

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МАЯТНИК С ВИБРИРУЮЩИМ ПОДВЕСОМ

П. Л. Капица

Развитие механики несомненно тесно связано с изучением маятника. После того как Галилей обратил внимание на изохронность его колебаний, появилась возможность создать весьма совершенный механизм для измерения времени — маятниковые часы, точность которых только недавно была превзойдена кварцевыми часами. Благодаря изучению маятника были найдены методы так же точно измерять время, как измерялись длина и масса, что было необходимо, чтобы развитие механики могло идти по твёрдому пути. Естественно, что ни одной из механических систем не было уделено столько внимания и всестороннего теоретического изучения как всем разновидностям движения маятника. Казалось бы, что за 300 лет, прошедших со времён Галилея, этот вопрос должен был быть исчерпан и если что-либо оставалось для изучения, то это должно было носить характер дошлифовки ранее полученных результатов. Но, повидимому, тому типу движения маятника, которому посвящена эта статья, не было уделено достаточно внимания и одна из очень своеобразных и интересных разновидностей колебаний маятника осталась почти полностью не изученной. Обратив внимание на этот тип движения и на открывающиеся при его изучении возможности и ставит себе целью эта статья.

На рис. 1 изображён в двух положениях математический маятник, который может колебаться в точке подвеса l ; масса m сосредоточена на конце стержня L .

Положение маятника с левой стороны рисунка (а), когда точка подвеса выше центра тяжести, мы будем называть нормальным положением. На рисунке справа (б) точка подвеса маятника ниже центра тяжести; это положение мы будем называть перевернутым положением маятника.

Тип маятника, который мы рассмотрим, обладает той особенностью, что точка подвеса l передвигается по оси y около начала координат O , при этом расстояние Ol является периодической функцией времени; мы также принимаем, что амплитуда колебаний

подвеса a мала по сравнению с длиной маятника L . Это хорошо известный маятник с колеблющимся подвесом.

При изучении этого вида маятников всё внимание сосредоточивалось на том виде движения, когда период колебания подвеса T мало отличался от периода колебания самого маятника τ . При этом было найдено, что в тех случаях, когда $2T$ или кратное ему значение близко к периоду τ , возникает явление параметрического резонанса. Эти исследования сводились к изучению свойств решений уравнения Матье, которым описывается это движение при малых амплитудах колебания. Далее¹ было обнаружено, что при

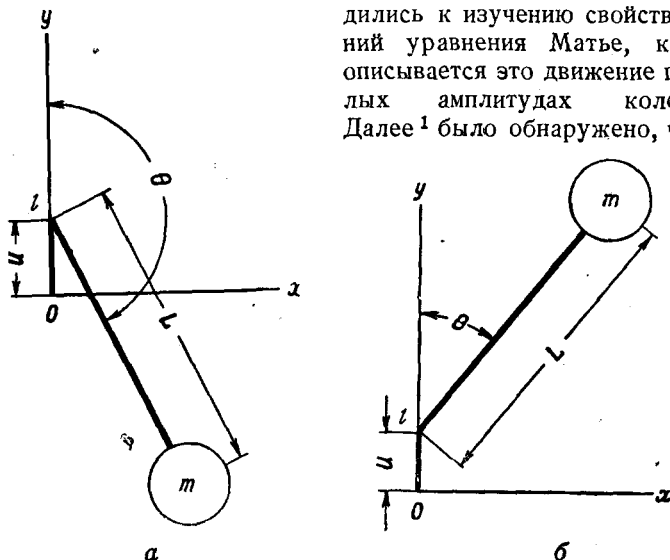


Рис. 1.

малых значениях T по сравнению с τ маятник может приобретать особый вид устойчивости—он может стоять, не падая, в перевернутом положении. Характер движения маятника в этом положении и степень его устойчивости при высоких частотах колебаний подвеса, повидимому, оставались совсем не изученными. Таким образом красивое и поучительное явление динамической устойчивости перевернутого маятника не только не вошло в современные руководства по механике, но даже почти неизвестно широкому кругу специалистов.

Можно предположить, что такое незаслуженное отношение к этому явлению было следствием того, что изучение его связано с решением уравнения Матье; оно производилось бесконечными детерминантами (метод Гилла) или специальными функциями, что приводило к решению формального характера, не дающему возможности наглядно описать движение.

Изучая это движение, я обратил внимание, что при условии, когда амплитуда колебаний подвеса a мала по сравнению с длиной маятника L , существует метод приближённого решения задачи движения, который просто и наглядно описывает явление.

