

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**ДИФФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ ОТ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ****В. А. Фок**

Основанный на принципе Гюйгенса приближенный метод вычисления диффракции позволяет, как известно, находить поле волны, огибающей тонкий непрозрачный экран; поле это выражается через интегралы Френеля.

В случае же, когда огибаемое тело обладает конечной кривизной (радиус кривизны велик по сравнению с длиной волны), вопрос о приближенных формулах для поля в области геометрической границы тени на достаточно большом расстоянии от тела оставался открытым; в частности, не было выяснено, применимы ли в этом случае те выражения для поля через интегралы Френеля, которые можно построить по аналогии со случаем бесконечно тонкого экрана.

В настоящей работе мы покажем на примере диффракции от шара, что и для тел с конечной кривизной главный член в выражении для поля позади тела выражается через интегралы Френеля. Этот член не зависит (как и в случае обычной диффракции Френеля) от материала тела, огибаемого волной. Но к главному члену присоединяется добавочный, составляющий как бы фон, на котором расположены полосы френелевской диффракции, и этот добавочный член (а следовательно, и фон) уже зависит от электрических свойств огибаемого волной тела.

1. ИСХОДНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ МНОЖИТЕЛЯ ОСЛАБЛЕНИЯ

Мы будем исходить из диффракционных формул, выведенных в нашей работе¹. Мы должны здесь резюмировать основные результаты этой работы. Поле от точечного источника (диполя), расположенного на некотором расстоянии от поверхности шара, выражается через две функции U и W , представляющие решения уравнения колебаний:

$$\Delta U + k^2 U = 0 \quad (1.01)$$

и имеющие точечную особенность вида

$$U = -\frac{e^{ikR}}{R} + U^0, \quad (1.02)$$

где R есть расстояние от источника, а U^0 остаётся конечным при $kR \rightarrow 0$.

Уравнения, определяющие U и W , отличаются друг от друга видом предельных условий, которых мы здесь выписывать не будем.

Пусть r, ϑ, φ — сферические координаты с началом в центре шара и с полярной осью, проходящей через диполь. Величина $s = a\vartheta$, где a — радиус шара, будет расстоянием от источника до точки наблюдения, считаемым по дуге шара. Высоту источника над поверхностью шара обозначим через h_1 , а высоту точки наблюдения через h_2 . Введём параметр

$$m = \sqrt[3]{\frac{ka}{2}}, \quad (1.03)$$

который будем предполагать большим, и положим

$$x = \sqrt[3]{\frac{k}{2a^2}} s = m \frac{s}{a} = m\vartheta; \quad (1.04)$$

$$y_1 = \frac{kh_1}{m}; \quad y_2 = \frac{kh_2}{m}. \quad (1.05)$$

Комплексную диэлектрическую постоянную вещества шара обозначим через η , причём будем считать $|\eta| \gg 1$. Наконец, положим

$$q = \frac{im}{\sqrt{\eta+1}}; \quad q_1 = im\sqrt{\eta-1}. \quad (1.06)$$

В нашей работе показано, что вблизи поверхности шара (на расстояниях, малых по сравнению с его радиусом) функции U и W выражаются через множитель ослабления V по формулам

$$U = \frac{e^{iks}}{\sqrt{sa \sin \frac{s}{a}}} \cdot V(x, y_1, y_2, q), \quad (1.07)$$

$$W = \frac{e^{iks}}{\sqrt{sa \sin \frac{s}{a}}} \cdot V(x, y_1, y_2, q_1). \quad (1.08)$$

Множитель ослабления V может быть представлен при $y_1 < y_2$ в виде контурного интеграла

$$V(x, y_1, y_2, q) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_C e^{ixt} F(t, y_1, y_2, q) dt, \quad (1.09)$$

где функция F может быть написана в виде:

$$F = w_1(t - y_2) \left\{ v(t - y_1) - \frac{v'(t) - qv(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} w_1(t - y_1) \right\}, \quad (1.10)$$

