

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ДИФФРАКЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ БЫСТРЫХ НЕЙТРОНОВ И ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

А. И. Ахиезер и И. Я. Померанчук

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что если на пути распространения света находятся препятствия — непрозрачные тела, то могут наблюдаться отклонения от законов геометрической оптики, так называемые диффракционные явления, характеризующиеся отсутствием резкой границы между областями света и тени. Диффракционные явления непосредственно связаны с волновой природой света и проявляются тем сильнее, чем меньше размеры непрозрачных тел по сравнению с длиной волны света. Явления диффракции наблюдаются не только в случае распространения света; известна, например, диффракция электронов и других частиц, в которой проявляются волновые свойства этих частиц.

Весьма важным и интересным примером проявления диффракционных явлений может служить рассеяние достаточно быстрых частиц атомными ядрами. Чтобы яснее представить себе картину этого явления, рассмотрим сперва рассеяние нейтронов — частиц, не обладающих электрическим зарядом. Рассеяние таких нейтральных частиц ядрами при определённых условиях должно быть аналогично диффракции света от препятствия, имеющего форму и размеры ядра. Диффракционные явления в области света наблюдаются, если на пути распространения света стоит непрозрачный, т. е. поглощающий свет экран. Если рассматривается рассеяние нейтронов ядрами, то, в определённой области энергий, ядра так же ведут себя по отношению к падающим на них нейтронам, как непрозрачные, поглощающие экраны. Для этого энергия нейтронов не должна быть слишком малой и не должна попадать в область резонансных энергий ядра, так как в этой области существенна роль каждого индивидуального ядерного уровня и поэтому невозможна феноменологическая трактовка ядра как некоторого поглощающего тела, аналогичного непрозрачному оптическому экрану. С другой стороны, при очень больших

энергиях ядро становится прозрачным для падающих на него частиц, и, поэтому, в этом случае также исчезает аналогия с распространением света около непрозрачного экрана. Однако существует широкая область энергий, в которой длина свободного пробега падающей частицы в ядерном веществе мала по сравнению с размерами ядра. В таких условиях ядро непрозрачно для падающих на него частиц.

Это соответствует энергиям падающей частицы, меньшим примерно 30—40 MeV для лёгких и 200 MeV для тяжёлых ядер¹. Если энергия частицы меньше этого предела, но достаточно велика для того, чтобы не сказывалась роль индивидуальных ядерных уровней, то ядро может рассматриваться чисто феноменологически как некоторое непрозрачное для частиц поглощающее их тело. Если при этом частицы электрически нейтральны, то мы должны ожидать полной аналогии между рассеянием (упругом) частиц ядром и диффракцией света от непрозрачного тела, имеющего форму и размеры ядра. Теоретические расчёты и эксперименты подтверждают это предположение.

Можно, однако, пойти дальше и не ограничиваться обязательно случаем нейтральных частиц. При нейтральных частицах имеют место особенно простые соотношения, но диффракционные явления должны наблюдаться также и в случае рассеяния достаточно быстрых заряженных частиц. Диффракционная картина в этом случае гораздо сложнее, чем в случае света, и она переходит в обычную картину, если заряд частицы равен нулю.

В настоящей статье мы подробно изложим теорию диффракционных явлений, имеющих место при рассеянии быстрых частиц поглощающими ядрами, причём будем рассматривать как нейтральные, так и заряженные частицы.

1. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРИЛИПАНИЯ

Выясним, при каких условиях ядро может считаться абсолютно поглощающим (т. е. непрозрачным) по отношению к падающим на него нейтронам. Для ответа на этот вопрос необходимо рассмотреть общие свойства столкновений между нейтронами и ядрами.

Оказывается возможным описать ряд свойств ядерных реакций, происходящих с тяжёлыми ядрами, без детальной теории ядерных сил. Это связано с возможностью применения при изучении свойств тяжёлых ядер, содержащих большое число сильно взаимодействующих частиц, методов статистической физики^{2, 3, 4, 5}.

Для того чтобы выяснить особенности протекания ядерных реакций, сравним между собой атомные и ядерные столкновения. В том хорошо изученном случае, когда энергия взаимодействия падающей частицы (скажем, электрона) с отдельными электронами атома мала по сравнению с энергией самой частицы, передача энергии от частицы атомному электрону представляет собой редкое явление. Наиболее

вероятным будет прохождение частиц через атом без потери энергии или, иначе говоря, упругое рассеяние частиц.

С малой величиной взаимодействия связана малая величина ускорения падающей частицы. Отсюда видно, что время, в течение которого частица находится в области атома, по порядку величины равно частному от деления некоторой длины, порядка размеров атома, на скорость частицы.

Иные соотношения имеют место при ядерных столкновениях, происходящих с участием частиц, энергия которых значительно меньше энергии связи атомных ядер. Существенным является то обстоятельство, что взаимодействие между сталкивающимися частицей и ядром очень велико. Энергия этого взаимодействия — того же порядка величины, что и энергия взаимодействия между отдельными частицами, образующими ядро. Сильное взаимодействие между сталкивающимися частицей и ядром приводит к тому, что очень скоро после соприкосновения с ядром падающая частица теряет значительную часть своей энергии, которая передаётся другим частицам, составляющим исходное ядро.