Отношение амплитуды колебания подвеса к длине маятника мы будем в дальнейшем обозначать через α :

$$\alpha = a/L \ll 1. \quad (1)$$

Величина α будет играть весьма важную роль в данном методе, так как точность полученных результатов в интересующих нас типах движения в основном определяется ею. Мы будем главным образом изучать такие виды движения маятника, когда частота колебаний подвеса велика по сравнению с частотой колебаний маятника, и, кроме того, совсем не связана с ней какими-либо фазовыми соотношениями, спектр же самих колебаний подвеса может представлять собой сумму спектра и различных частот. Поэтому, чтобы отличить изучаемое нами движение от движения маятника с колеблющимся подвесом, мы его назовём движением маятника с вибрирующим подвесом.

Применённый нами метод решения задачи основан на последовательных приближениях совместно с введением усреднённых координат по времени. Подробное его изложение и исследование точности полученных результатов даются нами в другом месте².

Здесь мы ограничимся описанием основных полученных результатов и возможности их практического применения.

Метод последовательного приближения уже на первой ступени приводит задачу влияния вибрирующей точки подвеса на движение маятника к весьма простой физической картине: оказывается, что это влияние равноценно моменту сил, который ведёт себя совершенно так же, как пара обычных сил, и стремится установить маятник так, чтобы его масса всегда находилась по направлению вибраций подвеса. Этот момент мы назвали вибрационным моментом и обозначили через $\bar{M}$. Как будет видно из дальнейшего, введение вибрационного момента и не даёт решение задач движения такого типа маятников не сложнее, чем решение задач для обычных маятников. Далее мы также опишем способ просто построить маятник с вибрирующим подвесом, на котором можно демонстрировать полученные теоретические результаты.

Напишем уравнение для общего случая движения рассматриваемого типа математического маятника. Если, как показано на рис. 1, обозначить угол между стержнем маятника и осью y через θ , то координаты массы маятника x и y будут

$$x = L \sin \theta; \quad y = U + L \cos \theta, \quad (2)$$

где U представляет расстояние (вдоль оси y), точки подвеса маятника l от начала координат O .

Силы, действующие на массу m по осям x и y , мы обозначим через F_x и F_y ; тогда получаем:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= m\ddot{x} = mL(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta), \\ F_y &= m\ddot{y} = m[\ddot{U} - L(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Момент пары внешних сил, действующих на массу маятника, мы обозначим через M_θ ; он будет равен:

$$M_\theta = L(F_x \cos \theta - F_y \sin \theta). \quad (4)$$

Подставляя значения F_x и F_y , получаем:

$$M_\theta = mL^2\ddot{\theta} - mL\ddot{U} \sin \theta. \quad (5)$$

Это уравнение нетрудно обобщить для случая физического маятника. Для этого нужно рассматривать m как элементарную массу и проинтегрировать правую часть уравнения (5) по всему объёму массы маятника; тогда вместо (5) получаем:

$$M_\theta = m(L^2 + K^2)\ddot{\theta} - mL\ddot{U} \sin \theta, \quad (6)$$

где θ и L являются координатами центра тяжести массы маятника, а K — радиус инерции маятника.

Пусть подвес маятника совершает простые гармонические колебания с амплитудой a и угловой частотой ω ; тогда имеем:

$$U = a \sin \omega t. \quad (7)$$

Дифференцируя это выражение дважды по времени и подставляя значение $\ddot{U}$ в (6), получаем:

$$M_\theta = m(L^2 + K^2)\ddot{\theta} + mL\omega^2 \sin \omega t \sin \theta. \quad (8)$$

В частном случае, когда момент внешних сил создаётся силой тяжести, он равен:

$$M_\theta = mgL \sin \theta, \quad (9)$$

и уравнение движения примет вид:

$$\ddot{\theta} = \frac{L}{(L^2 + K^2)} (g - a\omega^2 \sin \omega t) \sin \theta. \quad (10)$$

Это уравнение обычно подвергают упрощению, ограничивая задачу рассмотрением малых значений угла θ и заменяя им величину $\sin \theta$. При этом ограничении получается уравнение Матье, при помощи которого и изучали до сих пор проблему движения маятника с колеблющимся подвесом.

