsilon_b| |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - [\bar{\varphi}_a(\mathbf{r}_1) \gamma_i \varphi_d(\mathbf{r}_1)] [\bar{\varphi}_b(\mathbf{r}_2) \gamma_i \varphi_c(\mathbf{r}_2)] \frac{e^{i|\varepsilon_a - \varepsilon_d| |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right\}. \quad (82)$$

Выражение (82) имеет простой смысл запаздывающего взаимодействия двух зарядов. Первый член в (82) можно записать как

$$\int (j_i(\mathbf{r}_1))_{ab} (A_i(\mathbf{r}_1))_{cd} (d\mathbf{r}_1), \quad (82a)$$

где $(j_i)_{ab} = e \bar{\varphi}_a \gamma_i \varphi_b$ плотность «тока перехода», а $(A_i)_{cd}$ — запаздывающие потенциалы, созданные вторым электроном:

$$(A_i(\mathbf{r}_1))_{cd} = e \int \frac{(j_i(\mathbf{r}_2))_{cd}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} e^{ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} (d\mathbf{r}_2), \quad (82b)$$

$$(k = |\varepsilon_c - \varepsilon_d|).$$

Наличие «фактора запаздывания» $e^{i|\varepsilon_a - \varepsilon_b| |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$, явно содержащего начальное и конечное состояния электронов, не позволяет ввести «истинный» оператор энергии взаимодействия, т. е. оператор, действующий на пространственные и спинные переменные электронных функций, матричным элементом которого являлся бы (82). При малых скоростях частиц, однако, такой оператор существует с точностью до $\frac{v^2}{c^2}$. Его можно получить, разлагая в (82) в ряд фактор запаздывания (формула Брейта). Главным членом оператора является кулоновский

$$\frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

Формула (82) относится также к взаимодействию электрона с позитроном. При этом c есть конечное, а d — начальное состояние позитрона, а $-\varepsilon_c = |\varepsilon_c|$ — его энергия (то же для ε_d). (Изменение знака взаимодействия получится автоматически ввиду того,

что теперь $\hat{\psi}_c$ содержит оператор испускания, а $\hat{\psi}_d$ — оператор поглощения, которые антикоммутируют.) Второй член в (82) выражает их обменное (т. е. связанное с возможностью аннигиляции; см. вторую диаграмму 4, в) взаимодействие. В приближении с точностью до $\frac{v^2}{c^2}$

$$\varepsilon_a - \varepsilon_d = 2m$$

и оператор обменного взаимодействия электрона с позитроном есть

$$\frac{e^2 i \gamma_1 - \gamma_2 / \lambda_0}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

($\lambda_0 = \frac{1}{m}$ — комптоновская длина волны электрона).

Формула (82) (если в ней, как указывалось в разделе 7, опустить второй член, соответственно (73а)) описывает взаимодействие электрона с протоном.

Матричный элемент

$$(aA|U|bB) = e^2 \int \bar{\psi}_A(\mathbf{r}_1) \gamma_i \psi_B(\mathbf{r}_1) (d\mathbf{r}_1) \times \\ \times \int \bar{\psi}_a(\mathbf{r}_2) \gamma_i \psi_b(\mathbf{r}_2) \frac{e^{i|\varepsilon_a - \varepsilon_b| |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} (d\mathbf{r}_2), \quad (82a)$$

где A и B относятся к протону, а a и b — к электрону, является исходным для теории внутренней конверсии γ -лучей и теории возбуждения ядер электронами.