или же в виде:

$$F = \frac{i}{2} w_1(t - y_2) \left\{ w_2(t - y_1) - \frac{w_2'(t) - qw_2(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} w_1(t - y_1) \right\}. \quad (1.11)$$

Здесь $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — комплексные функции Эйри, представляющие решения дифференциального уравнения

$$w''(t) = tw(t) \quad (1.12)$$

и имеющие при больших отрицательных t асимптотические выражения

$$\left. \begin{aligned} w_1(t) &= e^{i\frac{\pi}{4}}(-t)^{-\frac{1}{4}} e^{i\frac{2}{3}(-t)^{3/2}}, \\ w_2(t) &= e^{-i\frac{\pi}{4}}(-t)^{-\frac{1}{4}} e^{-i\frac{2}{3}(-t)^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

В формулу (1.10) входит также одна из функций $u(t)$, $v(t)$, определяемых равенствами

$$w_1(t) = u(t) + iv(t); \quad w_2(t) = u(t) - iv(t). \quad (1.14)$$

При вещественных t обе функции $u(t)$, $v(t)$ вещественны. При всех значениях t мы имеем:

$$w_1\left(te^{i\frac{2}{3}\pi}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}} w_2(t); \quad w_1\left(te^{i\frac{4}{3}\pi}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}} v(t). \quad (1.15)$$

Контур C в интеграле (1.09) охватывает в положительном направлении первую четверть плоскости комплексной переменной t (в первой четверти расположены все полюсы подинтегральной функции). В качестве контура C мы можем взять, например, замкнутую линию, идущую от $\infty e^{i\frac{2}{3}\pi}$ до 0 и от 0 до ∞ .

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МНОЖИТЕЛЯ ОСЛАБЛЕНИЯ

Множитель ослабления V был исследован нами в наших предыдущих работах^{1,2}, во-первых, в освещенной области, где вступает в силу отражательная формула, соответствующая геометрической оптике, во-вторых, в области тени, где имеет место убывание амплитуды поля по показательному закону, и, наконец, в переходной области вблизи поверхности шара (область полутени). Область конуса тени оставалась, однако, неисследованной, и вывод

приближённых формул для этой области составляет цель настоящей работы.

Под конусом тени мы разумеем конус, касательный к шару и имеющий вершину в источнике. Уравнение конуса тени может быть написано в виде

$$\sqrt{b^2 - a^2} + \sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \vartheta}, \quad (2.01)$$

или после перехода к переменным x , y_1 , y_2 и пренебрежения малыми величинами

$$\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} = x. \quad (2.02)$$

Таким образом, нам надлежит исследовать множитель ослабления V для случая, когда величины x , y_1 , y_2 весьма велики, разность же

$$\xi = x - \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} \quad (2.03)$$

остаётся конечной. Заметим, что положительным значениям ξ соответствует теневая, а отрицательным значениям — освещённая область.

В интеграле (1.09) для V мы можем разуместь под F одно из двух выражений (1.10) или (1.11), которые тождественно равны друг другу. Разобьём контур C в интеграле (1.09) на два участка: участок от $\infty e^{i\frac{2\pi}{3}}$ до 0 обозначим через C_1 , а участок от 0 до ∞ через C_2 . На первом участке мы будем пользоваться для F выражением (1.11), а на втором участке — выражением (1.10). Мы можем тогда написать

$$V = \Phi + \Psi, \quad (2.04)$$

где

$$\Phi = \sqrt{\frac{x}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{i}{2} \int_{C_1} e^{ixt} w_1(t-y_2) w_2(t-y_1) dt + \right. \\ \left. + \int_{C_2} e^{ixt} w_1(t-y_2) v(t-y_1) dt \right\}, \quad (2.05)$$

$$\Psi = -\sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \times \\ \times \left\{ \frac{i}{2} \int_{C_1} e^{ixt} \frac{w_2'(t) - qw_2(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} w_1(t-y_1) w_1(t-y_2) dt + \right. \\ \left. + \int_{C_2} e^{ixt} \frac{v'(t) - qv(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} w_1(t-y_1) w_1(t-y_2) dt \right\}. \quad (2.06)$$

