

О МАГНИТО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЛНАХ В ГАЗЕ

За последнее время в литературе появился целый ряд статей¹⁻⁸, посвящённых так называемым магнито-гидродинамическим волнам, т.е. волнам, могущим распространяться в проводящей среде, находящейся в магнитном поле. Явления, связанные с магнито-гидродинамическими волнами, нашли себе широкое применение, главным образом, в астрофизических проблемах. В 1942 году была сделана попытка⁸ создать теорию солнечных пятен, согласно которой возмущения, возникающие в центральных областях Солнца, передаются на поверхность с помощью магнито-гидродинамических волн. В ряде теорий^{3, 4} происхождения космических

лучей магнито-гидродинамические волны играют важную роль *). Представляет также несомненный интерес исследование явлений, связанных с распространением в ионосфере магнито-гидродинамических волн. Естественно поэтому, что выяснение вопроса о природе этих волн является весьма актуальным. В связи с этим привлекает к себе внимание работа ⁶, опубликованная на страницах ЖЭТФ. В этой работе было показано, что магнито-гидродинамические волны представляют собой обычные электромагнитные волны низкой частоты, возникающие в проводящей газообразной или жидкой среде, помещенной в магнитное поле, при учёте движения тяжёлых заряженных (ионов) или нейтральных частиц. Аналогичные выводы были получены в работе ⁷, в которой, в отличие от ⁶, не принимались во внимание столкновения между частицами.

Прежде всего остановимся на выяснении свойств магнито-гидродинамических волн на основе гидродинамического приближения ^{1, 5, 6}. Для этого исследуем задачу о проводящей жидкости с плотностью ρ и проводимостью σ , находящейся в электромагнитном поле. Уравнения движения и поля в этом случае имеют вид:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{jH}], \quad \mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right), \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0,$$

где $\mathbf{v}$ — скорость жидкости, $\mathbf{j}$ — плотность тока, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ — напряжённости магнитного и электрического полей и p — давление. Током смещения $\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$ пренебрегаем. Будем решать полученную систему уравнений в линейном приближении, т. е. будем предполагать, что $\mathbf{v}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0$ ($\mathbf{H}_0$ — постоянное внешнее магнитное поле) и $\rho_1 = \rho - \rho_0$ (ρ_0 — плотность невозмущённой жидкости при $H = 0$) — малые величины.

Ради простоты проводимость σ считаем бесконечной (это приводит к соотношению $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{vH}]$). Тогда линеаризованная система будет выглядеть так:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -u_0^2 \nabla \rho_1 + \frac{1}{c} [\mathbf{jH}_0],$$

$$\Delta \mathbf{E} - \nabla \text{div } \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{vH}_0], \quad (2)$$

где $u_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ — квадрат скорости звука при $H_0 = 0$; поле $\mathbf{H}$ исключено. Решение для всех величин, входящих в (2), ищем в виде плоских волн, т. е. $\sim \exp \{ i [\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}] \}$.

В результате исключения $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ получим следующее уравнение для определения скорости $u = \frac{\omega}{k}$ волн, могущих распространяться в жидкости:

$$u^2 \mathbf{v} = \frac{1}{4\pi\rho_0} \left\{ [\mathbf{H}_0 [\mathbf{vH}_0]] - \left[\mathbf{H}_0 \frac{\mathbf{k}}{k} \right] \left(\frac{\mathbf{k}}{k} [\mathbf{vH}_0] \right) \right\} + \frac{u_0^2 \mathbf{k} (\mathbf{k} \mathbf{v})}{k^2}.$$

*) См. также В. С. Вавилов, УФН 39, 612 (1949).

Вводя угол θ между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$, находим, что u может принимать значения

$$u_1^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} \cos^2 \theta, \quad (3)$$

когда скорость $\mathbf{v}$ направлена перпендикулярно к $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$ — поперечная волна, и

$$u_{2,3}^2 = \frac{1}{2} \left(u_0^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{H_0^4}{(4\pi\rho_0)^2} + u_0^4 - 2 \frac{H_0^2 u_0^2}{4\pi\rho_0} \cos 2\theta}, \quad (4)$$

когда скорость $\mathbf{v}$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$, причём в общем случае эти волны не являются ни продольными, ни поперечными.

При $\theta = 0$ (распространение по полю)

$$u_1^2 = u_2^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}, \quad u_3^2 = u_0^2. \quad (5)$$

Волны 1 и 2 являются поперечными ($\mathbf{k}\mathbf{v} = 0$); волна 3 — продольной (т. е. для неё $\mathbf{v} \parallel \mathbf{k}$; см. рис. 1).

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ (распространение перпендикулярно к полю):

$$u_1^2 = u_3^2 = 0; \quad u_2^2 = u_0^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho}. \quad (6)$$

Здесь волна 2 является продольной (см. рис. 2).

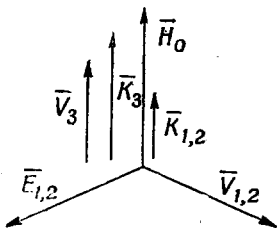


Рис. 1.

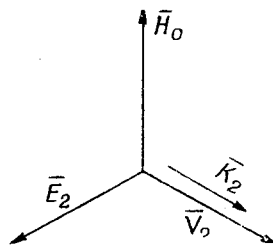


Рис. 2.

Из анализа общей формулы (2) следует, что скорость поперечных волн достигает своего максимального значения при $\theta = 0$. Поправка к

скорости продольных волн $\sim \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0 u_0}$, т. е. в жидкости, всегда очень мала (для ртути при $H_0 \sim 10^4$, $\frac{H_0^2}{4\pi\rho_0 u_0} \sim 1$ см/сек, в то время как $u_0 = 1,46 \cdot 10^5$ см/сек).