Для иллюстрации применения функции взаимодействия электрона и фотона рассмотрим матричный элемент для процесса рассеяния фотона на свободном электроном. Пусть волновая функция начального состояния электрона:

$$\frac{u^0}{(2\pi)^{3/2}} e^{i f x^0}$$

и конечного:

$$\frac{u'}{(2\pi)^{3/2}} e^{i f' x};$$

вектор-потенциал начального состояния:

$$\frac{e_i^0}{2\pi} e^{i q^0 x}$$

и конечного:

$$\frac{e'_i}{2\pi} e^{iq'x}.$$

Тогда, согласно (57а), (52) и (63),

$$\begin{aligned} (f'q'|S_2|f^0q^0) = & \frac{-ie^2}{(2\pi)^4(2\pi)^3(2\pi)^2} \int d^4f \left\{ \frac{\bar{u}' e'_i \gamma_i (\gamma f + m) \gamma_j e_j^0 u^0}{f^2 - m^2} \times \right. \\ & \times \int e^{i(f^0 - q' + f)x_1} d^4x_1 \int e^{i(-f' + q^0 - f)x_2} d^4x_2 + \\ & + \frac{u' e_i^0 \gamma_i (\gamma f + m) \gamma_j e'_j u^0}{f^2 - m^2} \int e^{i(f^0 + q^0 + f)x_1} d^4x_1 \times \\ & \left. \times \int e^{i(-f' - q' - f)x_2} d^4x_2 \right\} \quad (83) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (f'q'|U|f^0q^0) = & \frac{e^2}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\bar{u}' e'_i \gamma_i [\gamma(q' - f^0) + m] \gamma_j e_j^0 u^0}{(q' - f^0)^2 - m^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{u}' e_i^0 \gamma_i [\gamma(q' + f') + m] \gamma_j e'_j u^0}{(q' + f')^2 - m^2} \right\} \delta(p^0 + k^0 - p' - k'). \quad (84) \end{aligned}$$

9. ПРОЦЕССЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Нахождение матричных элементов высших порядков для тех процессов, для которых данный порядок является первым не обращающимся в 0 приближением, не требует, в принципиальном отношении, ничего нового по сравнению с предыдущим. Подинтегральное выражение в случае матрицы n -го порядка будет содержать, согласно (19) и (24), $2n$ электронных операторов (n операторов $\hat{\psi}$ и n операторов $\hat{\bar{\psi}}$) и n фотонных операторов (некоторые из них могут заменяться внешними потенциалами) от переменных $x_1 \dots x_n$. Соответственно этому матричный элемент изображается диаграммами, состоящими из n узловых точек, в каждой из которых пересекаются две сплошные и одна пунктирная линия.

Из $2n$ электронных операторов некоторое число k пар ($\hat{\psi}$ и $\hat{\bar{\psi}}$) соответствует начальным и конечным состояниям (направленные лучи, входящие или выходящие к краям диаграммы). Аналогично некоторое количество фотонных операторов соответствует начальным или конечным состояниям фотонов (пунктирные линии у кон-

цов диаграммы; к этой же категории относятся внешние потенциалы). Остальные электронные и фотонные операторы могут быть объединены в пары, соответствующие излучению и поглощению электрона (или фотона) в произвольных состояниях, по которым производится суммирование («вакуумные операторы»). Этим парам на диаграмме сопоставляется сплошная (для электронов) или пунктирная (для фотонов) линии, соединяющие две узловых точки. Примеры диаграмм процессов высших порядков приведены на рис. 7. Структура диаграммы всегда будет такой, что в ней отсутствуют «замкнутые петли», т. е. такие последовательности пар электронных операторов, которые начинаются и заканчиваются на одной и той же переменной. Наличие такой петли указывает на то, что для рассматриваемого процесса имеются отличные от 0 элементы в матрице столкновений более низкого порядка. Исключением является случай отсутствия электронов как в начальном, так и в конечном состояниях (например, рассеяние фотона фотоном). Существенное упрощение для вычисления матричного элемента возникает благодаря тому обстоятельству, что все входящие в его выражение электронные операторы, кроме операторов, входящих в одну пару, можно считать антикоммутирующими. Действительно, все операторы, отвечающие начальным или конечным состояниям (концы диаграмм) относятся к различным состояниям и поэтому антикоммутируют. (Случай когда какой-либо электрон не меняет в данном процессе своего состояния, не будем рассматривать, чтобы не загромождать изложение; его рассмотрение не представляет принципиальных отличий.)