Интегралы, входящие в Φ , не зависят от параметра q , который входит только в Ψ . Следовательно, Φ не зависит от электрических свойств тела, дающего дифракцию; от них зависит только Ψ . Мы увидим, что Φ соответствует френелевской части дифракции, а Ψ — тому фону, на который налагается френелевская дифракционная картина.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА Φ

В выражении (2.05) для Φ мы можем заменить интегрирование по C_1 интегрированием от $-\infty$ до 0. Пользуясь соотношением $w_2 = w_1 - 2iv$, мы получим:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (3.01)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^0 e^{ixt} w_1(t - y_2) w_1(t - y_1) dt, \quad (3.02)$$

$$\Phi_2 = \sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} w_1(t - y_2) v(t - y_1) dt. \quad (3.03)$$

Вычислим сперва интеграл Φ_2 . Для этого воспользуемся следующим интегральным представлением для $w_1(t - y_2)$:

$$w_1(t - y_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{(t - y_2)z - \frac{1}{3}z^3} dz, \quad (3.04)$$

где контур Γ состоит из участков от $-i\infty$ до 0 и от 0 до ∞ . Заметим, что на контуре Γ будет $\operatorname{Re}(z) \geq 0$. После подстановки (3.04) в (3.03) мы можем выполнить интегрирование по t при помощи формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(z+ix)t} v(t - y_1) dt = \\ = \exp \left\{ y_1(z + ix) + \frac{1}{3}(z + ix)^3 \right\}, \end{aligned} \quad (3.05)$$

справедливой при $\operatorname{Re}(z) \geq 0$. В результате мы получим:

$$\Phi_2 = \sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{i}{3}x^3 + ix y_1} \int_{\Gamma} e^{ixz^2 - (x^2 + y_2 - y_1)z} dz. \quad (3.06)$$

Последний интеграл легко берётся, и мы получаем окончательно:

$$\Phi_2 = e^{i\omega(x)}, \quad (3.07)$$

где

$$\omega(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x(y_1 + y_2) + \frac{(y_2 - y_1)^2}{4x}. \quad (3.08)$$

Как показано в нашей работе¹, величина ω есть фаза падающей волны, приближённо равная

$$\omega = k(R - s), \quad (3.09)$$

где R и s означают те же величины, что и в разделе 1. Таким образом интеграл Φ_1 соответствует падающей волне.

Переходим к вычислению интеграла Φ_1 . Пользуясь интегральным представлением (3.04) для обоих множителей $w_1(t - y_2)$ и $w_1(t - y_1)$ и производя интегрирование по t , мы приходим к двойному контурному интегралу, в котором после замены переменных одно интегрирование может быть выполнено. В результате получается

$$\Phi_1 = \frac{\sqrt{x}}{2\pi i} \int_C e^{i\omega(z)} \frac{dz}{\sqrt{z}(z-x)}, \quad (3.10)$$

где контур C идёт от положительно-мнимой бесконечности, пересекает вещественную ось справа от точки $z=x$ и затем идёт по лучу $\arg z = -\frac{\pi}{6}$.

Вычет интеграла (3.10) в точке $z=x$ равен, согласно (3.07), величине Φ_2 . Поэтому, если мы обозначим через C' контур, идущий аналогично C , но пересекающий вещественную ось слева от точки $z=x$, мы получим:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\sqrt{x}}{2\pi i} \int_{C'} e^{i\omega(z)} \frac{dz}{\sqrt{z}(z-x)}. \quad (3.11)$$

При помощи этих формул можно приближённо выразить функцию Φ через интегралы Френеля. Для этого применим способ стационарной фазы, учитывая, однако, что дробь $1/(z-x)$ не будет медленно меняющейся функцией.

