

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

СМЕЩЕНИЕ ТЕРМОВ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ И АНОМАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ЭЛЕКТРОНА

Я. А. Смородинский

1. СМЕЩЕНИЕ ТЕРМОВ ВОДОРОДА И ГЕЛИЯ

Развитие техники радиоспектроскопии атомов и молекул привело к резкому увеличению точности измерений тонкой и сверхтонкой структур в спектрах атомов и молекул.

Одной из самых интересных задач, которую можно было поставить благодаря такому увеличению точности, была дальнейшая проверка релятивистского волнового уравнения для одного электрона (уравнения Дирака).

Объектом исследования была выбрана простейшая система — атом водорода. Хорошо известно, что согласно квантовой механике энергия электрона в водородном (или водородоподобном) атоме с учётом релятивистских эффектов определяется формулой

$$W = mc^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha Z}{n - k + (\hbar^2 - \alpha^2 Z^2)^{1/2}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.1)$$

где n — главное квантовое число, $k = j + \frac{1}{2}$, j — квантовое число полного орбитального момента количества движения (внутреннее квантовое число), Z — заряд ядра, $\alpha = e^2/\hbar c$.

Если пренебречь членами порядка $1/c^4$ (эффекты такой величины не могут быть обнаружены экспериментально современными методами), то энергия (1.1) может быть записана в виде:

$$W \approx mc^2 - \frac{RZ^2}{n^2} - R \frac{\alpha^2 Z^4}{n^3} \left(\frac{1}{k} - \frac{3}{4n} \right). \quad (1.2)$$

Здесь $R = \frac{me^4}{2\hbar^2}$ — потенциал ионизации водорода в нерелятивистской теории (13,5 eV). Первый член в этой формуле представляет энергию

покая, второй — энергию терма в нерелятивистской теории и третий — релятивистскую поправку.

Замечательной особенностью формулы (1.1) и, конечно, (1.2) является независимость энергии уровня от орбитального квантового числа. Это обстоятельство приводит к тому, что термы водородоподобного атома оказываются двукратно вырожденными*) соответственно двум возможным значениям l при заданном j :

$$l = j \pm \frac{1}{2}.$$

Большое количество опытов, посвящённых исследованию водородного спектра, всегда подтверждало как факт существования вырождения, так и количественное согласие с формулой (1.2). Существовавшие указания^{1,2} на возможные расхождения опыта с теорией были не вполне убедительны, так как расхождение лежало в пределах экспериментальных ошибок.

Впервые несогласие теории с экспериментом было доказано в 1947 году Лэмбом и Ризерфордом³, исследовавшими структуру вырожденного терма ($2^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$) у атома водорода.

В этих опытах использован тот факт, что когда электрон находится на уровне $2^2S_{1/2}$, состояние атома является метастабильным. Действительно, единственный уровень с меньшим главным квантовым числом есть уровень $1^2S_{1/2}$, но переход на этот уровень с испусканием одного кванта запрещён, так как при этом не меняется квантовое число l . Переход же с испусканием двух квантов имеет ничтожную вероятность: отвечающее этому переходу время жизни равно примерно $1,4 \cdot 10^{-1}$ сек., в то время как время жизни возбуждённого атома в P -состоянии равно $1,6 \cdot 10^{-9}$ сек.

Исследование переходов из метастабильного состояния $2^2S_{1/2}$ и было проведено в опытах Лэмба и Ризерфорда.

Пучок атомов водорода облучался электронным пучком**), после чего атомы водорода попадали на детектор, который был устроен так, что мог регистрировать только атомы, находящиеся в возбуждённом (метастабильном) состоянии***).

На пути атомного пучка помещалось постоянное магнитное поле, а в направлении, перпендикулярном к нему, — поле высокой частоты, и измерялась (при нескольких значениях частоты) величина постоянного поля, в котором происходит резонансный переход на уровни $2^2P_{3/2}$ и $2^2P_{1/2}$. Эти переходы обнаруживались благодаря тому, что

*) Кроме термов $1^2S_{1/2}$, $2^2P_{3/2}$ и других термов, у которых l имеет максимально возможное при заданном n значение, а моменты количества движения спина и орбиты параллельны друг другу.

**) Интенсивность электронного пучка была достаточна для того, чтобы перевести в метастабильное состояние примерно одну стомиллионную часть атомов водорода.

***) Детектор представлял собой металлическую мишень, из которой за счёт энергии возбуждения падающих атомов выбивались электроны.

атомы, попав в новое, уже не метастабильное состояние, испускают кванты и переходят в нормальное состояние, после чего они перестают регистрироваться детектором. Таким образом, при измерении детектором величины потока возбуждённых атомов в зависимости от величины внешнего поля будет обнаруживаться минимум при таком значении поля, при котором происходят резонансные переходы.

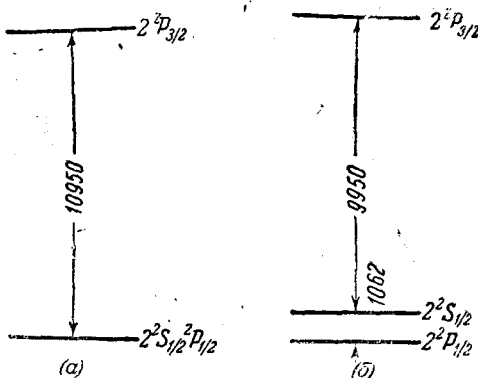
Эти резонансные переходы происходят тогда, когда энергия квантов высокочастотного поля $h\nu$ становится равной разности энергий двух уровней. Выражение для разности энергий имеет вид

$$\Delta W_H = (\Delta W)_0 + a_{m,m_2} H, \quad (1.3)$$

где $(\Delta W)_0$ — расщепление терма в отсутствии поля, a_{m,m_2} — коэффициент, зависящий от проекций на направление внешнего поля магнитных моментов атома в обоих состояниях (характеризуемых магнитными квантовыми числами m_1 и m_2), H — внешнее поле.

Из (1.3) видно, что ΔW_H линейно зависит от H , и график зависимости частоты резонансного поля от H должен представлять собой прямую линию, пересечение которой с осью ν даёт искомую величину расщепления $(\Delta W)_0$.

На рисунке приведено расположение трёх термов водородного атома (без поля) с $n=2$, полученное в первых опытах Лэмба и Ризерфорда. Рядом для сравнения приведено расположение тех же термов согласно уравнению Дирака. Расстояния между термами даны непосредственно в частотах (в $Mгц$ *). Измеренное дублетное расщепление, согласно последним измерениям, оказалось равным $1062 \pm \pm 5 Mгц$ **).



Расположение термов водорода (при $n=2$) согласно теории Дирака (а) и определённое экспериментально (б). Расстояния даны в мегагерцах.

*) $1 Mгц = 0,33 \cdot 10^{-4} cм^{-1} = 4,1 \cdot 10^{-9} eV$. Терм $2P_{1/2}$ оказался лежащим ниже терма $2S_{1/2}$; поэтому, строго говоря, возможен переход $2S_{1/2} \rightarrow 2P_{1/2}$ и в отсутствии поля. Однако, так как расщепление мало, а вероятность перехода пропорциональна кубу расстояния между термами, то эта вероятность очень мала (время жизни порядка нескольких лет).

**) Отметим, что в этой последней работе расщепление измерялось как для водорода, так и для дейтерия. В обоих случаях оно оказалось одинаковым. При этом измерялась не интенсивность пучка, а наблюдался непосредственно квант, излучаемый атомом при переходе из метастабильного состояния в нормальное.

Кроме водорода смещение S -терма наблюдалось также в спектре однократно ионизованного гелия (He II).

Измерения Мака и Остерна⁵ дали для смещения терма $3^2S_{1/2}$ величину $3390 \pm 420 \text{ Мгц}$.

Смещение терма $2^2S_{1/2}$ измерялось Фаулесом⁶ и более точно Скинером и Лэмбом⁷. Последние авторы дают для него значение $14\,100 \pm 300 \text{ Мгц}$.

2. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ

Причины расхождения между теорией и экспериментом были указаны Вейскопфом, Оппенгеймером и Швингером (ср.⁸) и состоят в пренебрежении эффектами взаимодействия электрона с полем излучения («нулевыми колебаниями» в вакууме*).

Если мы рассматриваем уравнение Дирака для свободного электрона, то, строго говоря, мы должны включать в это уравнение члены, учитывающие взаимодействие электрона с полем излучения вакуума.

Говоря языком квантовой теории излучения, электрон может виртуально излучать и поглощать кванты любой частоты. Учёт процессов**) такого рода, как известно, приводит к расходящимся интегралам в выражении для энергии электрона, и потому соответствующие члены отбрасывались. В обычных задачах квантовой теории излучения считалось само собой разумеющимся, что имеет смысл производить вычисления только до таких приближений, в которых не появляются бесконечные интегралы. Такая постановка задачи фактически эквивалентна пренебрежению эффектами взаимодействия с полем вакуума. Можно, однако, учесть это взаимодействие, по крайней мере в первом приближении, если рассуждать следующим образом⁸.

Рассмотрим электрон в кулоновом поле. Для простоты рассуждений будем считать задачу нерелятивистской. Если бы никакого взаимодействия с полем излучения не было, то мы получили бы для энергии уровня обычную величину $R \frac{1}{n^2}$. Если теперь учесть возможность излучения и поглощения виртуального кванта, то к этому выражению прибавится расходящееся выражение, пропорциональное α . Можно, однако, придать этому выражению физический смысл, если обратить внимание на то, что аналогичное расходящееся выражение

*) Аналогичные идеи были независимо разработаны Томонага и его сотрудниками.

**) Так как взаимодействие электрона с полем пропорционально (в безразмерных единицах) $e/(\hbar c)^{1/2}$, то такой процесс второго порядка (излучение и последующее поглощение виртуального кванта) даёт в гамма-кванте члены, пропорциональные $e^2/\hbar c$.

получится, если мы будем вычислять во втором приближении энергию свободного электрона.

Этот последний результат может иметь физический смысл только в том случае, если мы примем, что расходимость в существующей теории связана с неправильным учётом взаимодействия с квантами очень большой энергии и что некоторая будущая теория даст для этого выражения конечный результат.

Если это так, то мы должны считать, что параметр μ (механическая масса), входящий в волновое уравнение $H\psi = \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta\psi + U\psi = E\psi$, представляет собой не полную массу электрона, а лишь её часть. Полная же масса электрона получается только после прибавления к ней членов, происходящих от учёта взаимодействия электрона с полем вакуума (электромагнитная масса). А так как на опыте можно наблюдать только полную массу, то само разделение её на две части бессмысленно. Поэтому и при вычислении всех других эффектов должна появляться именно полная масса, а не только её конечная часть — механическая масса. При этом можно надеяться что бесконечные части, возникающие при вычислении этих эффектов являются не чем иным, как результатом появления формально бесконечной электромагнитной массы.