Это распределение энергии, сосредоточенной вначале на падающей частице, между всеми имеющимися частицами таково, что ни одна из них, вообще говоря, не будет обладать достаточной энергией, чтобы сразу покинуть образовавшуюся систему — исходное ядро плюс падающая частица. Только по прошествии длительного времени, когда благодаря флуктуациям какая-либо частица приобретёт достаточную энергию, чтобы преодолеть силы притяжения, действующие на неё со стороны остальных частиц, она сможет покинуть ядро.

Мы приходим, следовательно, к важному выводу: сталкивающаяся частица и ядро можно рассматривать как единую квантово-механическую систему, которая существует, не распадаясь, в течение длительного времени, если измерять последнее в характерной ядерной шкале. Это значит, что время жизни системы значительно больше того времени, в течение которого сталкивающаяся с ядром частица может пройти расстояние порядка размеров ядра, не задерживаясь в последнем. Если положить скорость частицы порядка $4 \cdot 10^9$ см/сек и размеры ядра считать порядка $10 \cdot 10^{-13}$ см, то «характерное ядерное время» будет порядка $3 \cdot 10^{-22}$ сек.

В течение времени существования рассматриваемой системы свойства её не отличаются от свойств обычных ядер, находящихся в сильно возбуждённых состояниях. Поэтому принято называть систему ядро + падающая частица «промежуточным ядром».

Выше мы говорили, что только по прошествии длительного времени энергия возбуждения составного ядра может случайно сосредоточиться на какой-либо частице, которая сможет поэтому покинуть составное ядро. При этом совсем не обязательно, чтобы вылетевшая из составного ядра частица была того же сорта, что и первоначальная

частица, приведшая к образованию этого ядра. Напротив, вообще говоря, мало вероятно, чтобы природа обеих частиц была одинаковой, так как имеется много возможностей распада составного ядра. Ещё менее вероятно, чтобы при одинаковой природе налетающей и вылетающей частиц внутреннее состояние ядра не менялось; более вероятно, что оставшееся после вылета частицы ядро будет находиться в возбуждённом состоянии.

Если вылетающая частица того же сорта, что и падающая, и внутренние состояния начального ядра и ядра, остающегося после распада составного ядра, совпадают, то мы имеем дело с упругим рассеянием частиц. Можно сказать, что упругое рассеяние представляет собой сравнительно редкое событие при ядерных столкновениях, происходящих с участием быстрых частиц, так как распад составного ядра может происходить, вообще говоря, различными способами, при которых вылетающая частица отличается по своей природе от падающей частицы, а остающееся ядро находится в возбуждённом состоянии. Таким образом, при ядерном столкновении следует различать две стадии: образование квазистационарного, долго живущего составного ядра и распад последнего. Иными словами, ядерное столкновение происходит согласно схеме: начальное ядро + падающая частица $\rightarrow$ промежуточное ядро $\rightarrow$ остающееся ядро + вылетающая частица.

Поскольку связь между частицами в составном ядре чрезвычайно сильна и это ядро относительно «долго» живёт, вторая стадия распада составного ядра должна рассматриваться как отдельное событие, не зависящее от первой стадии — образования составного ядра, т. е. «запутывания» падающей частицы в ядерном веществе. Конечный результат ядерного столкновения определяется соревнованием между различными возможными процессами распада составного ядра, совместимыми с общими законами сохранения.

Для того чтобы понятие составного ядра как квазистационарной системы имело смысл, необходимо, очевидно, предполагать достаточно большим общее число частиц, между которыми распределяется энергия, вначале связанная с падающей частицей. Что касается энергии падающей частицы, то она не должна быть слишком большой, так как в области больших энергий ядро становится «прозрачным» для частицы. Понятием составного ядра можно пользоваться, если длина свободного пробега падающей частицы в ядерном веществе мала по сравнению с размерами ядра. Для лёгких ядер это соответствует энергиям падающей частицы, меньшим примерно 50 MeV, для тяжёлых ядер — энергиям, меньшим 250 MeV. Мы здесь будем рассматривать случай достаточно малых энергий падающей частицы, когда законно пользоваться понятием составного ядра.

Подобно обычным стабильным ядрам, составное ядро характеризуется спектром своих энергетических уровней. Так как составное ядро представляет собой только квазистационарную, а не стабиль-

ную систему, то эти уровни обладают некоторой шириной. Ширина уровня связана со временем жизни системы, находящейся на этом уровне.