Приравняв нулю производную от фазы $\omega(z)$, мы приходим к уравнению

$$z^4 - 2z^2(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)^2 = 0, \quad (3.12)$$

корни которого равны

$$z = \pm \sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2}. \quad (3.13)$$

Из этих четырёх корней нас интересует только наибольший положительный корень

$$z_0 = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}, \quad (3.14)$$

так как он лежит ближе всего к контуру C . Обозначим через C_0 контур, аналогичный C или C' , но пересекающий вещественную

ось в точке $z = z_0$. Применяя обозначение (2.03), положим

$$x - z_0 = x - \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} = \xi. \quad (3.15)$$

Если $\xi < 0$, то контур C_0 эквивалентен C и интеграл по нему даст Φ_1 . Если же $\xi > 0$, то контур C_0 эквивалентен C' и интеграл по нему даст Φ .

Вблизи $z = z_0$ мы имеем:

$$\omega(z) = \omega_0 - \mu^2(z - z_0)^2, \quad (3.16)$$

где

$$\omega_0 = \omega(z_0) = \frac{2}{3} y_1^{3/2} + \frac{2}{3} y_2^{3/2}, \quad (3.17)$$

$$\mu^2 = \frac{\sqrt{y_1 y_2}}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}}. \quad (3.18)$$

Для приближённого вычисления интеграла

$$I = \frac{\sqrt{x}}{2\pi i} \int_{C_0} e^{i\omega(z)} \frac{dz}{\sqrt{z}(z-x)} \quad (3.19)$$

заменяем величину $\sqrt{z}$ постоянным значением $\sqrt{z_0}$, а функцию $\omega(z)$ выражением (3.16). Положив

$$z = z_0 + p e^{-i \frac{\pi}{4}}, \quad (3.20)$$

мы можем интегрировать по p от $-\infty$ до $+\infty$. В результате получается

$$I = \sqrt{\frac{x}{z_0}} e^{i\omega_0} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2 p^2} \frac{dp}{p - \xi e^{i \frac{\pi}{4}}}. \quad (3.21)$$

Последний интеграл выражается через интегралы Френеля, причём он имеет разные аналитические выражения при $\xi > 0$ и при $\xi < 0$, а именно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2 p^2} \frac{dp}{p - \xi e^{i \frac{\pi}{4}}} = \begin{cases} f(\mu\xi) & \text{при } \xi > 0, \\ -f(-\mu\xi) & \text{при } \xi < 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

где

$$f(\alpha) = e^{-i\alpha^2 - i \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{i\alpha^2} d\alpha. \quad (3.24)$$

Легко видеть, что

$$f(\alpha) + f(-\alpha) = e^{-i\alpha^2}. \quad (3.25)$$

Вводя обычные интегралы Френеля

$$C + iS = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{i\alpha^2} d\alpha, \quad (3.26)$$

мы можем написать

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i\alpha^2 - i}}{\pi^{\frac{1}{4}}} \left\{ \left(\frac{1}{2} - C \right) + i \left(\frac{1}{2} - S \right) \right\}. \quad (3.27)$$

Асимптотическое выражение для $f(\alpha)$, справедливое при больших положительных значениях α , имеет вид:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{i}{2\alpha^3} + \dots \right). \quad (3.28)$$

Выражая интеграл I через $f(\alpha)$ и помня, что этот интеграл представляет при $\xi > 0$ функцию Φ , а при $\xi < 0$ функцию $\Phi_1 = \Phi - \Phi_2$, где Φ_2 определено (3.07), мы получаем окончательно:

$$\Phi = \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{y_1 y_2}} e^{i\omega_0} \cdot \mu f(\mu \xi) \quad (\text{при } \xi > 0), \quad (3.29)$$

$$\Phi = e^{i\omega(x)} - \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{y_1 y_2}} e^{i\omega_0} \cdot \mu f(-\mu \xi) \quad (\text{при } \xi < 0). \quad (3.30)$$