Далее рассмотрим произведения электронного оператора и пары «вакуумных» операторов $\sum_f \hat{\psi}_f^\dagger \hat{\psi}_f$:

$$\hat{\psi}_a \sum_f \hat{\psi}_f^\dagger \hat{\psi}_f = - \sum_f \hat{\psi}_f^\dagger \hat{\psi}_a \hat{\psi}_f + \hat{\psi}_a \hat{\psi}_a^\dagger \hat{\psi}_a.$$

Здесь членом, стоящим рядом с суммой, следует пренебречь. (Если учесть нормировку волновых функций, то первый член содержит интеграл $\int \bar{\psi}_p \psi_p(d\mathbf{p})$, а второй — дифференциал без интеграла $\bar{\psi}_a \psi_a(d\mathbf{p}_a) \rightarrow 0$.)

Рассмотрим электронные операторы, расположенные в следующем порядке:

$$\left\{ \hat{\psi}_a(1) \left[\hat{\psi}(1) \hat{\psi}(2) \right] \left[\hat{\psi}(2) \dots \right] \dots \left[\dots \hat{\psi}(s) \right] \hat{\psi}_b(s) \right\} \left\{ \hat{\psi}_c(s+1) \times \right. \\ \left. \times \hat{\psi}(s+1) \dots \hat{\psi}_d(\dots) \right\} \dots, \quad (85)$$