В случае электрона в кулоновом поле можно попытаться отождествить расходящуюся часть энергии с электромагнитной массой, и считать поправкой к величине терма разность энергий взаимодействия связанного и свободного электронов с полем излучения. При этом мы должны игнорировать тот факт, что оба выражения бесконечны, и интересоваться лишь тем, будет ли конечна их разность. Как показал Бете⁸, таким путём получается действительно конечное выражение, совпадающее с экспериментом.

Вывод Бете состоит в следующем. Обычная теория излучения показывает, что теория взаимодействия электрона с электромагнитным полем вакуума, находящегося в состоянии «0», определяется расходящимся интегралом

$$W = - \frac{2e^2}{3\pi\hbar c^3 m^2} \int_0^K k dk \cdot \sum_n \frac{|(0|p|n)|^2}{E_n - E_0 + k}, \quad (2.1)$$

где $(0|p|n)$ — матричный элемент импульса, E_0 и E_n — энергии в начальном и «промежуточном» состояниях; суммирование производится по всем промежуточным состояниям.

Верхний предел интегрирования обозначен через K . Формально $K \rightarrow \infty$, однако при больших волновых векторах нерелятивистская теория уже неприменима, поэтому вопрос о верхнем пределе будет рассмотрен отдельно.

Мы должны рассмотреть разность выражений (2.1), вычисленных для свободного и связанного электронов.

Для свободного электрона импульс, как известно, имеет только диагональные элементы (волновая функция — плоская волна с заданным волновым вектором), поэтому для него *)

$$W_{\text{своб}} = - \frac{2e^2}{3\pi\hbar c^3 m^2} \int_0^K (0|p^2|0) dk. \quad (2.2)$$

Для связанного электрона запишем (2.1) в виде

$$W_{\text{связ}} = - \frac{2e^2}{3\pi\hbar c^3 m^2} \left[\int_0^K dk (0|p^2|0) + \right. \\ \left. + \int_0^K dk \sum_n |(0|p|n)|^2 \cdot \left(\frac{k}{E_n - E_0 + k} - 1 \right) \right]. \quad (2.4)$$

Выбирая импульсы свободного и связанного электронов одинаковыми и составляя разность $W_{\text{связ}} - W_{\text{своб}}$, мы получим:

$$W' = W_{\text{связ}} - W_{\text{своб}} = \frac{2e^2}{3\pi\hbar c^3 m^2} \int_0^K \sum_n \frac{|(0|p|n)|^2 (E_n - E_0)}{E_n - E_0 + k} dk. \quad (2.5)$$

Пусть K много больше всех возможных разностей энергий $E_0 - E_n$; тогда, интегрируя по k , получим:

$$W' = \frac{2e^2}{3\pi\hbar c^3 m^2} \sum_n |(0|p|n)|^2 (E_n - E_0) \ln \frac{K}{|E_0 - E_n|}. \quad (2.6)$$

Из этого выражения видно, что верхний предел интеграла входит только под знаком логарифма. Если предположить, что при учёте релятивистских эффектов интеграл окажется сходящимся (что, как это будет видно из дальнейшего, действительно имеет место) и что потому значения k , превышающие mc^2 , в действительности мало сказываются в интеграле, то благодаря сравнительно малой чувствительности (2.6) к точному значению границы обрезания можно положить

$$K \approx mc^2. \quad (2.7)$$

При таком значении K аргумент логарифма оказывается очень большим, и можно, заменив $\ln|E_0 - E_n|$ средним значением $[\ln|E - E_0|]_{\text{ср}} = \ln(\Delta E)_{\text{ср}}$, вынести логарифм за знак суммы.

*) Согласно правилам умножения матриц (эрмитовых)

$$\sum_n (0|p|n) \overline{(0|p|n)} = \sum_n (0|p|n) (n|p|0) = (0|p^2|0). \quad (2.3)$$

Тогда для вычисления (2.6) останется найти только значение суммы

$$A = \sum |(0|p|n)|^2 (E_n - E_0). \quad (2.8)$$

Для того чтобы вычислить эту сумму, заметим, что матричный элемент $(0|p|n)$ содержит множитель

$$\exp \left[-\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_n) \right].$$

Поэтому

$$(0|p|n) (E_n - E_0) = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} (0|p|n) = \frac{\hbar}{i} \left(0 \left| \frac{dp}{dt} \right| n \right), \quad (2.9)$$

согласно определению производной от матрицы. Сумма (2.8) преобразуется тогда к виду:

$$A = \frac{\hbar}{2i} \left(0 \left| \frac{dp^2}{dt} \right| 0 \right). \quad (2.10)$$

Согласно правилу дифференцирования операторов по времени

$$\frac{d}{dt} p^2 = \frac{i}{\hbar} (Hp^2 - p^2H), \quad (2.11)$$

где

$$H = \frac{p^2}{2m} - eV \quad (2.12)$$

— гамильтониан. Отсюда

$$\frac{d}{dt} p^2 = -\frac{ie}{\hbar} (Vp^2 - p^2V) = ie\hbar (V\Delta - \Delta V), \quad (2.13)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Умножая (2.13) справа и слева на волновую функцию электрона ϕ и интегрируя по всему пространству для получения матричного элемента, получим:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} e\hbar^2 \int \phi [V\Delta\phi - \Delta(V\phi)] d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} e\hbar^2 \int \phi^2 \Delta V d\tau = 2\pi\hbar^2 e^2 Z |\phi(0)|^2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

так как, согласно уравнению Пуассона, $\Delta V = -4\pi eZ \delta(\mathbf{r})$, где Z — заряд ядра; $\phi(0)$ — значение волновой функции электрона в начале координат.

Для смещения уровня водородоподобного атома получаем согласно (2.6):

$$W' = \frac{4Ze^3}{3} \left(\frac{e^3}{\hbar c} \right) \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \ln \frac{mc^2}{(\Delta E)_{\text{ср}}} |\phi(0)|^2. \quad (2.15)$$

Как известно, в нерелятивистской теории $\phi(0)$ отлично от нуля

только для S -термов. Поэтому только эти термы должны обнаруживать смещение уровней. Учёт релятивистских эффектов показывает, что у других термов будет существовать лишь очень малое смещение, связанное с наличием у электрона аномального магнитного момента (см. § 4).

Так как смещение всех остальных термов значительно меньше смещения S -терма, то эти эффекты незаконно рассматривать в рамках нерелятивистской теории. Они будут рассмотрены поэтому ниже. Для водородоподобного атома

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{Z}{na} \right)^3, \quad (2.16)$$

где

$$a = \hbar^2/me^2.$$

Подставляя в (2.15), получаем:

$$W' = \frac{4}{3\pi} \frac{me^{10}}{c^3 \hbar^5} \frac{Z^4}{n^3} \ln \frac{mc^2}{(\Delta E)_{\text{cp}}}, \quad (2.17)$$

или, вводя потенциал ионизации водорода $R = me^4/2\hbar^2$, получаем окончательно:

$$W' = \frac{8}{3\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 R \frac{Z^4}{n^3} \ln \frac{mc^2}{(\Delta E)_{\text{cp}}}. \quad (2.18)$$

Для терма водорода $2^2S_{1/2}$ $Z=1$, $n=2$ и, согласно вычислениям Бете, $(\Delta E)_{\text{cp}} = 16,7R^*$ ($R = 13,5$ eV). В результате получаем:

$$W' = 1040 \text{ Мгц},$$

что находится в прекрасном согласии с опытом ($1062 \pm 5 \text{ Мгц}$)**).

Для $2^2S_{1/2}$ терма He теоретическое значение должно быть примерно в 13 раз больше ($Z^4 = 16$ и несколько меняется $(\Delta E)_{\text{cp}}$). Как мы видели, опыт даёт 14100 ± 300 , что также хорошо согласуется с теорией. Наконец, последнее из опубликованных значений — смещение терма $3^2S_{1/2}$ He II, равное $3390 \pm 420 \text{ Мгц}$, также находится в согласии с теорией, дающей для него значение 3900 Мгц .

Прежде чем перейти к обсуждению полученного результата, мы покажем весьма наглядный путь для получения формулы (2.18), ука-

*) Бете позже (Росопо Manor Conference, Март, 1948) дал исправленное значение $17,8 R$, однако ввиду неточности формулы уточнения такого рода здесь излишни (ср. § 4).

**) В 1938 г. Блохинцев в докладе на теоретическом семинаре Физического института АН СССР указал на то, что взаимодействие с полем излучения может привести к смещению уровня. Однако в своём выводе формулы он осуществил обрезание высоких частот тем, что учитывал лишь переходы на близкие уровни, что, конечно, не могло дать однозначного результата. Благодаря этому формула, полученная Блохинцевым, отличается от (2.18) лишним множителем $\frac{1}{3}$ и тем, что вместо $(\Delta E)_{\text{cp}} = 16,7 R$ у него стоит $68 R$.

занный Велтоном¹⁰ и не связанный явным образом с вычитанием расходящихся интегралов.

Характерной чертой поля излучения вакуума являются нулевые колебания. Как известно, состояние этого поля, имеющее минимальную энергию, есть такое состояние, в котором каждое нормальное колебание имеет энергию $\frac{1}{2} h\nu = \frac{1}{2} \hbar c k$ (k — волновой вектор). В результате взаимодействия таких колебаний с электроном координата электрона не остаётся постоянной, а флуктуирует вокруг некоторого положения равновесия. Если теперь на электрон действует ещё какое-либо поле $V(r)$, то флуктуация координаты приводит к тому, что взаимодействие электрона с полем усредняется по некоей малой области. В результате этого энергия взаимодействия также изменяется.

Нетрудно получить величину изменения энергии. Пусть положение электрона соответствует координате q . Обозначим величину смещения через Δq и разложим потенциал $V(q + \Delta q)$ по степеням Δq :

$$V(q + \Delta q) = \left\{ 1 + \Delta q \cdot \nabla + \frac{1}{2} (\Delta q \cdot \nabla)^2 + \dots \right\} V(q). \quad (2.19)$$

Усредняя это выражение по всем значениям Δq и замечая, что

$$(\Delta q)_{\text{ср}} = 0, \quad (\Delta q \cdot \nabla)_{\text{ср}}^2 = \frac{1}{3} (\Delta q)_{\text{ср}}^2 \Delta,$$

получим, ограничиваясь только членами второго порядка по отношению к Δq (что соответствует, как мы увидим, приближению Бете),

$$[V(q + \Delta q)]_{\text{ср}} = \left\{ 1 + \frac{1}{6} (\Delta q)_{\text{ср}}^2 \Delta + \dots \right\} V(q). \quad (2.20)$$

Таким образом, поправка к потенциалу взаимодействия оказывается равной

$$\delta V = [V(q + \Delta q)]_{\text{ср}} - V(q) = \frac{1}{6} (\Delta q)_{\text{ср}}^2 \cdot \Delta V. \quad (2.21)$$

В случае атома водорода

$$\Delta V(r) = -4\pi e\hat{\epsilon}(r). \quad (2.22)$$

Для того чтобы получить смещение уровня, надо, подставив в (2.21) значение (2.22), умножить его на заряд электрона ($-e$) и на квадрат модуля волновой функции $|\psi(q)|^2$ и проинтегрировать по всему пространству.