При применении нами метода последовательного приближения, рассмотрение задачи не ограничивается малыми углами θ . Основ-

ная идея этого метода состоит в допущении, что за период быстрого колебания подвеса угол θ мало изменится, оставаясь близким к некоторой величине φ . Мы полагаем:

$$\theta = \varphi + \beta. \quad (11)$$

Угол β является периодической величиной, но её значение за период колебания T всегда остаётся малой величиной. Угол φ может иметь любое значение, но за то же время T мало изменится. Если мы усредним эти величины по времени за период T и это усреднение обозначим чертой, то имеем:

$$\bar{\theta} \cong \varphi; \bar{\beta} \cong \theta. \quad (12)$$

При изучении движения маятника с вибрирующим подвесом нас главным образом интересует изменение угла φ , представляющего то положение, около которого происходят мелкие вибрации.

Поэтому метод решения построен так, чтобы путем усреднения исключить из уравнения угол β и заменить θ углом φ . Это, оказывается, можно сделать, если свести задачу к движению, в котором участвует вибрационный момент, равный (для физического маятника)

$$\bar{M} = -\frac{1}{4} (1 + K^2/L^2)^{-1} m a^2 \omega^2 \sin 2\varphi. \quad (13)$$

Тогда можно показать², что в большинстве интересующих нас типов движения в первом приближении (для определения величин с точностью порядка α^2) имеет место следующее простое уравнение движения:

$$m(L^2 + K^2)\ddot{\varphi} = M_\varphi + \bar{M}, \quad (14)$$

где момент внешних сил M_φ получается из M_θ простой заменой угла θ на φ . Таким образом мы получаем такие же уравнения, как если бы подвес был в покое, но кроме внешнего момента M_φ действовал ещё дополнительный момент $\bar{M}$. Нетрудно видеть, что интегрирование уравнения, полученного таким образом для угла φ , не представляет больших трудностей, чем в случае движения обычных маятников с неподвижным подвесом. Это является следствием того, что вибрационный момент $\bar{M}$, поскольку в него не входит время, действует так же, как момент обычных сил. Из выражения (13) видно, что вибрационный момент стремится установить стержень маятника вдоль по направлению оси y , т. е. той оси, по которой происходят колебания подвеса. Наибольшее значение $\bar{M}$ имеет при $\varphi = 45^\circ$. Далее, из (13) следует, что величина вибрационного момента не зависит от длины маятника и в основном определяется кинетической энергией, сообщённой массе маятника в процессе вибрации подвеса.

При заданной и постоянной вибрации подвеса величина вибрационного момента $\bar{M}$ зависит только от угла φ , поэтому полученные решения механических задач колебания маятника, как будет видно из дальнейшего, принимают наглядную форму.

Упрощение решения задачи маятника введением вибрационного момента напоминает такие же упрощения задач движения различных типов волчков и жирокопсов путём введения понятия жироскопического момента. В этом отношении между жироскопическим моментом и вибрационным моментом существует некоторая аналогия.

Приведём ряд примеров решения уравнения (14), имеющих практический интерес.

Разберём сначала задачи «статического» равновесия между приложенным моментом M_φ и вибрационным моментом $\bar{M}$. Решение этих задач получается из уравнения (14); полагая $\varphi = \text{const}$, имеем:

$$M_\varphi + \bar{M} = 0. \quad (15)$$

Положим, что M_φ создаётся силой тяжести, и примем, что ось y по которой происходят вибрации, образует с отвесной линией угол γ . Тогда момент силы тяжести равен:

$$M_\varphi = mgL \sin(\varphi + \gamma). \quad (16)$$

Подставляя в (14) это значение, а также значение для $\bar{M}$ (13), получаем следующее уравнение:

$$4 \left(1 + \frac{K^2}{L^2} \right) Lg \sin(\varphi_n + \gamma) - a^2 \omega^2 \sin 2\varphi_n = 0. \quad (17)$$

Из этого выражения можно определить те значения угла φ_n , при которых возможно равновесное положение маятника.

Графический анализ уравнения показывает, что в зависимости от значения параметров φ_n может иметь 4 или 2 значения, являющихся его корнями. В случае, когда имеется два корня, только при одном из них маятник находится в устойчивом равновесии, соответствующем его нормальному положению. В случае, когда имеется четыре корня, маятник находится в устойчивом равновесии, при двух значениях угла φ_n — одно из них соответствует нормальному положению, а другое — перевёрнутому. Четыре корня возможны только тогда, когда величина $a^2 \omega^2$ достаточно велика, т. е. вибрации достаточно интенсивны.