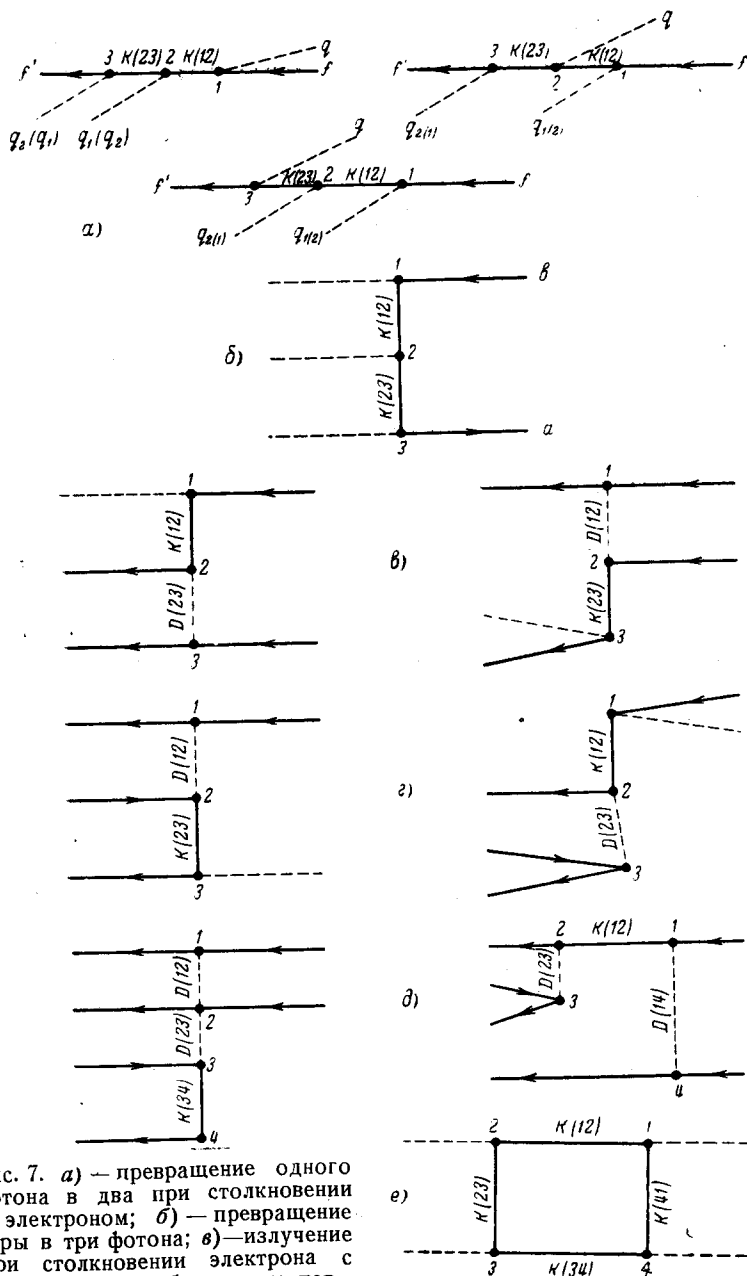


Рис. 7. а) — превращение одного фотона в два при столкновении с электроном; б) — превращение пары в три фотона; в) — излучение при столкновении электрона с электроном; г) — образование пары при столкновении фотона с электроном; д) — образование пары при столкновении двух электронов; е) — рассеяние фотона на фотоне.

где $a, b, c, d \dots$ — квантовые числа начальных или конечных состояний, а пары операторов, заключенные в квадратные скобки,

$$[\hat{\psi}(1) \hat{\bar{\psi}}(2)] = \sum_f \hat{\psi}_f(1) \hat{\bar{\psi}}_f(2)$$

и аналогично для других пар (спинорные индексы всюду опущены). Каждой «цепи» операторов, помещённой в фигурные скобки в (85) (от $\hat{\bar{\psi}}_a$ до $\hat{\psi}_b$, от $\hat{\bar{\psi}}_c$ до $\hat{\psi}_a$ и т. д.), соответствует непрерывная сплошная линия, соединяющая «вход» и «выход» диаграммы. Данный матричный элемент может содержать ряд членов, соответственно различному числу пар «вакуумных» операторов между операторами $\hat{\bar{\psi}}_a$ и $\hat{\psi}_b$ и т. д. (различное число звеньев в цепях при заданном общем числе цепей и звеньев). Кроме того, наряду с каждым членом типа (78) имеются члены, отличающиеся обменом $\hat{\bar{\psi}}_b$ на $\hat{\bar{\psi}}_a$, и т. д.

Каждая цепь состоит из чётного числа операторов, и операторы, входящие в различные цепи, антикоммутируют. Поэтому различные цепи между собой коммутируют:

$$\begin{aligned} P \left[\left(\hat{\bar{\psi}}_a(1) \dots \hat{\psi}_b(s) \right) \left(\hat{\bar{\psi}}_c(s+1) \dots \hat{\psi}_d(\dots) \right) \dots \right] = \\ = P \left[\hat{\bar{\psi}}_a(1) \dots \hat{\psi}_b(s) \right] P \left[\hat{\bar{\psi}}_c(s+1) \dots \hat{\psi}_d(\dots) \right] P \left[\dots \right] \quad (86) \end{aligned}$$

Далее, рассматривая различные возможные последовательности времён, нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} P \left[\hat{\bar{\psi}}_a(1) \hat{\psi}(1) \hat{\bar{\psi}}(2) \dots \hat{\psi}_b(s) \right] = \\ = \hat{\bar{\psi}}_a(1) P' \left[\hat{\psi}(1) \hat{\bar{\psi}}(2) \right] P' \left[\hat{\psi}(2) \hat{\bar{\psi}}(3) \right] \dots \hat{\psi}_b(s). \quad (87) \end{aligned}$$

При вычислении матричного элемента от каждого множителя $P'[\dots]$ войдёт его среднее значение по вакууму (56). Таким образом, мы приходим к заключению, что каждой сплошной линии, соединяющей две узловые точки диаграммы, надо сопоставить множитель $K(1, 2)$ в соответствующем члене подинтегрального выражения матричного элемента.

Аналогично легко получить, что каждой пунктирной линии, соединяющей две точки диаграммы, соответствует множитель $D(1, 2)$.