В результате получим:

$$W' = \frac{2\pi}{3} e^2 |\psi(0)|^2 (\Delta q)_{\text{ср}}^2. \quad (2.23)$$

Остаётся вычислить квадратичную флуктуацию $(\Delta q)_{\text{ср}}^2$. Так как мы считаем скорость электрона малой (нерелятивистской), то действием

магнитного поля можно пренебречь, а потому уравнение движения электрона имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{q}} = e\mathbf{E}, \quad (2.24)$$

где $\mathbf{E}$ — поле, связанное с нулевыми колебаниями вакуума.

Разлагая E в интеграл Фурье:

$$E = \int E_{\omega} \cos \omega t d\omega, \quad (2.25)$$

можем записать решение (2.24) в виде (полагая $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0$ при $t = 0$ и обозначая поэтому решение через $\Delta\mathbf{q}$):

$$\Delta\mathbf{q} = -\frac{e}{m} \int \frac{E_{\omega}}{\omega^3} \cos \omega t d\omega. \quad (2.26)$$

Возводя в квадрат и усредняя по времени, получим обычным путём:

$$(\Delta\mathbf{q})_{\text{ср}}^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} \int \frac{1}{\omega^4} E_{\omega}^2 d\omega. \quad (2.27)$$

Далее, так как энергия поля равна $(E^2 + B^2)_{\text{ср}}/8\pi = (E^2)_{\text{ср}}/4\pi$, а

$$\frac{1}{4\pi} (E^2)_{\text{ср}} = \frac{1}{8\pi} \int E_{\omega}^2 d\omega, \quad (2.28)$$

то E_{ω}^2 можно легко определить, если приравнять последнее выражение интегралу

$$\int \left(\frac{1}{2} \hbar \omega \right) \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega, \quad (2.29)$$

где первый множитель есть энергия, связанная с частотой ω , а второй — число состояний с частотой ω , приходящихся на интервал $d\omega$ *).

Приравнявая (2.29) правой части (2.28), найдём:

$$E_{\omega}^2 d\omega = \frac{4\hbar\omega^3}{\pi c^3} d\omega. \quad (2.30)$$

Подставляя, наконец, это выражение в (2.27), получаем:

$$(\Delta\mathbf{q})_{\text{ср}}^2 = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \int \frac{dk}{k}. \quad (2.31)$$

Интеграл, стоящий в правой части, логарифмически расходится. Однако эта расходимость уже не связана с принципиальными трудностями теории излучения, а явилась результатом сделанных нами предположений. С расходимостью на верхнем пределе мы уже встречались выше в выводе Бете. Так же как и там, она связана с нерелятивистским рассмотрением задачи, и для её ликвидации мы должны

*) Число состояний равно объёму шарового слоя в пространстве волновых векторов $4\pi k^2 dk$ ($k = \omega/c$), умноженному на число поляризаций 2 и делённому на объём фазовой ячейки, отвечающей одному состоянию $(2\pi\hbar)^3$.

просто в качестве верхнего предела взять величину

$$k_{\text{макс}} \approx mc/\hbar.$$

Расходимость на нижнем пределе происходит от того, что электрон рассматривается как свободный, в то время как при рассмотрении его взаимодействия с малыми частотами необходимо учитывать влияние связи электрона в атоме.

Этот эффект рассмотрен в дополнении I, где дано также и более строгое рассмотрение флуктуации координаты электрона при его взаимодействии с полем излучения.

Результатом такого учёта связи будет появление в интеграле некоторой нижней границы $k_{\text{мин}}$, связанной, как и в выводе Бете, со средней энергией возбуждения.

Таким образом, с точностью до некоторого множителя под знаком логарифма

$$(\Delta q)_{\text{ср}}^2 = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \ln \frac{mc}{\hbar k_{\text{мин}}}, \quad (2.32)$$

и подставляя в (2.23), получаем:

$$W' = \frac{4}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \ln \frac{mc}{\hbar k_{\text{мин}}} |\psi(0)|^2, \quad (2.33)$$

что совпадает с выражением Бете, если положить

$$\hbar k_{\text{мин}} = (\Delta E)_{\text{ср}}. \quad (2.34)$$

Таким образом, мы видим, что уже в нерелятивистской квантовой механике можно развить теорию, которая даёт результат, достаточно хорошо совпадающий с опытом, несмотря на то, что по существу задача является релятивистской, так как при больших частотах поля электрон будет получать при отдаче скорость, которая уже не будет малой по сравнению со скоростью света.

Однако благодаря тому, что в рассматриваемом эффекте играют главную роль средние частоты, нерелятивистские вычисления, оказывается, приводят лишь к небольшой неточности. Тем не менее для обоснования операции «обрезания» высоких частот необходимо построить релятивистскую теорию эффекта.

Как мы увидим дальше, построение такой теории приводит к обнаружению новых эффектов, некоторые из которых уже получили экспериментальные подтверждения.

3. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ

Для того чтобы выяснить возможность построения релятивистской теории, которая бы основывалась на аналогичном учёте электромагнитной массы (бесконечной), рассмотрим уравнение Дирака для свободного электрона

$$H\psi = (\alpha \mathbf{p} + \beta mc^2)\psi = E\psi, \quad (3.1)$$

где, как обычно, α и β — четырёхрядные матрицы, p — оператор импульса, а ψ — четырёхкомпонентная волновая функция.

Если мы учтём взаимодействие с полем излучения вакуума, то собственные значения энергии обратятся в бесконечность. Для того чтобы теория не потеряла физического смысла, будем считать, как и раньше, что масса электрона (конечная, измеряемая на опыте) складывается из двух слагаемых

$$m = \mu + \Delta\mu, \quad (3.2)$$

где μ — параметр, входящий в уравнение (3.1), а $\Delta\mu$ — электромагнитная масса.

При этом оба члена в (3.2) в существующей теории бесконечны, и лишь их сумма имеет конечное значение.

Тогда уравнение для свободного электрона должно быть записано не в виде (3.1), а в виде

$$H\psi = (\alpha p + \beta mc^2 - \beta \Delta\mu c^2) \psi = E\psi. \quad (3.3)$$

При учёте взаимодействия с полем излучения член $\beta \Delta\mu$, по определению, сократится, и уравнение примет вид (3.1), только с полной массой вместо μ .

Так как взаимодействие с электромагнитным полем считается в теории малым, то если только интеграл, входящий в $\Delta\mu$, не окажется при его вычислении в будущей последовательной теории аномально большим*), можно рассматривать $\beta \Delta\mu c^2$ в качестве возмущения.

Но тогда, рассматривая по теории возмущений какую-либо задачу о взаимодействии электрона с внешним полем, мы должны в качестве возмущения в гамильтониане брать сумму возмущения, связанного с этим внешним полем, и возмущения — $\beta \Delta\mu c^2$, после чего учитывать уже при вычислениях и взаимодействие с полем излучения вакуума. При такой постановке задачи все бесконечные члены сокращаются (по крайней мере во втором приближении теории возмущений относительно взаимодействия с полем излучения), а остающиеся члены должны рассматриваться как имеющие реальный физический смысл.

Такая программа была предложена и развита Швингером¹³ и Вейскопфом¹⁴ и была применена к ряду задач^{13, 15, 16}, причём была показана возможность вычисления таких эффектов, которые до этого считались не поддающимися теоретическому рассмотрению.

К сожалению, последовательное проведение даже такой формальной программы оказывается невозможным. Трудность, на которую наталкивается теория, состоит в том, что выражение для $\Delta\mu$ оказывается, как мы увидим ниже, релятивистски неинвариантным.

*) Так как расходимость логарифмическая, то, для того чтобы $\Delta\mu$ оказалось большим (больше m), надо, чтобы эффективный верхний предел частот (в единицах $mc^2/\hbar$) был больше, по порядку величины, чем e^{137} , что мало вероятно.

Рассмотрим прежде всего выражение для электромагнитной массы (вернее для добавки к энергии ΔE), происходящей от взаимодействия с полем излучения. При этом, так как согласно обычной схеме все электронные состояния с отрицательной энергией считаются заполненными, то энергия ΔE определяется как разность энергии системы, состоящей из рассматриваемого электрона плюс электроны на заполненных отрицательных уровнях, и энергии одних электронов вакуума¹¹.

К сожалению, подробные выкладки при вычислении релятивистских эффектов очень длинны, и мы в дальнейшем будем их в значительной мере опускать.

Можно показать (ср. ¹⁹), что электромагнитная энергия во втором приближении определяется как диагональный матричный элемент от следующего оператора:

$$\frac{e^3}{\hbar c} \frac{\hbar^2 c^2}{4\pi^2} \int \frac{dk}{k} \left[\frac{2\beta\mu c^2 - E_f + c\alpha p_f}{E_f(E_f - E_0 + \hbar ck)} + \frac{2\beta\mu c^2 + E_f + c\alpha p_f}{E_f(E_f + E_0 + \hbar ck)} \right], \quad (3.4)$$

где p_f и E_f — импульс и энергия электрона в «промежуточном» состоянии, E_0 — энергия в исходном состоянии, а интегрирование ведётся по всем волновым векторам виртуальных квантов. При этом

$$p_f = p_0 - \hbar k, \quad (3.5)$$

где p_0 — импульс электрона в начальном состоянии.

Составляя диагональный матричный элемент от (3.4) и производя довольно длинные вычисления, приходим к следующему выражению для электромагнитной энергии:

$$\Delta E = \frac{e^3}{\pi \hbar c} \left\{ 2 \ln \frac{2\hbar K}{\mu c} (0 | \beta \mu c^2 | 0) + \left(\frac{1}{2} \ln \frac{2\hbar K}{\mu c} + \frac{1}{12} \right) (0 | c\alpha p | 0) - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{2} \ln \frac{2\hbar K}{\mu c} + \frac{1}{4} \right) E_0 \right\}. \quad (3.6)$$

В этом выражении мы обрезали для простоты расходящиеся интегралы на некотором большом волновом векторе K ; формальный результат (расходящийся) получается при $K \rightarrow \infty$. Такое обрезание не имеет физического смысла из-за его релятивистской неинвариантности, и поэтому во всех формулах мы должны произвести этот предельный переход. Излагаемые здесь методы основываются на том, что величина K выпадает из окончательных результатов.