Два найденных положения устойчивости можно продемонстрировать на маятнике, изображённом на рис. 2 (а и б). На конце вибрирующего рычажка симметрично подвешены два одинаковых маятника. При достаточной интенсивности вибраций они занимают положения, соответствующие каждому из двух углов φ_n , определяющих устойчивость равновесия. Давая лёгкие толчки маятнику,

можно убедиться на опыте, что эти положения действительно соответствуют устойчивому равновесию.

В частном случае, когда вибрация подвеса маятника происходит в вертикальном направлении, т. е. $\gamma = 0$, видно, что уравнение всегда удовлетворено, когда $\varphi_1 = \pi$ и $\varphi_2 = 0$. Значение $\varphi_2 = 0$, т. е. когда маятник находится в перевёрнутом положении, становится устойчивым только в том случае, если имеются ещё два значения угла $\varphi_n = \varphi_3$ и $\varphi_n = \varphi_4$ для неустойчивого равновесия. Уравнение (17), если в нём положить $\gamma = 0$, даёт:

$$\sin \varphi_n = 0; \quad \cos \varphi_n = \frac{2gL}{a^2\omega^2} \left(1 + \frac{K^2}{L^2} \right). \quad (18)$$

Отсюда получаем, что $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = 0$ и $\varphi_3 = 2\pi - \varphi_4$; последний угол определяет раствор того конуса, из которого маятник будет переходить в устойчивое перевёрнутое положение при $\varphi_2 = 0$. При начальном положении маятника с углом больше φ_3 , он будет переходить в устойчивое равновесие с углом $\varphi_1 = \pi$, т. е. в нормальное положение. Чем меньше значение $\cos \varphi_n$, тем шире та область в перевёрнутом положении, в которой маятник устойчив. Начальное условие, необходимое для получения устойчивого положения перевёрнутого маятника, получается из (18); оно имеет вид:

$$\frac{1}{2} a^2 \omega^2 \geqslant gL \left(1 + \frac{K^2}{L^2} \right). \quad (19)$$

Это условие уже было получено для математического маятника и, повидимому, это единственный результат для характеристики поведения маятника в перевёрнутом положении, которое было до сих пор получено из рассмотрения уравнения Матье. Этому результату давалась следующая физическая интерпретация¹. Для устойчивости в перевёрнутом положении значение кинетической энергии массы маятника, созданной при колебании подвеса, должно быть больше, чем потенциальная энергия массы маятника над точкой подвеса. Как видно из нашего анализа, эта интерпретация справедлива только для математического маятника, для физического маятника она не имеет места.

Перейдём теперь к рассмотрению динамических проблем. Тогда в уравнении (14) угол φ следует рассматривать как переменную величину. Разберём наиболее простой случай, когда внешняя пара сил M_φ отсутствует. Положив её равной нулю, из выражения (14) получаем следующее уравнение движения:

$$\left(1 + \frac{K^2}{L^2} \right)^2 \ddot{\varphi} = - \frac{1}{4} a^2 \omega^2 \sin 2\varphi. \quad (20)$$

Это уравнение просто интегрируется и приводит к эллиптическим

интегралам первого рода; маятник при вибрации подвеса даже в отсутствие внешних сил будет совершать периодическое колебательное движение. Если период колебаний, с которым изменяется угол φ , как прежде обозначим через τ , а период колебания подвеса через T , то из решённого уравнения (20) получаем:

$$\frac{\tau}{T} = \sqrt{2} \cdot \alpha^{-1} \left(1 + \frac{K^2}{L^2}\right) F(k). \quad (21)$$

$F(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $k = \sin \varphi_a$, где φ_a — угловая амплитуда колебаний маятника. При постоянных или малых значениях амплитуды φ_a , между периодом колебаний маятника и периодом вибраций подвеса существует простая пропорциональность. Поскольку α есть малая величина, период τ будет значительно больше T . Воспроизвести такого рода колебания можно на маятнике, изображённом на рис. 3. В этих опытах влияние силы тяжести исключится, если расположить маятник горизонтально. Если период τ достаточно велик, чтобы его можно было определить простым счётом колебаний, то зная из выражения (21) коэффициент пропорциональности, можно определить и период вибраций T . Описанное явление может быть использовано в качестве своеобразного простого тахометра.