Эти выражения справедливы при условии, что оба числа $\sqrt{y_1}$ и $\sqrt{y_2}$ весьма велики (величина μ^2 будет порядка меньшего из этих чисел). Что касается величины ξ , то она может быть как конечной, так и малой, причём произведение $\mu \xi$ может быть любым (большим, конечным или малым) числом. Если ξ весьма мало (причём оно может быть любого знака), то оба выражения для Φ практически совпадают. Это видно из приближённых равенств

$$\frac{\mu^2 x}{\sqrt{y_1 y_2}} = 1 + \frac{\xi}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}} \sim 1, \quad (3.31)$$

$$\omega(x) \sim \omega_0 - \mu^2 \xi^2 \quad (3.32)$$

в соединении с формулой (3.25). При $\xi = 0$ совпадение обоих выражений для Φ будет строгим.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА Ψ

Обратимся теперь к выводу приближённых формул для интеграла Ψ . Нас интересует значение интеграла для того же случая, для которого мы вычисляли интеграл Φ , а именно, для случая, когда величины $\sqrt{y_1}$, $\sqrt{y_2}$ (и, следовательно, μ^2) весьма велики, величина же $\xi = x - \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}$ конечна. При этих условиях главным участком интегрирования будет тот, где переменная t

конечна. Но при конечном t и больших y_1 и y_2 , стоящее в (2.06) под интегралом произведение функций w_1 на показательную функцию будет равно

$$e^{ixt} w_1(t-y_1) w_1(t-y_2) = \frac{i}{\sqrt[4]{y_1 y_2}} e^{i\omega_0} \cdot e^{i\xi t} \left(1 + \frac{it^3}{4\mu^3} + O\left(\frac{1}{\mu^4}\right) \right), \quad (4.01)$$

где мы для краткости воспользовались обозначением (3.17).

Подставляя это выражение в интеграл Ψ , мы получим:

$$\Psi = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y_1 y_2}} e^{i\omega_0} \left\{ g(\xi) - \frac{i}{4\mu^3} g''(\xi) + O\left(\frac{1}{\mu^4}\right) \right\}, \quad (4.02)$$

где

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{i}{2} \cdot \int_{-\infty}^0 e^{i\xi t} \frac{w'_2(t) - qw_2(t)}{w'_1(t) - qw_1(t)} dt + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} e^{i\xi t} \frac{v'(t) - qv(t)}{w'_1(t) - qw_1(t)} dt \right\}. \quad (4.03)$$

Пользуясь свойствами функций Эйри (1.15) легко проверить, что если

$$t = t' e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad (4.04)$$

то

$$\frac{i}{2} \frac{w'_2(t) - qw_2(t)}{w'_1(t) - qw_1(t)} = \frac{v'(t') - qe^{i\frac{2}{3}\pi} v(t')}{w'_2(t') - qe^{i\frac{2}{3}\pi} w_2(t')}. \quad (4.05)$$

Подстановка (4.04) приводит первый интеграл в (4.03) к интегралу по вещественной положительной оси. Опуская штрих при t , мы получаем:

$$g(\xi) = e^{-i\frac{\pi}{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi t}{2}(\sqrt{3}+i)} \cdot \frac{v'(t) - qe^{i\frac{2}{3}\pi} v(t)}{w'_2(t) - qe^{i\frac{2}{3}\pi} w_2(t)} dt + \\ + e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{i\xi t} \cdot \frac{v'(t) - qv(t)}{w'_1(t) - qw_1(t)} dt. \quad (4.06)$$

При возрастании t функция $v(t)$ в числителе быстро убывает, тогда как функции $w_1(t)$ и $w_2(t)$ в знаменателе столь же быстро возрастают. Поэтому оба интеграла сходятся весьма быстро и могут быть вычислены по квадратурам. Функция $g(\xi)$ допускает разложение в ряд Тейлора по степеням ξ ; коэффициенты этого ряда также могут быть вычислены по квадратурам. При больших положительных значениях ξ функция $g(\xi)$ имеет асимптотическое выражение

$$g(\xi) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\xi}, \quad (4.07)$$

которое сводится к одному члену, не зависящему притом от q . Остаток будет порядка $e^{ik_1 t_1}$, где t_1 — первый корень уравнения

$$w'_1(t) - qw_1(t) = 0. \quad (4.08)$$

При больших отрицательных ξ асимптотическое выражение для $g(\xi)$ имеет вид:

$$g(\xi) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\xi} + \frac{\sqrt{-\xi}}{2} \cdot \frac{q + i\frac{\xi}{2}}{q - i\frac{\xi}{2}} e^{-\frac{i}{12}\xi^3}. \quad (4.09)$$