Если теперь воспользоваться уравнением Дирака и заменить $c\alpha p_0$ на $E_0 - \mu c^2$, то мы получим:

$$\Delta E = \frac{1}{\pi} \frac{e^3}{\hbar c} \left\{ \frac{3}{2} \ln \frac{2\hbar K}{\mu c} + \frac{1}{12} \right\} (0 | \beta \mu c^2 | 0) + \frac{1}{6} E_0. \quad (3.7)$$

Мы видим, что оператор электромагнитной энергии не может быть представлен в виде $\beta \Delta \mu c^2$, как это необходимо для инвариантности

изложенной выше схемы. Кроме члена такого вида в выражение (3.7) входит ещё член $\frac{1}{6} E_0$, который и нарушает инвариантность.

Можно было надеяться, что хотя таким образом и нельзя получить теории электромагнитной массы, однако остальные эффекты всё же могут быть вычислены инвариантным образом благодаря тому, что неинвариантный член $\frac{1}{6} E_0$ является диагональным и потому не вызывает дополнительных переходов; бесконечный же член имеет как раз необходимый вид и пропорционален β .

Однако такая точка зрения оказывается также неверной. Действительно, в силу соотношения

$$E_0 = \mathcal{E} \mathbf{a} \mathbf{p} - \beta \mathbf{p} c^2 \quad (3.8)$$

мы можем включить добавочный член (или любую его часть) в первый член, введя дополнительно член, пропорциональный $\mathcal{E} \mathbf{a} \mathbf{p}$, который уже не будет диагонален. Существенно, что при такой операции логарифмически расходящийся член остаётся неизменным, постоянное же слагаемое можно, вообще говоря, сделать каким угодно *).

Очевидно, что такое положение, когда из релятивистски инвариантного уравнения возник релятивистски неинвариантный результат, явилось следствием математически незаконной операции вычитания двух логарифмически расходящихся интегралов. Так как такая операция является принципиально неоднозначной, то не удивительно, что и результат оказывается таким же.

В настоящее время существует по крайней мере два пути преодоления этой трудности. Первый из них предложен Фейнманом²⁰, второй развит в работах Кролла и Лэмба¹², Френча и Вейскопфа¹⁸ и Галанина¹⁹. Несмотря на совершенно различный подход к задаче, ответ в обоих методах получается один и тот же.

Идея Фейнмана состоит в следующем. Так как причина появления релятивистской неинвариантности состоит в вычитании бесконечных интегралов, то можно попытаться немного изменить закон взаимодействия с электромагнитным полем, так, чтобы все эффекты, связанные с не слишком большими частотами, остались без изменения, но все интегралы стали бы сходящимися. При таком вычислении все результаты должны уже быть релятивистски инвариантными, а так как интегралы, которые были искусственно сделаны сходящимися, исключаются из конечных формул, то можно ожидать, что результат такой операции не будет зависеть от выбора метода «обрезания».

*) Такая неоднозначность была обнаружена и для частиц, не имеющих спина²¹, для которых не существует состояний отрицательной энергии, так что это свойство не является специфичным для электрона.

Как уже говорилось, все расходящиеся интегралы расходятся логарифмически, т. е. подинтегральное выражение имеет вид $\frac{dk}{k}$. Нетрудно видеть, что можно с помощью δ -функции заменить трёхкратное интегрирование по $dk = (dk_x dk_y dk_z)$ на четырёхкратное по $dk d\omega$ ($\omega = ck$), положив

$$\frac{dk}{k} = \frac{2}{c} dk \int d\omega \delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right). \quad (3.9)$$

Действительно, вводя новую переменную $\xi = \omega^2/c^2$ и интегрируя правую часть по ξ , мы подтвердим равенство.

Введём теперь вместо $\delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)$ новую функцию $g\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)$, определяемую формулой

$$g\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) = \int_0^\infty \left[\delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) - \delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \lambda^2\right) \right] G(\lambda) d\lambda, \quad (3.10)$$

где $G(\lambda)$ — некоторая (вообще говоря, произвольная) функция, подчинённая только условию нормировки:

$$\int_0^\infty G(\lambda) d\lambda = 1. \quad (3.11)$$

Если не требовать большой общности, то можно вместо (3.10) положить $g\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)$ просто равным подинтегральному выражению

$$g\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) = \delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) - \delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \lambda^2\right), \quad (3.12)$$

где λ — очень большое число ($> 137 mc/\hbar$). После такой замены δ -функции на g -функцию мы обнаружим, что все результаты будут конечными. Так, для собственной энергии свободного электрона в теории Фейнмана получается выражение

$$\Delta E = \frac{1}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left\{ \frac{3}{2} \ln \frac{\hbar \lambda_0}{mc} + \frac{3}{8} \right\} (0 | \beta_\mu c^2 | 0), \quad (3.13)$$

где

$$\lambda_0 = \int_0^\infty G(\lambda) \ln \lambda d\lambda, \quad (3.14)$$

т. е. выражение, обладающее требуемыми свойствами (пропорциональное матрице β).

Поэтому все дальнейшие вычисления можно уже вести по схеме, изложенной в начале параграфа, а именно, вводя величину — ΔE в виде возмущения в исходный гамильтониан. При этом, так как

функция $G(\lambda)$ входит только в перенормировку массы, то она выпадает из окончательного выражения.

Для того чтобы избежать инфракрасной катастрофы — расходимости при малых волновых векторах кванта, Фейнман вводит следующий формальный приём, который эквивалентен простому сшиванию релятивистской формулы с нерелятивистской, вычисленной Бете. В интегралах, определяющих уже искомый эффект (после удаления членов, связанных с электромагнитной массой), вместо δ -функции $\delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)$ вводится функция $\delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \lambda_{\min}\right)$, где $\lambda_{\min} \ll mc/\hbar$.

Такой операцией автоматически обрезаются малые частоты. Для того чтобы получить правильную формулу, переходящую при малых частотах в результат Бете, надо положить

$$\ln \lambda_{\min} = \ln 2k_{\min} - \frac{5}{6}, \quad (3.15)$$

где значение $k_{\min}$ определено формулой (2.34): $\hbar c k_{\min} = (\Delta E)_{\text{ср}}$.

Рассматривая взаимодействие с внешним электромагнитным полем, описываемым потенциалами φ и $\mathbf{A}$ или векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, с помощью изложенного выше метода, Фейнман *) приходит к следующему выражению для поправки к энергии (для нерелятивистского электрона):

$$\begin{aligned} \Delta E = & \frac{e^2}{2\pi\hbar c} \left(-\frac{\hbar}{2\mu c}\right) [\beta \mathbf{B} - i\beta \mathbf{A} \mathbf{E}] + \\ & + \frac{1}{3\pi} \frac{e^3}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 (e \Delta \varphi - e \mathbf{A} \Delta \mathbf{A}) \left(\ln \frac{\mu c}{2\hbar k_{\min}} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5}\right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Последний член приводит к релятивистскому аналогу формулы Бете; подробнее мы рассмотрим его в следующем параграфе **).

Весьма интересным фактом является появление первого члена, пропорционального полям $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$. Существование его было впервые обнаружено Швингером, и он представляет собой взаимодействие дополнительного магнитного момента электрона с внешним (магнитным и электрическим) полем.

Появление аномалии в магнитном моменте электрона есть второй замечательный эффект, являющийся результатом взаимодействия электрона с полем вакуума. Характерной особенностью этого эффекта является то, что здесь результат получается однозначным и не связанным с вычитанием бесконечных интегралов ***).

*) В работе Фейнмана дан неверный коэффициент, ошибка исправлена в работе Френча и Вейскопфа¹⁸.

**) В работе Фейнмана постоянное слагаемое в последней скобке равно $\frac{5}{8}$. Это произошло, во-первых, из-за неправильного определения $\lambda_{\min}$, отмеченного выше, и, во-вторых, благодаря пренебрежению связанными с поляризацией вакуума членами, что привело к потере члена $-\frac{1}{5}$.

***). Эффект вычислялся Швингером¹³, Галаниным¹⁹, Фейнманом²⁰ и Люттингером²⁴. О последней работе см. ниже.

Как это видно из (3.16), магнитный момент электрона равен

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \right), \quad (3.17)$$

или численно

$$\mu = \mu_0 (1 + 0,001162). \quad (3.18)$$

Однозначность вычислений эффекта связана с тем, что члены, возникающие в гамильтониане во втором приближении теории возмущений и пропорциональные полю H , оказываются не связанными с электромагнитной массой. (Такого рода члены не возникают от возмущения вида $\beta \Delta \mu c^2$.) Поэтому задача об аномальном магнитном моменте электрона не связана с формализмом вычитания бесконечной электромагнитной энергии.

Благодаря этому существует ещё один путь вычисления аномального магнитного момента, указанный Люттингером²⁴.

Люттингер вычислял разность между энергиям помещённой в слабое магнитное поле системы, состоящей из заполненных уровней с отрицательной энергией и одного электрона, находящегося на уровне с положительной энергией, и системы, состоящей из одних только электронов, заполняющих уровни с отрицательной энергией в том же поле. При этом он вычислял только члены, пропорциональные H . Эти члены оказались конечными и давали значение магнитного момента (3.17)*).

Метод Фейнмана имеет тот недостаток, что, изменяя фактически закон взаимодействия зарядов с полем, он нарушает систему квантовой электродинамики, вводя ещё фиктивные поля, характеризующиеся функцией $G(\lambda)$. Поэтому надо рассматривать этот метод как формальное релятивистское обрезание расходящихся интегралов, не сказывающееся на конечном результате.

Другой путь был развит в работах Френча и Вейскопфа²⁵, Кролла и Лэмба¹² и Галанина¹⁹. Наиболее последовательно новая точка зрения изложена в первой из этих работ.

В этой работе авторы не требуют, чтобы гамильтониан был исправлен добавлением релятивистско-инвариантного члена типа $\beta \Delta \mu c^2$.

Вместо этого они ставят задачей найти такой оператор M (не имеющий уже вида $\beta \Delta \mu c^2$), чтобы его значение, усреднённое с помощью собственной функции свободного электрона, дало выражение для собственной энергии последнего.

*) Заметим, что нерелятивистские вычисления Велтона¹⁰ дают для этого эффекта неверный результат.

Найдя такой оператор, можно тогда определить наблюдаемый эффект как разность средних значений операторов*)

$$\Delta E = [H]_{\text{ср}} - [M]_{\text{ср}}, \quad (3.19)$$

где $[H]_{\text{ср}}$ — среднее значение обычного гамильтониана. Очевидно, что вычисление (3.19) с собственными функциями свободного электрона даёт тождественный нуль.