Рассмотрим теперь колебания конического маятника в отсутствие силы тяжести. Принимаем, что вращение массы маятника происходит около оси u с постоянной угловой скоростью Ω ; тогда для момента, созданного центробежной силой, получаем следующее выражение:

$$M_\varphi = \frac{1}{2} m \Omega^2 L^2 \sin 2\varphi. \quad (22)$$

Величина M_φ зависит от угла φ так же, как и вибрационный момент $\bar{M}$ (13). Поэтому равновесие между M_φ и $\bar{M}$ не зависит от значения угла φ , и мы получаем следующее простое соотношение:

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{1}{2} \alpha^2 \left(1 + \frac{K^2}{L^2}\right)^{-1}. \quad (23)$$

Отсюда следует, что угловая скорость Ω обращения конического маятника при вибрирующем подвесе не зависит от угла φ . Воспроизвести на опыте этот вид движения несколько затруднительно, так как нужно исключить влияние силы тяжести. Приблизиться к нему можно, сообщая подвесу мощные вибрации так, чтобы вибрационный момент значительно превосходил момент силы тяжести.

Как показывает более подробный анализ³, степень точности, полученная для периода колебаний вибрирующего маятника,

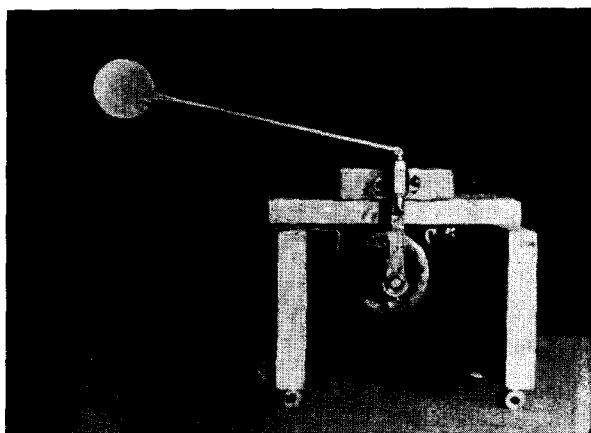


Рис. 2а. Нормальное положение маятника.

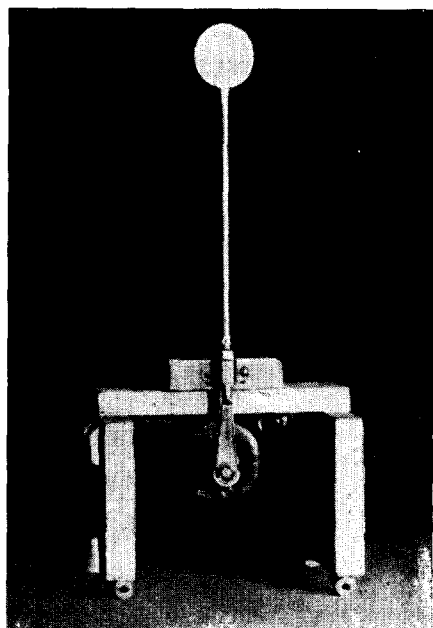


Рис. 2б. Перевернутое положение маятника.

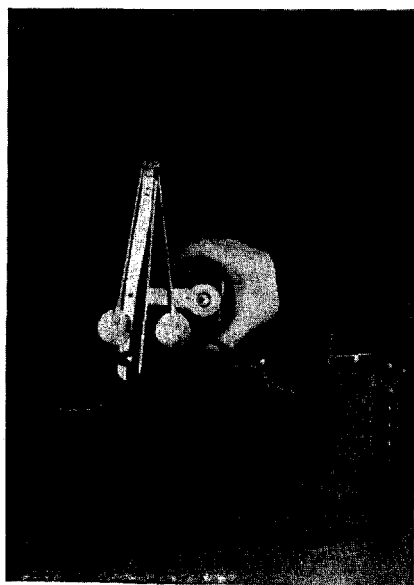


Рис. 3а. Маятники в покое.

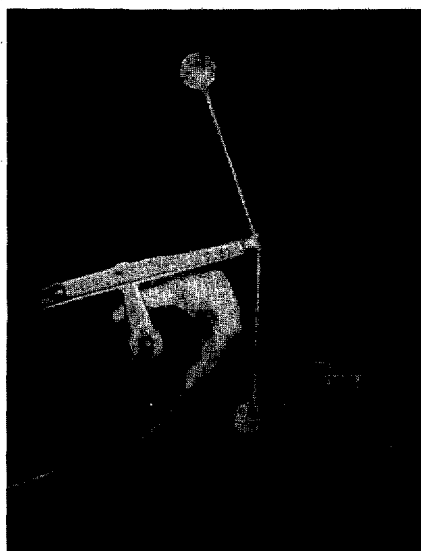


Рис. 3б. Маятники при вибрациях.