При подстановке этого выражения в (4.02) нужно иметь в виду, что эта формула для Ψ применима в том случае, когда поправочный член, содержащий в знаменателе μ^3 , будет мал по сравнению с главным. Чтобы оба выражения (4.02) и (4.09) были применимы, необходимо выполнение условия

$$1 \ll \xi^3 \ll \mu \quad (\xi < 0). \quad (4.10)$$

5. МНОЖИТЕЛЬ ОСЛАБЛЕНИЯ В ОБЛАСТИ КОНУСА ТЕНИ

В предыдущих параграфах мы нашли приближённые выражения для интегралов Φ и Ψ , сумма которых даёт множитель ослабления $V(x, y_1, y_2, q)$. Составляя сумму, получаем при $\xi \gg 0$

$$V = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y_1 y_2}} e^{i\omega_0} \left\{ \mu f(\mu\xi) - g(\xi) + \frac{i}{4\mu^3} g''(\xi) \right\} \quad (5.01)$$

и при $\xi \leq 0$

$$V = e^{i\omega(x)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y_1 y_2}} e^{i\omega_0} \left\{ \mu f(-\mu\xi) + g(\xi) - \frac{i}{4\mu^3} g''(\xi) \right\}. \quad (5.02)$$

Эти выражения справедливы при условии, что определяемый из равенства

$$\mu^2 = \frac{\sqrt{y_1 y_2}}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}} \quad (5.03)$$

параметр μ весьма велик, величина же

$$\xi = x - \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} \quad (5.04)$$

конечна или мала.

Напомним геометрический смысл этих величин. Согласно формулам (1.03) — (1.05) мы имеем:

$$\mu^2 = \sqrt[6]{\frac{2k^2}{a}} \cdot \frac{\sqrt{h_1 h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}, \quad (5.05)$$

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{k}{2a^3}} (s - \sqrt{2ah_1} - \sqrt{2ah_2}). \quad (5.06)$$

Таким образом, большие значения μ соответствуют малым длинам волн и относительно большим расстояниям от поверхности тела (последние должны быть всё же малы по сравнению с радиусами его кривизны). Величина ξ пропорциональна считаемому вдоль (точнее, параллельно) поверхности тела расстоянию от геометрической границы тени (конуса тени). При $\xi < 0$ величина $\mu^2 \xi^2$ приближённо равна разности фаз отражённой и падающей волны. Значение $\xi = 0$ соответствует границе тени, положительные значения ξ соответствуют области тени, а отрицательные — освещённой области.

Наши формулы дают переход от света к тени на относительно больших расстояниях от поверхности тела. Так как функции f и g и их производные по своим аргументам будут при конечных значениях аргументов порядка единицы, то при больших значениях μ главным членом в (5.01) будет член $\mu f(\mu \xi)$. Этот член пропорционален интегралу Френеля. Он представляет быстро меняющуюся функцию от ξ , так как аргумент в интеграле Френеля есть $\mu \xi$, где μ — большое число. Таким образом, главный член в выражении для V даёт диффракцию Френеля. Но на эту диффракционную картину налагается фон, представленный функцией $g(\xi)$, которая по сравнению с главным членом меняется медленно. Этот фон зависит от материала диффрагирующего тела (поскольку $g(\xi)$ зависит от q), тогда как френелевский член от него не зависит.