В такой постановке, однако, метод обладает неоднозначностью в определении оператора M , связанной с тем, что средние значения определяют лишь диагональные элементы оператора, недиагональные же элементы остаются произвольными.

Эту неоднозначность можно ликвидировать, если воспользоваться уже отмеченной выше независимостью аномального магнитного момента от метода вычислений.

Определив каким-либо образом оператор M , мы можем, очевидно, добавить к нему любой оператор, не имеющий диагональных элементов, среднее значение которого, взятое для свободного электрона, равно нулю, в то время как среднее значение для связанного электрона отлично от нуля. Можно показать (см. ¹²), что с точностью до членов порядка $1/c^4$ единственным таким оператором будет оператор (или оператор, кратный ему)

$$T = \frac{\alpha}{3\pi m} (\beta p^2 - \alpha p). \quad (3.20)$$

Среднее значение такого оператора может быть вычислено с помощью функций Паули и равно среднему значению оператора

$$T \rightarrow \frac{\alpha}{6\pi} \frac{\hbar}{mc} X + \frac{\alpha}{3\pi} e \alpha A. \quad (3.21)$$

Второй член, пропорциональный αA , не имеет физического смысла и приводит просто к перенормировке заряда (в гамильтониане уже есть член $\sim \alpha A$, так что, изменив заряд, можно собрать все члены такого типа и перенормировать заряд, так же как это делалось с массой**).

Оператор X есть оператор, возникающий в нерелятивистском приближении из оператора взаимодействия магнитного момента с электрическим полем $-i\beta \alpha E$ (см. (3.16)) и равный в статическом поле

$$X = \frac{1}{mc} \nabla (\varphi \times p) - \frac{1}{2} \frac{\hbar}{mc} \Delta \varphi. \quad (3.22)$$

*) Средние значения надо вычислять с помощью волновых функций электрона в кулоновом поле, т. е. принимать за возмущение только взаимодействие с электромагнитным полем вакуума.

**) Перенормировка заряда, вообще говоря, возможна только в том случае, когда в произвольном электромагнитном поле в гамильтониане появляются члены типа $c_1 e \varphi - c_2 e \alpha A$, причём $c_1 = c_2$. В теории Фейнмана это действительно имеет место ($c_1 = c_2 = 0$). В остальных вариантах $c_1 \neq c_2$, и эти члены просто отбрасывают, не обращая внимания на их инвариантный характер.

Мы видим, что добавление оператора T приводит к добавлению члена $\sim \Delta\varphi$, т. е. постоянного слагаемого к логарифму в формуле смещения терма (о чём мы уже говорили выше) и к одновременному изменению величины взаимодействия аномального магнитного момента с электрическим полем (исчезающей в S -состоянии).

Однако релятивистская инвариантность теории требует, чтобы величина взаимодействия магнитного момента с электрическим полем определялась величиной его взаимодействия с магнитным полем *).

Но величина взаимодействия с магнитным полем определяется однозначно. Поэтому коэффициент при члене с оператором X (или $-i\beta\alpha E$) задан. Тем самым оказывается заданным и оператор M . Именно, он должен быть таким, чтобы члены с B и E были такими же, как в формуле (3.16), полученной в теории Фейнмана.

Окончательное выражение для оператора M имеет вид:

$$M = -\frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar^2 c^3}{4\pi^3} \int \frac{dk}{k} \left[\sum_{\lambda} \frac{\alpha_{\lambda} \Lambda_{+} + \alpha_{\lambda}}{E_f - H + \hbar ck} - \frac{\alpha_{\lambda} \Lambda_{-} - \alpha_{\lambda}}{E_f + H + \hbar ck} \right], \quad (3.23)$$

где

$$\Lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{c\alpha p_f + \beta\mu c^2}{E_f} \right); \quad H = c\alpha p + \mu c\beta \quad (3.24)$$

—оператор проектирования, возникающий обычно при суммировании по спинам (ср., например, ³² стр 166). Штрих при знаке суммы означает, что слагаемое с $\lambda=4$ надо брать со знаком минус, причём α_i ($i=1, 2, 3$) — матрицы Дирака, а $\alpha_4=1$ (α_3 — проекция на $\mathbf{k}$).

Если подставить значение $\Lambda_{\pm}$ в (3.23) и просуммировать по i , то, поскольку $\sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} \alpha_{\lambda} = 2$, $\sum_{\lambda} \alpha_i \alpha_{\lambda} = -2\alpha_i$ и $\sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} \beta \alpha_{\lambda} = -4\beta$, то в результате мы придём к оператору для собственной массы электрона (3.4).

Определив таким образом оператор M , Френч и Вейскопф получают для изменения энергии выражение, в точности совпадающее с выражением Фейнмана (а также и других авторов).

Таким образом, оказывается, что условие релятивистской инвариантности является достаточным для того, чтобы однозначно определить поправки к гамильтониану.

*) То-есть чтобы в добавке к гамильтониану $c_3 \frac{1}{2} \frac{\hbar}{mc} X + c_4 \frac{1}{2} \frac{e\hbar}{mc} \beta c B$ было $c_3 = c_4$, иначе говоря, чтобы величина магнитного момента, измеренного в электрическом поле и в магнитном, была одна и та же.

4. ФОРМУЛА ДЛЯ СМЕЩЕНИЯ ТЕРМА

В результате вычислений, описанных кратко в предыдущем параграфе, получается следующая формула для оператора, определяющего смещение уровня в электрическом поле:

$$\frac{1}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \{ (-e)(\Delta\varphi) \left[\int_{k_{\min}}^{\frac{\mu c}{\hbar}} \frac{dk}{k} - \ln 2 + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right] - \frac{3}{4} X \}. \quad (4.1)$$

Для атома водорода и подобных ему атомов можно показать, что

$$\left[\left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 (-e) \Delta\varphi \right]_{\text{ср}} = \begin{cases} 8 \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \cdot \frac{Z^4}{n^3} \cdot R & \text{при } l = 0, \\ 0 & \text{при } l \neq 0, \end{cases}$$

$$\left[\left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 X \right]_{\text{ср}} = \begin{cases} -4 \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{Z^4}{n^3} R \frac{1}{(l+1)(2l+1)} & (j = l + \frac{1}{2}) \\ + 4 \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{Z^4}{n^3} R \frac{1}{l(2l+1)} & (j = l - \frac{1}{2}). \end{cases}$$

Заметим, что для всех термов, кроме S , смещение определяется только магнитным моментом (оператором X).

Таким образом, для смещения S -терма водорода получим:

$$W' = \frac{8}{3\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 R \frac{1}{n^3} \left[\ln \frac{mc}{\hbar k_{\min}} - \ln 2 + \frac{19}{30} \right]. \quad (4.2)$$

для терма $P_{1/2}$

$$W' = -\frac{1}{3\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \cdot R \frac{1}{n^3}, \quad (4.3)$$

для терма $P_{3/2}$

$$W' = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 R \frac{1}{n^3}. \quad (4.4)$$

Воспользовавшись значением логарифма, вычисленным Бете (см.¹³, стр. 1246), равным 7,6876, получаем численно:

$$W' (2S_{1/2}) = 1034 \text{ Мгц},$$

$$W' (2P_{1/2}) = -17 \text{ Мгц},$$

$$W' (2P_{3/2}) = 8 \text{ Мгц}$$

и для расщепления $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ получаем величину $1034 + 17 = 1051 \text{ Мгц}$.

5. ИЗМЕРЕНИЯ МАГНИТНОГО МОМЕНТА ЭЛЕКТРОНА

Первые указания на расхождения между теорией взаимодействия электрона с магнитным полем были получены в работах Нэфа, Нельсона и Раби²⁵ и Нагли, Джулиана и Захариаса²⁶.

Эти авторы измеряли величину сверхтонкого расщепления уровней водорода и дейтерия. Согласно теории этого эффекта величина расщепления должна быть равна (в частотах)

$$\nu = \frac{4}{3} \frac{2i+1}{i} \mu_N \mu_e |\psi(0)|^2, \quad (5.1)$$

где i — спин ядра ($1/2$ для Н и 1 для D), μ_N — магнитный момент ядра, μ_e — магнитный момент электрона, который считается равным магнетону Бора μ_0 , и $\psi(0)$ — значение волновой функции электрона в центре атома [формула (2.16)]. Как оказалось, ни сами величины ν_H и ν_D , ни их отношение ν_H/ν_D (из которого выпадает μ_e)* не согласуются с обычной теорией.

Таблица I**)

	Опыт	Теория	$\frac{\text{Опыт}}{\text{Теория}}$
ν_H	$1420,410 \pm 0,006$	$1416,97 \pm 0,54$	$1,00242 \pm 0,0004$
ν_D	$327,384 \pm 0,003$	$326,53 \pm 0,12$	$1,00262 \pm 0,0003$
ν_H/ν_D	$4,33867 \pm$ $\pm 0,00004$	$4,339385 \pm$ $\pm 0,00003$	$0,999835 \pm$ $\pm 0,000001$

В таблице I приведены теоретические и экспериментальные (из более поздней и точной работы²⁷) значения этих величин.

Ошибки, указанные при теоретических значениях, связаны с неточностью использованных постоянных***). В последней графе приведено отношение экспериментально измеренных и вычисленных значений.

Оставляя пока в стороне весьма малое расхождение (меньшее 0,017%) в значениях отношения ν_H/ν_D , рассмотрим сами величины ν_H и ν_D . Измеренные значения этих величин свидетельствуют о том, что магнитный момент электрона действительно превышает μ_0 .

*) При составлении отношения ν_H/ν_D следует помнить, что в $\psi(0)$ войдут приведённые массы электронов в атоме водорода m_H и дейтерия m_D . Поэтому это отношение равно

$$\frac{\nu_H}{\nu_D} = \frac{4}{3} \left(\frac{m_H}{m_D} \right)^3 \frac{\mu_p}{\mu_d}. \quad (5.2)$$

**) Все величины указаны в Мгц.

***) Малая ошибка в ν_H/ν_D связана с весьма высокой степенью точности в измерениях отношения μ_p/μ_d ($\sim 10^{-4}\%$).

Для того чтобы вычислить по экспериментальным данным величину магнитного момента электрона, необходимо принять во внимание тот факт, что в опытах по измерению магнитного момента ядра методом молекулярных пучков (резонансным методом) фактически измеряется отношение магнитного момента ядра к магнитному моменту электрона *).

Поэтому для сравнения с опытом (5.1) надо переписать в виде:

$$\nu = \frac{4}{3} \frac{2i+1}{i} \mu_e^2 \frac{\mu_N}{\mu_e} |\psi(0)|^2. \quad (5.3)$$

Если положить

$$\mu_e = \mu_0 (1 + \delta), \quad (5.4)$$

то отношение измеренного значения $\nu_{\text{опыт}}$ к теоретическому $\nu_{\text{теор}}$ (вычисленному при $\mu_e = \mu_0$) будет равно

$$\frac{\nu_{\text{опыт}}}{\nu_{\text{теор}}} = 1 + 2\delta. \quad (5.5)$$

Из таблицы I видно, что если использовать значения ν_N , то

$$\delta = 0,0012 \pm 0,0002 \quad (5.6)$$

в превосходном согласии с теоретическим значением $\frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} = 0,00116$.