Действительно, все фотонные операторы, кроме входящих в пары, можно считать коммутирующими (аналогично сказанному выше об антикоммутации электронных операторов). Поэтому, если

$a', b', c', \dots$ — квантовые числа начальных или конечных состояний, то

$$P \{A_{a'} A_{b'} \dots [\hat{A} \hat{A}] [\hat{A} \hat{A}]\} = \hat{A}_{a'} \hat{A}_{b'} \dots P [\hat{A} \hat{A}] P [\hat{A} \hat{A}] \dots$$

(все множители $A(x_k)$ имеют разные аргументы). Предварительное составление диаграммы является практически весьма полезным при рассмотрении процессов высокого порядка.

Для иллюстрации рассмотрим превращение одного фотона в два при столкновении со свободным электроном (рис. 7, а)). Это — процесс третьего порядка. Согласно (21)

$$\hat{S}_3 = \frac{ie^3}{6} \int P [\hat{j}_i(1) \hat{j}_j(2) \hat{j}_k(3)] P [\hat{A}_i(1) \hat{A}_j(2) \hat{A}_k(3)] \times \\ \times d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3. \quad (88)$$

Мы имеем одно начальное и два конечных фотонных состояния. Каждому из них соответствует один из трёх фотонных операторов. (Диаграмма не имеет пунктирных линий, соединяющих её точки. Заметим, что такие линии могут соединять только две различные электронные цепи, если рассматриваемый матричный элемент есть первое приближение.) Поэтому оператор P перед фотонными операторами можно опустить. Далее, имеем одно начальное (f) и одно конечное (f') состояния электрона; диаграмма состоит из одной цепи. Оператор $\hat{\psi}_f$ может иметь любой из трёх аргументов ($x_1 x_2 x_3$). При данном аргументе $\hat{\psi}_f \hat{\psi}_{f'}$ может иметь один из двух аргументов, не совпадающих с аргументом $\hat{\psi}_f$ (если аргументы $\hat{\psi}_f$ и $\hat{\psi}_{f'}$ одинаковы, то возникает интеграл

$$\int \psi_{f'}(1) \psi_f(1) A(1) d^4x_1,$$

равный 0 согласно разделу 4). Таким образом, имеем 6 членов, отличающихся лишь наименованием аргументов. (81) можно переписать следующим образом:

$$\hat{S}_3 = ie^3 \int P [\hat{\psi}_{f'}(1) \gamma_i \hat{\psi}(1) \hat{\psi}(2) \gamma_j \hat{\psi}(2) \hat{\psi}(3) \gamma_k \hat{\psi}_f(3)] \times \\ \times \hat{A}_i(1) \hat{A}_j(2) \hat{A}_k(3) d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \quad (88a)$$

или, согласно (87) и (56),

$$(q_1 q_2 f' | S_3 | f q) = ie^3 \sum \int \bar{\psi}_{f'}(1) A'_{ai}(1) \gamma_i K(12) \gamma_j A'_{bj}(2) K(23) \times \\ \times \gamma_k A'_{ck}(3) \psi_f(3) d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3. \quad (88b)$$

Здесь a , b и c — одно из трёх квантовых чисел q, q_1, q_2 , по различным их комбинациям проводится суммирование $A'_{q_1} = A_q$; $A'_{q_2} = A_{q_1}^*$; $A'_{q_3} = A_{q_2}^*$.

Структура матричного элемента процесса n -го порядка и в общем случае носит аналогичный характер. Матричный элемент состоит из ряда членов, каждый из которых соответствует определённой диаграмме и представляет собой $4n$ -кратный интеграл. Подинтегральное выражение является произведением волновых функций начальных и конечных состояний электронов, потенциалов начальных и конечных состояний фотонов и функций K и D . Так как в случае свободных состояний электронов K и D явно выражаются в виде интегралов Фурье, то интегрирование по координатам может быть проведено (переход к импульсному представлению). Тогда каждый член представляет собой $4n$ -кратный интеграл по импульсам. Каждую волновую функцию начальных и конечных электронных состояний («входы» и «выходы» диаграммы) следует при этом заменить их спинорными амплитудами, соответственно фотонные — векторами поляризации, функцию K заменить на $(\gamma f - m)^{-1}$, функцию D — на $\frac{1}{q^2}$ и для каждой узловой точки ввести множитель $\delta(f_1 - f_2 - q)$, где f_1, f_2 и q — 4-импульсы, соответствующие линиям, сходящимся в данном узле. Благодаря этим δ -функциям матричный элемент фактически принимает весьма простой вид.

10. ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Методы, изложенные в предыдущих разделах, позволяют написать выражения для матричных элементов в следующих приближениях (радиационные поправки). Поскольку переход от матрицы S_n к S_{n+1} добавляет один оператор $\hat{A}$, то второе приближение отличается от первого на два порядка (ибо число фотонов в начальном и конечном состояниях остаются прежними).

Движение свободного электрона есть процесс нулевого порядка, которому соответствует единичная матрица

$$\hat{S}_0 = 1.$$

Однако электрон взаимодействует с электромагнитным полем и матричные элементы, соответствующие движению свободного электрона, содержатся и в матрице второго порядка

$$\hat{S}_2 = -\frac{e^2}{2} \int \hat{P} [\hat{j}_i(1) \hat{j}_j(2)] P [\hat{A}_i(1) \bar{A}_j(2)] d^4x_1 d^4x_2.$$

Пусть f и f' — начальный и конечный 4-импульсы электрона (внешнее поле отсутствует).

Тогда

$$(f' | S_2 | f) = (f' | S_2^{\text{св}} | f),$$

где

$$\hat{S}_2^{\text{св}} = -e^2 \int \hat{\bar{\psi}}_{f'}(1) D(12) \gamma_i K(12) \gamma_i \hat{\psi}_f(2) d^4x_1 d^4x_2. \quad (89)$$

$D(12) \gamma_i K(12) \gamma_i$ есть функция взаимодействия электрона с самим собой. Матрице (89) соответствует диаграмма, изображенная на

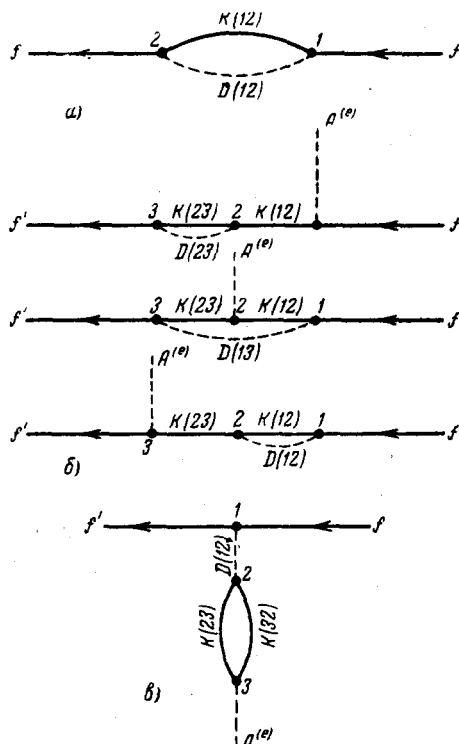


Рис. 8 а) — собственная энергия электрона; б) — поправки к рассеянию во внешнем поле; в) — поправки к рассеянию. Эффект «поляризации вакуума».

рис. 8, а). Подставляя явные выражения для ψ , D и K , получим (интегрируя по координатам)⁶:

$$(f' | U | f) = \frac{ie^2}{4\pi^8} \delta(p - p') \bar{u}_{f'} \int \gamma_i [\gamma(f - q) - m]^{-1} \gamma_i \frac{d^4q}{q^3} u_f, \quad (90)$$

где матрица $\hat{U}$ связана с $\hat{S}_2$ соотношением (22). Она диагональна по импульсам электрона и представляет собственную энергию электрона. Выражение (90) содержит всё то, что в старых формулировках теории разделялось как классическая электромагнитная собственная энергия электрона, «поперечная» энергия, связанная с виртуальным испусканием и поглощением фотонов, и поправки к последней, связанные с учётом «фона» электронов отрицательных энергий.