Таким образом мы видим, что наличие проводимости при $H_0 \neq 0$ приводит к появлению, например при $\theta = 0$, поперечных волн, которые обычно отсутствуют в жидкости. Эти волны и были названы магнито-гидродинамическими¹ и, как будет видно из дальнейшего на примере

газа, являются обычными электромагнитными волнами низкой частоты. Для выяснения этого вопроса наиболее последовательный путь в случае газообразной среды есть путь решения совместных кинетических уравнений для электронов и ионов (рассматривается полностью ионизованный газ — плазма). Однако существенным упрощающим обстоятельством при решении этой задачи является тот факт, что для поперечных волн кинетическое рассмотрение может быть заменено анализом уравнений движения электронов и ионов с использованием некоторых эффективных чисел соударений ν , вычисляемых на основе кинетической теории⁹. Эти уравнения таковы:

$$\begin{aligned} m \frac{dv_e}{dt} &= -eE - \frac{e}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] + m\nu (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \\ M \frac{dv_i}{dt} &= eE + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}] + m\nu (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \end{aligned} \quad (7)$$

где m и M — массы электрона и иона, $-e$ и $+e$ — заряды электрона и иона, $\mathbf{v}_e$ и $\mathbf{v}_i$ — их средние скорости и ν — эффективное число соударений электронов с ионами. Предполагается, что плазма квазинейтральна (т. е. концентрации ионов и электронов равны) и что имеются только однократные ионы одной массы.

К уравнениям (7) надо добавить уравнения поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi \mathbf{j}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \Delta \mathbf{E} - \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение совместной системы (7) — (8) ищем в виде плоской волны, распространяющейся вдоль поля $\mathbf{H}_0$, в которой все величины пропорциональны $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$.

После подстановки в (7) и (8) получим систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно искомым величин, которая имеет решение, отличное от нуля при условии обращения в нуль детерминанта системы. Это условие приводит к следующему соотношению, определяющему скорость волны u :

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{u^2} = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega \left(\omega - i\nu \mp \omega_H - \omega_H \frac{\Omega_H}{\omega} \right)}, \quad (9)$$

где $\omega_H = \frac{eH}{mc}$ и $\Omega_H = \frac{eH}{Mc}$ — гиромагнитные частоты электронов и ионов. Два знака в знаменателе отвечают двум различным поперечным волнам, поляризованным по кругу соответственно налево и направо. При получении этого соотношения были отброшены члены $\sim \frac{m}{M}$. Укажем, что система (7) — (8) имеет ещё одно решение, соответствующее обычной продольной плазменной волне, которая при $\nu = 0$ обладает частотой

$$\omega^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}.$$

Рассмотрим два наиболее интересных предельных случая высоких и низких частот. При $\omega \gg \Omega_H$ мы получим обычную формулу для элек-

ромагнитной ионосферной волны:

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{u_{\pm}^2} = 1 - \frac{4 \pi e^2 N}{m \omega (\omega \mp \omega_H - i \nu)}.$$

При $\Omega_H \gg \omega$; $\Omega_H \omega_H \gg \omega \nu$ формула (9) принимает вид:

$$\frac{c^2}{u_{\pm}^2} = 1 + \frac{4 \pi e^2 N}{m \omega_H \Omega_H} \approx \frac{4 \pi M N c^2}{H_0^2}. \quad (10)$$

Легко видеть, что последнее выражение эквивалентно формуле (5) настоящей заметки, а также формуле (5) в работе¹ для скорости магнито-гидродинамической волны, так как MN есть как раз плотность ρ_0 . В случае выполнения (10) исходные уравнения (5) и (6) также переходят в гидродинамические уравнения несжимаемой жидкости (без давления). Тем самым показано, что магнито-гидродинамические волны суть не что иное, как обычные электромагнитные волны, частота которых значительно меньше гиромангнитной частоты ионов.

В последнем разделе работы⁶ учитывается, помимо ионов, движение нейтральных частиц. В этом более сложном случае выражения для скорости волны при достаточно низких частотах также совпадают с гидродинамической формулой (5).

Отметим в заключение, что недавно⁵ была сделана первая попытка экспериментального исследования магнито-гидродинамических волн в жидкости (ртуть).

Полученные при этом результаты несколько не согласуются с теорией, развитой применительно к условиям, имевшим место в опыте. Автор объясняет это несогласие наличием постоянного возмущения на поверхности ртути.

В последнее время появился также ряд работ, посвященных решению магнито-гидродинамических уравнений в нелинейном приближении при наличии скачков и турбулентности^{10, 11}.

В. Ф.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. H. Alfvén, Nature **150**, 405 (1942); Arkiv f. Mat. Astr. o. Fys. **29B**, № 2 (1942).
2. C. Walén, Arkiv f. Mat. Astr. o. Fys. **30A**, № 15 (1941); **31B** № 3. (1944).
3. E. Fermi, Phys. Rev. **75**, 1169 (1949).
4. R. D. Richtmyer and E. Teller, Phys. Rev. **75**, 1729 (1949).
5. S. Lundquist, Phys. Rev. **76**, 1805 (1949).
6. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, **21**, 788 (1951).
7. E. Åström, Arkiv f. Fysik **2**, 443 (1951).
8. H. Alfvén, Arkiv f. Mat. Astr. o. Fys. **29A**, № 12 (1943).
9. В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в ионосфере, Гостехиздат, 1949.
10. S. Chandrasekhar, Proc. Roy. Soc. **204A**, 435 (1950); Proc. Roy. Soc. **207A**, 301 (1951).
11. Batchelor, Proc. Camb. Phil. Soc. **47**, 359 (1951).