Полученные здесь формулы для множителя ослабления должны при удалении в ту и в другую сторону от конуса тени переходить в выведенные нами ранее формулы для теневой и для освещённой областей. Проверим это. В области тени мы должны получить убывание амплитуды по показательному закону, а в освещённой области — отражательную формулу. Так как в формуле (5.01) и в асимптотическом выражении (4.07) для $g(\xi)$ члены, убывающие при больших положительных ξ , по показательному закону, вследствие их малости, не учитываются, то мы должны в нашем приближении получить в области тени нуль. В самом деле, из асимптотического выражения (3.28) для функции Френеля $f(\infty)$

следует:

$$\mu f(\mu \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \left(\frac{1}{\xi} - \frac{i}{2\mu^2 \xi^3} \right). \quad (5.07)$$

С другой стороны, формула (4.07) даёт:

$$g(\xi) - \frac{i}{4\mu^2} g''(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \left(\frac{1}{\xi} - \frac{i}{2\mu^2 \xi^3} \right), \quad (5.08)$$

т. е. то же самое выражение. Таким образом, при больших положительных ξ выражение (5.01) для V действительно обращается в наше приближение в нуль.

Рассмотрим теперь большие отрицательные значения ξ . В формуле (5.02) первый член асимптотического выражения (4.09) для $g(\xi)$ сокращается с $\mu f(-\mu \xi)$, а второй член (содержащий показательную функцию) даёт:

$$V = e^{i\omega(x)} - \frac{\sqrt{x}}{4\mu^2 y_1 y_2} e^{i\omega_0} \cdot \frac{\sqrt{-\xi}}{2} \cdot \frac{q + i\frac{\xi}{2}}{q - i\frac{\xi}{2}} e^{-\frac{i}{12}\xi^3}. \quad (5.09)$$

С другой стороны, как показано в нашей работе¹, в освещённой области имеет место отражательная формула

$$V = e^{i\omega} \cdot \left(1 - \frac{q - ip}{q + ip} \cdot \sqrt{\frac{p}{p + p_1}} e^{2ip_1 p^2} \right) \quad (5.10)$$

(формула (4.31) указанной работы). Здесь $\omega = \omega(x)$, величина p (пропорциональная косинусу угла падения) определяется из уравнения

$$\sqrt{y_1 + p^2} + \sqrt{y_2 + p^2} = 2p + x, \quad (5.11)$$

а величина p_1 равна

$$p_1 = 2p + x - \frac{1}{x}(y_1 + y_2). \quad (5.12)$$

В том приближении, в каком справедлива формула (5.09),

$$p = -\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{16\mu^2} \sim -\frac{\xi}{2}, \quad (5.13)$$

$$p_1 = 2\mu^2 + \xi - \frac{2\mu^2 \xi}{x} \sim 2\mu^2. \quad (5.14)$$

Пользуясь этими приближёнными равенствами, нетрудно проверить, что формула (5.09) представляет приближённый вид отражательной формулы (5.10).

Таким образом, формулы (5.01) и (5.02), выведенные для области, близкой к конусу тени, смыкаются с формулами, справедливыми в областях, примыкающих с обеих сторон к конусу тени и выведенными в наших предыдущих работах.

В заключение сделаем несколько замечаний по поводу выведенных здесь формул.

Как исходное выражение для V , так и приближённые формулы допускают при соответствующем изменении выражения для фазы падающей волны, переход к случаю плоской волны. Этот переход сводится к тому, что мы увеличиваем x и $\sqrt{y_2}$ до бесконечности, оставляя их разность конечной. Но, как показано в наших работах ² и ³, в случае плоской волны наши исходные формулы справедливы не только для шара, но и для тела произвольной формы. Поэтому выведенные здесь приближённые формулы, содержащие интегралы Френеля, можно считать доказанными также и для тела произвольной формы. Представляется также весьма вероятным, что полученная здесь картина диффракции (диффракция Френеля, на которую налагается фон) имеет место, по крайней мере качественно, и на больших расстояниях от тела. При этом следует ожидать, что фон становится слабее по мере удаления от тела.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, Поле от вертикального и горизонтального диполя, приподнятого над поверхностью земли, ЖЭТФ **19**, 916 (1949).
 2. В. А. Фок, Поле плоской волны вблизи поверхности проводящего тела, Известия АН СССР, сер. физ. **10**, 171 (1946).
 3. В. А. Фок, Законы отражения Френеля и законы диффракции, УФН **36**, 308 (1948).
-