Важнейшим вопросом являются радиационные поправки к рассеянию электрона во внешнем поле. Первое приближение есть процесс первого порядка (формула (36в), рис. 2, б)). Вторым приближением будет матрица третьего порядка. Соответствующие диаграммы изображены на рис. 7, б) и 7, в). Диаграмма рис. 7, в) содержит «замкнутую петлю»; эта часть матричного элемента связана с «поляризацией вакуума», т. е. виртуальным образованием пар внешним полем. Диаграмме с петлёй соответствует следующее расположение операторов в матрице $\hat{S}_3$:

$$\begin{aligned} P \left[\hat{\psi}_{f'} (1) \hat{\psi}_f (1) \hat{\psi} (2) \hat{\psi} (2) \hat{\psi} (3) \hat{\psi} (3) \right] P \left[\hat{A} (1) \hat{A} (2) \right] A^{(e)} (3) = \\ = - \hat{\psi}_{f'} (1) \hat{\psi}_f (1) P' \left(\hat{\psi} (2) \hat{\psi} (3) \right) P' \left[\hat{\psi} (3) \hat{\psi} (2) \right] \times \\ \times P \left[\hat{A} (1) \hat{A} (2) \right] A^{(e)} (3), \end{aligned}$$

что даёт следующий член в матричном элементе $\langle f' | S_3 | f \rangle$:

$$- \int \bar{\psi}_f (1) \gamma_i \psi_f (1) D (12) Sp [K (2, 3) \gamma_j K (3, 2) \gamma_i] A_f^{(e)} (3) d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3.$$

Остальные диаграммы носят обычный характер (одна цепь).

Для матричного элемента эффективной энергии возмущения получим⁶:

$$\begin{aligned} \langle f | U_3 | f \rangle = \frac{e^2}{4\pi^3} \left\{ \bar{u}_f' \int \frac{d^4 q}{q^2} [\gamma_i (f\gamma - q\gamma - m)^{-1} \times \right. \\ \times a_j \gamma_j (f\gamma - q\gamma - m)^{-1} \gamma_i + a_j \gamma_j (f\gamma - m)^{-1} \times \\ \times \gamma_i (f\gamma - q\gamma - m)^{-1} \gamma_i + \gamma_i (f'\gamma - q\gamma - m)^{-1} \times \\ \times \gamma_i (f'\gamma - m)^{-1} a_j \gamma_j] u_f - \frac{(\bar{u}_f' \gamma_i u_f) a_j}{(f' - f)^2} \times \\ \left. \times \int Sp [(q\gamma + f'\gamma - f\gamma - m)^{-1} \gamma_j (q\gamma - m)^{-1} \gamma_i] d^4 q \right\}, \quad (91) \end{aligned}$$

где

$$a_j = \frac{1}{(2\pi)^4} \int A_j^e(x) e^{i(\varphi - f)x} d^4x. \quad (91a)$$

Интегралы (89) и (91) являются расходящимися. Их регуляризации не входят в задачу настоящей статьи (см. ¹).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Сдвигуровней атомных электронов и дополнительный момент электрона согласно новейшей квантовой электродинамике. Сборник статей, ИЛ, Москва, 1950; Я. А. Смородинский, УФН **39**, 325 (1949).
2. J. Schwinger, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948).
3. F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 486 (1949) (содержится в¹).
4. S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc. **A63**, 682 (1950); K. Bleuler, Helv. Phys. Acta **23**, 567 (1950).
5. Г. А. Зисман, ЖЭТФ **10**, 1163 (1940); **11**, 631 (1941).
6. R. P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 749, 769 (1949); (Сокращённые переводы содержатся в сборнике «Проблемы современной физики», сер. 3, вып. II, ИЛ, Москва, 1951).
7. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ГТТИ, 1940.