всецело определится величиной α , равной отношению длины маятника к амплитуде вибрации подвеса, и имеет порядок α^3 .

Решение задачи о колебаниях маятника в поле тяготения при вибрации подвеса, происходящей по оси y , наклонной к вертикали под углом γ , получаем из решения уравнения (14), подставляя в нём для M_φ значение, данное выражением (16). Полученное уравнение интегрируется и решение даёт колебательное движение, в котором амплитуда является эллиптической функцией времени. Если интенсивность вибраций достаточна, чтобы уравнение (17) имело четыре корня, то колебательный процесс оказывается возможным около двух значений угла φ . Один соответствует перевёрнутому положению маятника, другой — нормальному. При этом получаем, что в перевёрнутом положении период колебания маятника больше, чем в нормальном. Период колебания того же маятника в отсутствие колебаний подвеса имеет среднее значение между этими двумя периодами. Из решения уравнения следует, что при любых вибрациях подвеса маятника период его колебания в нормальном положении всегда укорачивается. Эти явления хорошо демонстрируются на двойном маятнике, изображённом на рис. 2. Наклоняя прибор таким образом, чтобы направление вибраций составляло с вертикалью различные углы γ , маятники можно одновременно заставить качаться так, чтобы один из них находился в нормальном положении, а другой в перевёрнутом. Тогда можно наглядно сравнивать периоды колебаний и проверить изложенный вывод.

Подробнее мы разберём наиболее простой случай этого движения, когда вибрации подвеса происходят в вертикальном направлении и, следовательно, $\gamma = 0$. Кроме того, амплитуды колебаний будем считать малыми, чтобы $\sin \varphi$ можно было заменить его аргументом. При этих условиях уравнение (14) примет вид:

$$\left(1 + \frac{K^2}{L^2}\right)^3 \ddot{\varphi} = -\alpha^2 \omega^2 \left[\frac{1}{2} \pm \left(1 + \frac{K^2}{L^2}\right) \frac{gL}{\alpha^3 \omega^3} \right] \varphi. \quad (24)$$

Это уравнение даёт для изменений угла φ гармонические колебания с периодом τ , определяемым выражением:

$$\left(\frac{\tau}{T}\right)^3 = \alpha^{-2} \left(1 + \frac{K^2}{L^2}\right) \left[\frac{1}{2} \pm \left(1 + \frac{K^2}{L^2}\right) \frac{gL}{\alpha^3 \omega^3} \right]^{-1}. \quad (25)$$

В двух последних выражениях знак плюс соответствует положению центра тяжести ниже подвеса, т. е. нормальному положению. Знак минус соответствует перевёрнутому положению, при этом из (25) получаем, что только тогда, когда условие устойчивости (19) соблюдено, период колебания имеет действительное значение и, следовательно, колебательный процесс в перевёрнутом положе-

нии возможен. В этой задаче дополнительным анализом можно снова показать, что периоды определяются с точностью порядка α^2 .

Дальнейшее развитие описанного метода изучения маятника с вибрирующим подвесом получается при рассмотрении колебаний подвеса, имеющих более сложный характер, чем простое гармоническое движение, принятое в выражении (7). Если ограничить вибрацию подвеса только условием периодичности, то в общем случае колебания подвеса можно представить в виде суммы гармонических частот:

$$U = \sum_n a_n \sin(\omega_n t + \sigma_n). \quad (26)$$

При этом мы вводим ограничение для величин амплитуд колебаний:

$$\alpha^2 = L^{-2} \sum_n a_n^2 \ll 1. \quad (27)$$

Прежнее условие (1), ограничивающее величину вибраций, является частным случаем этого. Тем же методом, что и в предыдущем случае, можно показать, что движение происходит так, как если бы на маятник действовал вибрационный момент, равный

$$\overline{M} = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{K^2}{L^2}\right)^{-1} m \sin 2\varphi \sum_n a_n^2 \omega_n^2. \quad (28)$$

Отсюда видно, что величина вибрационного момента попрежнему пропорциональна средней кинетической энергии, сообщенной массе маятника вибрацией подвеса.

Решение задач в этом случае так же просто, как и в предыдущем, и обычно приводит к точности порядка α^2 .