В рамках изложенной теории остаётся ещё необъяснённым расхождение между экспериментальным и теоретическим значениями отношения $\frac{\nu_N}{\nu_D}$. Это расхождение было объяснено О. Бором ²⁸ и связано с конечностью размеров дейтерона. Так как последняя задача не связана непосредственно с аномальным магнитным моментом электрона, то её изложение помещено в дополнении II.

Дальнейшие измерения магнитного момента электрона были произведены Кушем и Фолли ²⁹, изучавшими эффект Зеемана у атомов с одним валентным электроном — галлия, индия и натрия (резонансным методом **).

Для того чтобы избежать измерения магнитного поля, в этой работе определялось отношение расщепления двух термов, из которого и определялось отношение факторов Ланде для этих термов.

Результаты даны в таблице II, в которой указаны изучаемые термы, теоретическое значение отношения факторов Ланде, измеренное отношение и, наконец, вычисленное отсюда значение поправки к магнитному моменту δ .

*) Постоянное поле в этом методе калибруется по измерению тонкой структуры. При вычислении величины поля из наблюдаемого расщепления используется значение магнитного момента электрона.

**) Заметим, что в этих спектрах поправки на отклонения от связи Рес-сель-Саундерса оказываются меньше наблюдаемого эффекта.

Т а б л и ц а II

Изучаемое отношение	Теорети- ческое зна- чение при $\nu_e = \mu_0$	Измеренное отношение	δ
$\frac{g(^3P_{3/2} \text{ Ga})}{g(^2P_{1/2} \text{ Ga})}$	2	$2(1,00172 \pm \pm 0,00006)$	$0,00114 \pm \pm 0,00004$
$\frac{g(^3S_{1/2} \text{ Na})}{g(^3P_{1/2} \text{ Ga})}$	3	$3(1,00242 \pm \pm 0,00006)$	$0,00121 \pm \pm 0,00003$
$\frac{g(^3S_{1/2} \text{ Na})}{g(^1P_{1/2} \text{ In})}$	3	$3(1,00243 \pm \pm 0,00010)$	$0,00121 \pm \pm 0,00005$
Среднее значение:			$0,00119 \pm \pm 0,00005$

Результат опять находится в прекрасном согласии с теорией.

Обращает на себя внимание тот факт, что два последних значения совпали точно, в то время как первое несколько меньше. Так как это расхождение лежит в пределах ошибок опыта, пока нет оснований считать это расхождение реальным.

6. ДРУГИЕ ЭФФЕКТЫ

Естественным образом встаёт вопрос о том, какие ещё существуют эффекты, вычисление которых становится возможным. В первую очередь—это определение поправок к различным сечениям, вычисленным в рамках обычной теории возмущений (величина этих поправок должна в $\frac{e^2}{\hbar c}$ раз отличаться от самого сечения).

До сих пор не существует опытов, в которых бы сечения измерялись с такой точностью, а потому эти поправки имеют сейчас только теоретическое значение.

Теоретически изучены лишь два эффекта, именно рассеяние электрона в кулоновом поле и комптон-эффект. Первая задача, очевидно, представляет собой полный аналог задачи о смещении уровней. Их различие состоит только в том, что вместо диагональных матричных элементов в задачу о рассеянии входят недиагональные элементы от того же оператора. Льюисом¹⁵ и Эпштейном¹⁶ было впервые показано, что все бесконечные члены, возникающие при вычислении поправки к сечению рассеяния, связанной с виртуальным излучением и поглощением

квантов, происходят от электромагнитной массы, и могут быть устранены соответствующей перенормировкой массы. При этом, как и в случае смещения уровня, оказывается, что результат имеет лишь логарифмическую точность.

Более или менее наглядно можно объяснить возникновение поправки к рассеянию следующим образом (не совсем точно (ср.¹⁹)).

Электрон в процессе рассеяния может виртуально излучать и поглощать кванты. Если и излучение, и поглощение происходят до процесса рассеяния (или после него), то это эквивалентно простому изменению массы — соответствующие члены бесконечны и исчезают при перенормировке массы. Если же излучение виртуального кванта происходит до рассеяния, а поглощение после, то такой эффект уже не сводится к эффекту массы и приводит к рассматриваемой поправке к сечению.

Радиационная поправка к сечению рассеяния была вычислена Швингером¹⁷. Он показал, что рассеяние всегда сопровождается излучением квантов малой энергии. Если учитывать при вычислении сечения возможность излучения (виртуального и реального) квантов с энергией от 0 до ΔE (ΔE мало по сравнению с кинетической энергией электрона), то обычное сечение рассеяния умножается на множитель $(1-\delta)$, где в случае нерелятивистских скоростей электрона (для заданного угла рассеяния ϑ)

$$\delta = \frac{8}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \left[\ln \frac{mc^2}{\Delta E} + \frac{19}{30} - \ln 2 \right] \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (6.1)$$

В предельном релятивистском случае δ определяется выражением

$$\delta = \frac{4}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left[\left(\ln \frac{E}{\Delta E} - \frac{13}{12} \right) \left(\ln \frac{2E}{mc^2} \sin \frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{17}{72} + \varphi(\vartheta) \right], \quad (6.2)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\vartheta) = \frac{1}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \int_{\cos \frac{\vartheta}{2}}^1 & \left(\frac{\ln \frac{1}{2} (1+x)}{1-x} - \frac{\ln \frac{1}{2} (1-x)}{1+x} \right) \times \\ & \times \frac{dx}{(x^2 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2})^{1/2}}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

При $\vartheta = \pi$ $\varphi(\vartheta) = \frac{\pi^2}{24}$; при малых углах ϑ

$$\begin{aligned} \varphi(\vartheta) \sim & \frac{1 - \cos \frac{\vartheta}{2}}{\left[2 \cos \frac{\vartheta}{2} \left(1 + \cos \frac{\vartheta}{2} \right) \right]^{1/2}} \left[-\ln 2 \left(1 - \cos \frac{\vartheta}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\vartheta}{2} \right) + 1 \right]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

В общем случае любых энергий формула имеет очень сложный вид, и мы не будем здесь её приводить. Заметим, что (6.2) имеет заметную неточность лишь при энергии электрона в несколько MeV.

Величина поправки (при ΔE несколько десятков KeV) достигает 5—10%. Так, для электрона с энергией 3,1 MeV при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ $\Delta E = 10$ KeV, $\delta = 8,6\%$.

Эти формулы неверны при очень малых ΔE , так как они расходятся логарифмически. Эту трудность (связанную, как всегда, с излучением многих квантов малой энергии) можно формально ликвидировать, если заменить поправочный множитель $(1-\delta)$ на $e^{-\delta}$ и считать более высокие степени δ поправкой на кратные процессы.

Впрочем, такие поправки не имеют практического значения.

Шафрос³⁴ вычислил величину поправки к сечению комптон-эффекта на электроне. С точностью до членов $\sim k^2$ ($\mathbf{k}$ —волновой вектор фотонов) эффективное сечение для процессов, в которых кроме рассеянного (в телесный угол $d\Omega$) фотона излучается ещё по крайней мере один фотон с энергией $< \hbar\omega$, имеет вид:

$$d\sigma' = \left(\frac{e^3}{\hbar c}\right) \left(\frac{e^3}{mc^3}\right)^2 \frac{d\Omega}{4\pi} \left(\frac{\hbar k}{mc}\right)^2 \left\{ (1 + \cos^2 \vartheta) \left(2 \ln \frac{\hbar k}{mc} + \frac{8}{3} \ln \frac{\hbar \omega}{mc^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{8}{3} (1 + \cos^2 \vartheta) \ln \frac{\hbar \omega}{mc^2} - \frac{4}{3} (1 - \cos^2 \vartheta) \cos \vartheta \ln \frac{\hbar k}{mc} \right\}. \quad (6.5)$$

Формула для общего случая рассеяния фотона любой энергии ещё не опубликована.

ДОПОЛНЕНИЯ

1. Сходимость интегралов при малых частотах

При вычислении смещения терма водорода была отмечена трудность, связанная с расходямостью интегралов при малых частотах.

Эта трудность не имеет ничего общего с принципиальными вопросами релятивистских эффектов и встречается во всех нерелятивистских процессах, связанных с излучением квантов малых энергий.

Как было показано Паули и Фирцем³¹, при малых частотах вероятность излучения одного кванта становится малой по сравнению с вероятностью излучения многих квантов, а потому обычная теория возмущений оказывается неприменимой в этой области.

Для того чтобы ликвидировать эту трудность, Паули и Фирц переходят к новым переменным (совершают каноническое преобразование), так чтобы при малых частотах кванты оказывались бы, в некотором смысле, связанными с электронами. Это и должно привести к появлению нижней границы в соответствующих интегралах, зависящих от возможных состояний электрона ($k_{\min} = (\Delta E)_{\text{ср}}$ в задаче о смещении уровня.) Смысл этой операции яснее всего виден, если

рассмотреть преобразование Паули и Фирца в форме, данной в цитированной выше работе¹¹.

Рассмотрим гамильтониан электрона в электромагнитном поле в нерелятивистском приближении относительно электрона (см., например,³²):

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{q}) + \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) - \frac{e}{2m} (\mathbf{A}\mathbf{p}), \quad (\text{Д I.1})$$

где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — импульс и координата электрона (член с A^2 мы опускаем, считая поле слабым).