В качестве дальнейшего развития этого метода решения задач маятника с вибрирующим подвесом можно наметить введение в основное уравнение движения (14) диссипационных сил, например, зависящих от скорости $\dot{\varphi}$. Это возможно потому, что силы, созданные вибрационным моментом, могут производить работу, которая переходит в колебательную энергию маятника и, следовательно, может поглощаться при движении с трением.

Понятие вибрационного момента может быть приложено к любому телу, будь то коллоидная частица или молекула. Если равнодействующая приложенных к телу сил не проходит через его центр тяжести, то при их вибрации возникает вибрационный момент, старающийся установить тело в такое положение, при котором его центр тяжести находился бы на оси колебания. Поскольку природа вибрационного момента пока ускользала из кругозора теоретической физики, то и на опыте не искали ориентирующего действия на коллоидные и молекулярные частицы,

которое, в случае их асимметричной формы, возможно будет вызвано приложением, например, ультразвуковых колебаний или колебаний электрической природы. Интересно отметить, что анизотропия в амплитудах тепловых колебаний молекул, имеющая место в кристаллической решётке, сама по себе не будет создавать вибрационного момента, так как в силу закона равно-распределения тепловой энергии средняя кинетическая энергия вибрации молекул по всем направлениям будет одинакова: следовательно, согласно (28), и среднее значение вибрационного момента будет равно нулю.

Укажем на некоторые из практических возможностей, которые открываются благодаря вскрытию простой связи, существующей между вибрациями подвеса и вибрационным моментом, действующим на тело.

Горизонтальный маятник, движение которого описано в выражении (20), в случае горизонтальных вибраций его подвеса, согласно выражению (26), даёт при условиях (27) для α^2 следующую связь между кинетической энергией вибрации и угловой частотой колебаний маятника $\Omega = 2\pi\tau^{-1}$:

$$\frac{1}{2} \sum_n a_n^2 \omega_n^2 = \Omega^2 L^2 \left(1 + \frac{K^2}{L^2}\right)^2. \quad (29)$$

Регистрируя период τ колебаний маятника, можно определить энергию горизонтальных вибраций тела, с которым связан горизонтальный маятник.

Выражения (24) и (25) дают возможность установить влияние вертикальной составляющей вибрации подвеса на период колебания нормального маятника. Пусть при отсутствии вибраций период колебания этого маятника был τ_0 , а при наличии вибраций $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$; считая, что $\Delta\tau$ мало по сравнению с τ_0 и пренебрегая квадратом $\Delta\tau^2$, получаем:

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = - \frac{a^2 \omega^2}{4 \left(1 + \frac{K^2}{L^2}\right) L^2 \Omega^2}. \quad (30)$$

Получаем важный результат, о котором мы уже говорили, что вибрации подвеса всегда уменьшают период колебания маятника. Практический интерес этого явления заключается в том, что всякая мелкая тряска, которая передаётся на подвес маятниковых часов, если она имеет период короче, чем период колебания маятника, всегда будет ускорять ход часов.

Это справедливо не только при вибрации подвеса с одной частотой; используя выражение (28) для вибрационного момента, можно показать, что выражение (30) можно обобщить для сум-

мы кинетической энергии на частоты всего спектра вибраций:

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_0} = - \frac{\sum_n a_n^2 \omega_n^2}{4 \left(1 + \frac{K^2}{L^2}\right)^2 L^2 \Omega^2}. \quad (31)$$

Если имеется пара идентичных часов, находящихся в идентичных условиях, но отличающихся тем, что на подвес маятника одних из этих часов передаются вибрации основания, а подвес других изолирован от вибраций и находится в покое, то по относительному опережению первых часов можно с помощью (31) вычислить среднюю энергию спектра вибраций основания за период времени, за который накопилась разность хода между часами.

Открывается возможность по измерению периода маятника просто изучать среднюю энергию колебания различных оснований как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях. Нужно отметить, что указанный эффект невелик и это может затруднять его практическое использование для обычных сейсмических наблюдений.

Демонстрация вибрационного момента маятника и явлений, им производимых, не требует особо сложной аппаратуры и может быть осуществлена скромными лабораторными средствами. Два простых прибора изображены на рис. 2 и 3. Как видно из фотографий, они состоят из вибрирующего подвеса, к которому свободно на шарнире прикреплены маятники. При конструировании этого прибора следует обратить особое внимание на изготовление самого маятника.