Разлагая вектор-потенциал в ряд Фурье:

$$\mathbf{A} = (8\pi\hbar c)^{\frac{1}{2}} \sum_k \frac{a_k}{k^{1/2}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \mathbf{e}_k, \quad (\text{Д I.2})$$

где $\mathbf{e}_k$ — вектор поляризации, а коэффициенты выбраны так, чтобы энергия поля имела обычный вид (т. е. чтобы оператор $a_k^+ a_k$ имел собственные значения 0, 1, 2, ...), и подставляя в (Д I.1), получим обычным образом:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{q}) + \sum_k a_k^+ a_k \hbar c k - \frac{e}{mc} \sum_k \left(\frac{2\pi\hbar c}{k} \right)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{e}_k \mathbf{p}) (a_k + a_k^+). \quad (\text{Д I.3})$$

Дополним сумму до полного квадрата, переписав (Д I.3) следующим образом:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{q}) + \sum_k \left(a_k^+ - \frac{e}{mc} \left(\frac{2\pi}{\hbar c k^3} \right)^{1/2} \mathbf{e}_k \mathbf{p} \right) \times \\ \times \left(a_k - \frac{e}{mc} \left(\frac{2\pi}{\hbar c k^3} \right)^{1/2} \mathbf{e}_k \mathbf{p} \right) \hbar c k - \frac{e^2}{m^2 c^2} \sum_k \frac{2\pi}{k^2} (\mathbf{e}_k \mathbf{p})^2. \quad (\text{Д I.4})$$

Последний член есть не что иное, как электромагнитная энергия электрона (нерелятивистского):

$$\frac{e^2}{m^2 c^2} \sum_k \frac{2\pi}{k^2} (\mathbf{e}_k \mathbf{p})^2 = \frac{2e^2}{3} \frac{p^2}{m^2 c^2} \int dk. \quad (\text{Д I.5})$$

Отбрасывая этот член, мы приходим к гамильтониану

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{q}) + \sum_k A_k^+ A_k \hbar c k, \quad (\text{Д I.6})$$

где

$$A_k = a_k - \frac{e}{mc} \left(\frac{2\pi}{\hbar c k^3} \right)^{1/2} (\mathbf{e}_k \mathbf{p}). \quad (\text{Д I.7})$$

Для того чтобы новые A_k могли служить каноническими переменными, необходимо ввести и новые канонические переменные для электрона (только в этом случае A_k будут коммутировать с координатой и импульсом электрона):

$$\begin{aligned} P &= p, \\ Q &= q + \frac{ie}{mc} \sum_k \left(\frac{2\pi\hbar}{ck^3} \right)^{1/2} e_k (A_k - A_k^\dagger); \end{aligned} \quad (\text{ДI.8})$$

тогда гамильтониан преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + V \left[Q - \frac{ie}{mc} \sum_k \left(\frac{2\pi\hbar}{ck^3} \right)^{1/2} e_k (A_k - A_k^\dagger) \right] + \\ &+ \sum_k A_k^\dagger A_k \hbar ck. \end{aligned} \quad (\text{ДI.9})$$

Мы видим, что в результате проделанных операций мы пришли к гамильтониану, в котором связь между электроном и полем выражается тем, что координата, входящая в потенциальную энергию, становится зависящей от состояния поля, т. е. как раз к тому, что служит исходной точкой вывода формулы для смещения уровня (см. раздел 2).

Введём обычные координаты и импульсы (Q_k и P_k) осцилляторов электромагнитного поля *):

$$\begin{aligned} P_k &= \left(\frac{1}{2} \hbar ck \right)^{1/2} (A_k^\dagger + A_k), \\ Q_k &= i \left(-\frac{\hbar}{2ck} \right)^{1/2} (A_k^\dagger - A_k). \end{aligned} \quad (\text{ДI.10})$$

Получаем окончательно:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q + \Delta q) + \sum_k \frac{1}{2} (P_k^2 + c^2 k^2 Q_k^2), \quad (\text{ДI.11})$$

где

$$\Delta q = \frac{e}{mc} (4\pi)^{1/2} \sum_k e_k \frac{Q_k}{k}. \quad (\text{ДI.12})$$

Таким образом, взаимодействие электрона с полем излучения включает в себя усреднение потенциала по координатам всех осцилляторов поля. Такое усреднение будет происходить различным образом для малых и больших волновых векторов.

Покажем теперь, прежде всего, что при больших (но ещё нерелятивистских) частотах получается результат, совпадающий с полученным в разделе 2.

*) Коэффициенты выбраны так, чтобы коммутатор $[P_k Q_k] = -i\hbar$.

Если частоты велики, эти кванты можно считать свободными, и усреднение потенциала происходит с помощью волновых функций свободных квантов.

Разлагая $V(\mathbf{q})$ в трехмерный интеграл Фурье:

$$V(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\lambda U(\lambda) \exp(i\lambda \mathbf{q}). \quad (\text{ДI.13})$$

$$\text{Тогда} \\ V(\mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\lambda U(\lambda) \exp(i\lambda \mathbf{q}) \prod_k \exp\left[\frac{i e}{mc} (4\pi)^{1/2} (\mathbf{e}_k \lambda) \frac{Q_k}{\hbar}\right]. \quad (\text{ДI.14})$$

Волновая функция кванта (осциллятора), как известно, представляет собой гауссову функцию (первую эрмитову функцию)

$$\varphi(Q_k) = \left(\frac{ck}{\pi \hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{ck}{2\hbar} Q_k^2}; \quad (\text{ДI.15})$$

волновая функция всех квантов представляет собой произведение всех $\varphi(Q_k)$:

$$\varphi = \prod_k \varphi(Q_k). \quad (\text{ДI.16})$$

Усредняя с её помощью (ДI.14), найдём:

$$[V(\mathbf{q} + \Delta \mathbf{q})]_{\text{cp}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\lambda U(\lambda) \exp(i\lambda \mathbf{q}) \prod_k \exp\left(-\pi (\mathbf{e}_k \lambda)^2 \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \frac{1}{k^3}\right). \quad (\text{ДI.17})$$

Сравнивая с выражением для $(\Delta q^2)_{\text{cp}}$, полученным в разделе 2, можно переписать это выражение так:

$$[V(\mathbf{q} + \Delta \mathbf{q})]_{\text{cp}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int d\lambda d\mathbf{q}' e^{i\lambda(\mathbf{q} - \mathbf{q}')} e^{-\frac{1}{6} \lambda^2 (\Delta q^2)_{\text{cp}}}. \quad (\text{ДI.18})$$

Это выражение можно проинтегрировать по λ . В результате получим:

$$[V(\mathbf{q} + \Delta \mathbf{q})]_{\text{cp}} = \frac{3}{2\pi (\Delta q^2)_{\text{cp}}} \int d\mathbf{q}' V(\mathbf{q}') \exp\left[-\frac{3|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2}{2 (\Delta q^2)_{\text{cp}}}\right]. \quad (\text{ДI.19})$$

(ДI.17) формально можно записать в виде *):

$$[V(\mathbf{q} + \Delta \mathbf{q})]_{\text{cp}} = \exp\left[\frac{1}{6} (\Delta q^2)_{\text{cp}} \Delta\right] V(\mathbf{q}). \quad (\text{ДI.20})$$

*) Это выражение надо понимать так. Разложим $V(\mathbf{q})$ в интеграл Фурье, а экспоненту формально также представим в виде ряда:

$$1 + \frac{1}{6} (\Delta q^2)_{\text{cp}} \Delta + \dots;$$

после применения операторного ряда к $V(\mathbf{q})$, собрав опять возникшие выражения в экспоненту, придём к (ДI.18).

Выражение (Д1.20) совпадает с (2.20) *).

Перейдём теперь к малым энергиям квантов. Применим к новому гамильтониану (Д1.11) теорию возмущений, рассматривая как возмущение (с точностью до членов порядка e^3)

$$V(\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}) - V(\mathbf{q}) = \frac{e}{mc} (4\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_k \frac{1}{k} Q_k (\mathbf{e}_k \nabla) V(\mathbf{q}) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 4\pi \left[\sum_k Q_k (\mathbf{e}_k \nabla) \right]^2 V(\mathbf{q}). \quad (\text{Д1.21})$$

Поправка к энергии во втором порядке (по e) теории возмущений имеет вид (обозначения те же, что и в разделе 2):

$$W' = 4\pi \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \sum_k \sum_n \frac{\hbar}{2ck^3} \frac{|(0|\mathbf{e}_k \nabla V|n)|^2}{E_0 - E_n - \hbar ck} + \\ + \frac{1}{2} 4\pi \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \sum_k \frac{\hbar}{2ck^3} (0|(\mathbf{e}_k \nabla)^2 V|0). \quad (\text{Д1.22})$$

После замены суммы по k на интеграл, интегрирования по углам и суммирования по поляризациям кванта, это выражение принимает вид:

$$W' = \frac{1}{3\pi} \frac{e^3}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \int \frac{dk}{k} \{ (0|\Delta V|0) + \\ + 2 \sum_n \frac{(0|\nabla V|n)(n|\nabla V|0)}{E_0 - E_n - \hbar ck} \}. \quad (\text{Д1.23})$$

Если k очень мало, так что $\hbar ck \ll E_0 - E_n$ (для всех E_n), то, разлагая в ряд, получим:

$$2 \sum_n \frac{(0|\nabla V|n)(n|\nabla V|0)}{E_0 - E_n - \hbar ck} = 2 \sum_n (0|\nabla V|n)(n|\nabla V|0) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{E_0 - E_n} + \frac{2\hbar ck}{(E_0 - E_n)^3} + O(k^2) \right\}. \quad (\text{Д1.24})$$

Нетрудно видеть, что справедливо следующее соотношение между операторами:

$$\Delta V = -\frac{i}{\hbar} (Hp - pH) = + \frac{dp}{dt}. \quad (\text{Д1.25})$$

*) Благодаря тому, что здесь оператор Лапласа входит в показатель экспоненты, не возникает вопроса о членах более высокого порядка, который оставался невыясненным при использовании выражения (2.20). При $(\Delta q^2)_{\text{ср}} \rightarrow \infty$ (Д1.19) стремится к нулю, а (2.20) — к бесконечности.

Пользуясь тем, что для матричных элементов

$$\left(0 \left| \frac{dp}{dt} \right| n\right) = \frac{d}{dt} (0|p|n) = -\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_n) (0|p|n), \quad (\text{ДІ.26})$$

преобразуем (ДІ.24) к виду:

$$\begin{aligned} 2 \sum_n \frac{(0|\nabla V|n)(n|\nabla V|0)}{E_0 - E_n - \hbar ck} = \\ = -(0|\Delta V|0) + \frac{2kc^2}{\hbar} (0|p^2|0) + O(k^2), \end{aligned} \quad (\text{ДІ.27})$$

где через $O(k^2)$ обозначены члены, пропорциональные k^2 и более высоким степеням k .

Подставляя в (ДІ.23), мы видим, что логарифмическая расходимость исчезает. Более точными вычислениями можно показать, что для связанного электрона получается результат Бете [эффективное обрезание при $k_{\min} = \frac{1}{\hbar c} (\Delta E)_{\text{ср}}$].

II. Сверхтонкая структура дейтерия

В разделе 5 было указано, что при измерении сверхтонкого расщепления у дейтерия и водорода выяснилось, что отношение расщеплений $\frac{\nu_H}{\nu_D}$, не зависящее от магнитного момента электрона, оказывается меньше теоретического на 0,017%. Это расхождение может быть объяснено тем, что при взаимодействии электрона с магнитным моментом дейтерия необходимо учитывать конечные размеры дейтерона²⁷.

Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Взаимодействие электрона с магнитным моментом может быть описано с помощью оператора

$$H' = \frac{8}{3} \frac{2i+1}{i} \frac{e\hbar}{2mc} (\mu s) \delta(r), \quad (\text{ДІІ.1})$$

где μ и i — спин и магнитный момент ядра, s — спин электрона, $\delta(r)$ есть δ -функция от вектора r : $\int \delta(r) dr = 4\pi \int \delta(r) r^2 dr = 1$.

Правильность формулы (ДІІ.1) следует из того, что если умножить H' на ψ^2 и проинтегрировать по пространству, то получим обычную формулу сверхтонкой структуры (5.1).

Рассматривая магнитное взаимодействие электрона с дейтерием, надо брать сумму двух операторов вида (ДІІ.1) — один для взаимодействия с протоном, другой для взаимодействия с нейтроном. При этом, так как электрон взаимодействует электрическим образом только с протоном, то можно считать, что электрон в своём движении

следует за движением протона; взаимодействие же с нейтроном должно быть усреднено по объёму дейтерона*).

Очевидно, что при таком усреднении взаимодействие электрона с нейтроном уменьшится по абсолютной величине, а так как магнитный момент нейтрона отрицателен, то в результате величина сверхтонкого расщепления окажется больше, чем она получается непосредственно из формулы (ДП.1), если в неё подставить спин и магнитный момент дейтерона. Заметим, что при вычислении поправки мы должны рассматривать только координатные части волновых функций, а потому множитель $\frac{2i+1}{i}$ в (ДП.1) надо опустить.

Для того чтобы вычислить величину поправки**), обозначим через $\mathbf{r}$ расстояние от нейтрона до электрона и через $\mathbf{R}$ — расстояние от протона до нейтрона. Тогда

$$\rho = \mathbf{R} + \mathbf{r} \quad (\text{ДП.2})$$

будет расстоянием от электрона до протона.

Волновая функция системы электрон плюс нейтрон представляет собой произведение

$$(4\pi)^{-1/2} \frac{\chi(R)}{R} \varphi(\rho), \quad (\text{ДП.3})$$

где $(4\pi)^{-1/2} \frac{\chi(R)}{R}$ — волновая функция дейтерона, а $\varphi(\rho)$ — водородная волновая функция (в силу сказанного мы считаем электрон связанным только с протоном). Обе функции мы предполагаем нормированными:

$$\int \chi^2(R) dR = 1; \quad \int \varphi^2(\rho) d\rho = 4\pi \int \varphi^2(\rho) \rho^2 d\rho = 1. \quad (\text{ДП.4})$$

Подставив теперь в (ДП.1) $i = \frac{1}{2}$ и $\mu = \mu_n$ (магнитный момент нейтрона), получаем с помощью функции (ДП.2) для энергии взаимодействия выражение

$$\varepsilon = A_n \int \int \delta(\mathbf{r}) \chi^2(R) \varphi^2(\rho) dR d\rho, \quad (\text{ДП.5})$$

где

$$A_n = \frac{4}{3} \frac{e\hbar}{mc} (\mu_n \mathbf{s}).$$

*) Очевидно, что для магнитного взаимодействия существенно значение волновой функции внутри ядра. Частота же, отвечающая движению электрона внутри ядра, $\frac{\hbar}{mr_0^2} \gg$ частоты нейтрона $\frac{\hbar}{Mr_0^2}$ (r_0 — радиус ядра). Отсюда и появляется поправочный фактор при магнитном взаимодействии. В то же время частота движения электрона на водородной орбите $\ll \frac{\hbar}{Mr_0^2}$, поэтому такая поправка не появляется при рассмотрении задачи об уровнях атома дейтерия.

**) Вывод отличается от приведённого в работе О. Бора и даёт более наглядное представление о связи эффекта со свойствами дейтерона.

Вводя вместо ρ переменную $\mathbf{r}$, согласно (ДП. 2), получаем:

$$\varepsilon = A_n \int \int \delta(\mathbf{r}) \chi^2(R) \varphi^2(|\mathbf{R} + \mathbf{r}|) dR d\mathbf{r}, \quad (\text{ДП.6})$$

или, интегрируя по $\mathbf{r}$,

$$\varepsilon = A_n \int \chi^2(R) \varphi^2(R) dR. \quad (\text{ДП.7})$$

Если бы размерами дейтерона можно было пренебречь, то величина взаимодействия была бы равна

$$\varepsilon_0 = A_n \varphi^2(0). \quad (\text{ДП.8})$$

(Это выражение получается из предыдущего, если заменить $\chi^2(R)$ на δ -функцию.)

Пользуясь условием нормировки $\chi(R)$ (ДП.4), можно записать

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = A_n \varphi^2(0) \int \chi^2(R) \left(\frac{\varphi^2(R)}{\varphi^2(0)} - 1 \right) dR. \quad (\text{ДП.9})$$

Водородная волновая функция s -электрона равна

$$\varphi(R) = \varphi(0) e^{-\frac{R}{a}}, \quad (\text{ДП.10})$$

где

$$a = \frac{\hbar^2}{me^2}.$$

Разлагая экспоненту в ряд и ограничиваясь первым не исчезающим членом, получим из (ДП. 9):

$$\Delta\varepsilon = A_n \varphi^2(0) \frac{2}{a} \int \chi^2(R) R dR. \quad (\text{ДП.11})$$

Эту поправку мы должны отнести к величине сверхтонкого расщепления для дейтерия ε_0 , вычисленной без учёта конечности размеров дейтерона. Она определяется формулой (ДП. 9), где в A_n надо заменить магнитный момент нейтрона на магнитный момент дейтерона. $\varphi(0)$ можно в обоих случаях считать одинаковыми, так как разностью приведённых масс электрона здесь можно пренебречь.

Окончательно для величины относительной поправки получаем выражение (знак эффекта был выяснен выше)

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{|\mu_n|}{\mu_d} \frac{2}{a} \int \chi^2(R) R dR. \quad (\text{ДП.12})$$

Таким образом, величина поправки определяется средним расстоянием между частицами в дейтероне.

Эту величину можно приближённо (с ошибкой, меньшей 10%) определить с помощью элементарной теории дейтерона.

Можно показать³³, что с большой точностью, при не слишком малых R , волновая функция дейтерона имеет вид:

$$\chi(R) = \sqrt{\frac{3}{d}} e^{-\frac{R}{d}}, \quad (\text{ДП.13})$$

где d — радиус дейтерона:

$$d = \frac{\hbar}{(M \epsilon_d)^{1/2}}; \quad (\text{ДП.14})$$

ϵ_d — энергия связи дейтерона, M — масса протона *).

Так как в выражении для среднего расстояния малые R не играют заметной роли, то можно вычислять эту величину с помощью функции (ДП.13). В результате получим ■

$$\int R \chi^2(R) dR = \frac{3}{4} d, \quad (\text{ДП.15})$$

откуда окончательно для искомой величины поправки будем иметь:

$$\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} = \frac{3}{2} \frac{d}{a} \frac{|\mu_n|}{\mu_d}. \quad (\text{ДП.16})$$

Подставляя значения входящих в эту формулу величин:

$$\frac{d}{a} = \frac{e^2}{\hbar c} \sqrt{\frac{m}{M} \frac{mc^2}{\epsilon_d}} = 0,81 \cdot 10^{-1},$$

получим

$$\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} = 2,6 \cdot 10^{-4}, \quad (\text{ДП.17})$$

что, хотя и совпадает по порядку величины, но в полтора раза превышает наблюдаемый эффект **). Причина этого расхождения может заключаться в том, что магнитный момент нейтрона и протона не точечный, а размазан по пространству (например, на расстоянии порядка радиуса действия ядерных сил).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. W. H. Houston, Phys. Rev. **51**, 446 (1937).
2. R. C. Williams, Phys. Rev. **54**, 558 (1938).
3. W. E. Lamb, Jr., and R. C. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947).
4. R. C. Retherford and W. E. Lamb, Jr., Phys. Rev. **75**, 1325 A (1949).
5. J. E. Mack, Phys. Rev. **72**, 972 (1948).
6. G. R. Fowles, Phys. Rev. **73**, 639 (1948).

*) Функция (ДП.13) не удовлетворяет условию нормировки (ДП.4), так как (ДП.13) несправедливо при малых R .

**) О. Бор в статье, пользуясь неправильно нормированной волновой функцией дейтерона, получает согласие с экспериментом и лишь отмечает, что при правильном выводе такое разногласие может возникнуть.

7. M. Skinner and W. E. Lamb, Jr., Phys. Rev. **75**, 1325A (1949).
 8. H. A. Bethe, Phys. Rev. **72**, 339 (1947).
 9. H. A. Bethe, Phys. Rev. **73**, 1271 A (1948).
 10. T. A. Welton, Phys. Rev. **74**, 1157 (1948).
 11. V. Weisskopf, Phys. Rev. **56**, 72 (1939).
 12. N. M. Kroll and W. E. Lamb, Jr., Phys. Rev. **75**, 388 (1949).
 13. J. Schwinger, Phys. Rev. **73**, 416 (1948).
 14. V. Weisskopf, Phys. Rev. **73**, 1272 (1948).
 15. H. W. Lewis, Phys. Rev. **73**, 173 (1948).
 16. S. T. Epstein, Phys. Rev. **73**, 177 (1948).
 17. J. Schwinger, Phys. Rev. **75**, 898 (1949); **76**, 790, (1949).
 18. J. B. French and V. F. Weisskopf, Phys. Rev. **75**, 1240 (1949).
 19. А. Д. Галанин, ЖЭТФ, **19**, 521 (1949).
 20. R. P. Feynman, Phys. Rev. **74**, 430 (1948).
 21. F. J. Dyson, Phys. Rev. **73**, 617 (1948).
 22. Z. Koba, T. Tati and S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **2**, 101, 198, 218 (1947).
 23. J. Schwinger, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948); **75**, 651 (1949).
 24. J. M. Luttinger, Phys. Rev. **74**, 893 (1948).
 25. J. E. Nafe, E. B. Nelson and I. I. Rabi Phys. Rev. **71**, 914 (1947).
 26. D. E. Nagle, R. S. Julian and J. R. Zacharias, Phys. Rev. **72**, 971 (1947).
 27. J. E. Nafe and E. B. Nelson, Phys. Rev. **73**, 718 (1948).
 28. A. Bohr, Phys. Rev. **73**, 1109 (1948).
 29. P. Kusch and H. M. Foley, Phys. Rev. **74**, 25 (1948).
 30. E. A. Uehling, Phys. Rev. **48**, 55 (1935).
 31. W. Pauli and M. Fierz, Nuovo Cimento **15**, 167 (1938).
 32. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ГТТИ, М. — Л., 1940, стр. 108.
 33. Я. Смородинский, ДАН, **40**, 217 (1948).
 34. R. Schafroth, Phys. Rev. **75**, 1111 (1949).
-