Обычные демонстрационные маятники делаются так, чтобы они по возможности воспроизводили математический. Поэтому они состоят из тонкого стержня с тяжёлым грузом на конце. Такой тип маятника совершенно не пригоден для данного случая. Если такому маятнику сообщить вибрации необходимой для его устойчивости в перевёрнутом положении интенсивности, то из выражения (19) можно показать, что в стержне будет действовать переменное напряжение, больше чем в L/a раз превосходящее по величине напряжение, вызванное силой тяжести груза на конце стержня. Такая сила вызовет продольный изгиб в стержне, который вблизи резонансных точек создаст поперечные колебания стержня с амплитудой, переходящей за допустимые пределы. Поэтому следует брать стержни с таким поперечным сечением, которое хорошо сопротивляется продольному изгибу. Мы нашли, что при длине маятника от 15 до 30 см подходит тонкостенная трубка диаметром от 4 до 8 мм и толщиной стенок от 0,1 до 0,5 мм. Что касается груза, то его лучше вообще не делать, но для удобства демонстрации в большой аудитории к концу трубки следует прикрепить кружок из тонкого металлического листа

(0,1 мм). Шарнир на другом конце можно сделать в виде вилочки со стальным штифтом (1,5 мм), дающей возможность маятнику свободно колебаться в точке подвеса только в одной плоскости. Для демонстрации явления устойчивости в перевёрнутом положении при длине стержня маятника от 15 до 30 см и при амплитуде в несколько миллиметров частота вибраций подвеса должна лежать в пределах от 2 до 7 тысяч оборотов в минуту. Обычный небольшой электромотор от швейной машинки вполне пригоден для получения этих частот. Обороты мотора удобно регулировать небольшим вариатором. Механизм для вибрации точки подвеса мы осуществили двумя способами. На рис. 2 показан наиболее простой из них. На оси мотора эксцентрично надет небольшой шариковый подшипник, который посредством шатуна заставляет вибрировать небольшой цилиндр круглого сечения (5 мм диаметром и 5 см длиной), скользящий в неподвижной направляющей с цилиндрическим отверстием. Все эти части должны быть хорошо пригнаны и смазаны, чтобы двигаться с небольшим люфтом. На наружном конце вибрирующего цилиндра находится шарнир, к которому прикрепляется стержень маятника. Амплитуда колебаний вибраций подвеса устанавливается степенью эксцентricичности подшипника на оси мотора; в наших опытах мы обычно его устанавливали в пределах от 2 до 4 мм. Чтобы уменьшить дрожь всего прибора, желательно сбалансировать нагрузку на ось мотора. Для амортизации неплохо прибить к подставке маленькие резиновые подушечки из резиновой трубки. На таком маятнике легко можно воспроизводить все описанные явления и производить приближённую количественную проверку выведенных соотношений.

Если желательно прикрепить два маятника, чтобы сравнивать их поведение в обоих положениях устойчивости, то вибрацию точки подвеса удобнее производить посредством рычажка, как это показано на рис. 3. Здесь шатун тоже помещён на оси мотора, но при этом колебания передаются на рычажок, один конец которого колеблется у неподвижной точки, а к другому концу симметрично на шарнирах прикреплены два одинаковых маятника. Во избежание вибраций рычажок следует делать лёгким и жёстким; лучшим материалом для него является дюралюминий. Важно обеспечить жёсткость колеблющегося конца рычажка в направлении, перпендикулярном к направлению вибраций. Этого можно достичь дополнительными распорочками. При демонстрации прибора мотор можно держать в руке и, поворачивая его, наблюдать колебания обоих маятников сразу при различных направлениях вибраций.

Демонстрация явления колебания перевёрнутого маятника весьма эффектна, быстрые мелкие передвижения, вызванные вибрациями, не заметны на-глаз, поэтому поведение маятника в перевёрнутом положении производит на зрителя неожиданное впечатление. Если

повернуть прибор так, что маятник колеблется в горизонтальной плоскости, то на движение исключается влияние момента силы тяжести. Если осторожно прикасаться пальцем к стержню маятника и отводить его в сторону, то палец чувствует давление, производимое вибрационным моментом, и легко убедиться, что его наибольшая величина соответствует углу поворота в 45° . После ознакомления на опыте с динамической устойчивостью маятника в перевернутом положении трудно не прийти к выводу, что она так же поучительна, как и динамическая устойчивость волчка, и ей также следует занять почётное место в лектории на демонстрациях по механике.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. H. and B. S. Jeffereys, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge, 1951, стр. 488.
 2. П. Л. Капица, ЖЭТФ, 21, вып. 5 (1951).
-