Согласно принципу неопределённости ширина уровня γ по порядку величины равна частному от деления квантовой постоянной $\hbar$ на время жизни τ :

$$\gamma \approx \frac{\hbar}{\tau}. \quad (1,1)$$

Вероятность W перехода системы в единицу времени из состояния, соответствующего рассматриваемому уровню, в любое другое возможное состояние равна

$$W = \frac{1}{\tau}. \quad (1,2)$$

Если распад составного ядра, находящегося в некотором состоянии, может происходить различными путями, то W можно представить в виде

$$W = \sum_i W_i, \quad (1,3)$$

где W_i — вероятность распада i -го типа. Соответственно этому можно говорить о частичной ширине γ_i рассматриваемого уровня, отвечающей распаду i -го типа, понимая под γ_i вероятность W_i , умноженную на $\hbar$. Очевидно, полная ширина уровня равна сумме его частичных ширин:

$$\gamma = \sum_i \gamma_i. \quad (1,4)$$

Можно, например, говорить о нейтронной ширине γ_n , радиационной ширине γ_r , ширинах γ_α и γ_p по отношению к вылету α -частицы и протона и т. д., понимая под этими величинами вероятности вылета из составного ядра нейтрона, γ -кванта, α -частицы, протона и т. д., измеренные в энергетической шкале.

Так как время жизни составного ядра велико, если измерять его в характерных ядерных единицах, то ширины уровней составного ядра оказываются малыми по сравнению с ядерными энергиями связи. Отсюда, однако, не следует, что ширины уровней обязательно малы по сравнению с расстояниями между соседними уровнями. Принципиально возможны два случая: когда ширины уровней малы по сравнению с расстояниями между соседними уровнями и когда ширины того же порядка, что и расстояния между уровнями, или даже больше их. Первый случай осуществляется в области энергий возбуждения составных ядер, которые возникают при облучении ядра медленными частицами (например, медленными нейтронами). Второй случай имеет место для уровней составных ядер, возникающих при бомбардировке ядер быстрыми частицами. В этом случае обычно расстояние между соседними уровнями меньше их ширин.

Только в первом случае можно говорить об отдельных дискретных уровнях; во втором случае мы имеем дело по существу с непрерывным спектром. Очень важной особенностью первого случая является резко выраженная зависимость вероятности или эффективного сечения образования составного ядра от энергии падающей частицы. Эта зависимость имеет резонансный характер: при некоторых значениях энергии падающей частицы вероятность образования составного ядра, а следовательно, и сечение для какого-либо процесса ядерного расщепления становятся особенно большими. Резонансные явления такого вида действительно наблюдаются, например, при взаимодействии медленных нейтронов с ядрами.

Во втором случае (перекрывающиеся уровни) не существует резко выраженной резонансной зависимости сечения от энергии. Величина сечения в этом случае обусловлена действием большого количества уровней. Наблюдаемое сечение представляет собой результат усреднения сечений, связанных с каждым уровнем, по большому числу уровней. Изучение этого случая упрощается благодаря тому, что при больших возбуждениях можно пользоваться статистическими методами.

Если энергия возбуждения составного ядра сосредоточивается на какой-либо частице, то последняя покидает составное ядро. Возможны следующие виды превращения составного ядра: испускание нейтрона или заряженной частицы (например, протона, α -частицы), испускание γ -кванта и, наконец, деление ядра.

Из перечисленных выше процессов деление происходит только в случае самых тяжёлых ядер. Что касается испускания заряженных частиц, то вероятность вылета заряженной частицы из-за барьерных эффектов, вообще говоря, меньше чем нейтральной.

Мы знаем что каждая возможность распада связана с некоторым уширением уровня системы. Поэтому каждому процессу распада можно привести в соответствие частичную ширину уровня. Рассмотрим частичные ширины по отношению к вылету нейтрона и испусканию γ -кванта, которые обычно называют нейтронной и радиационной ширинами.

Нейтронная ширина γ_n существенно зависит от энергии возбуждения составного ядра. Если последняя меньше энергии связи нейтрона в ядре, то γ_n равна нулю. Ниже мы увидим, что если энергия возбуждения близка к энергии связи нейтрона, так что кинетическая энергия вылетающего из ядра нейтрона невелика, то γ_n пропорциональна скорости вылетающего нейтрона.

С увеличением энергии возбуждения нейтронная ширина сильно возрастает. Этому содействует, прежде всего, увеличение скорости нейтрона, а также то обстоятельство, что, при больших энергиях возбуждения составного ядра, ядро, остающееся после вылета нейтрона, может само по себе находиться в возбуждённом состоянии. Поэтому число возможностей, связанных с вылетом нейтро-

на, значительно возрастает, что и приводит к сильному увеличению γ_r .

Радиационная ширина γ_r отлична от нуля при всех сколь угодно малых возбуждениях ядра. Для энергий возбуждения, не превосходящих энергию связи нейтрона в ядре, радиационная ширина совпадает с полной шириной уровня, так как нейтронная ширина при этом обращается в нуль. При достаточно больших энергиях возбуждения радиационная ширина значительно меньше нейтронной. Практически во всех случаях, когда приходится иметь дело с ядрами среднего атомного веса (~ 100), γ_r не превосходит по порядку величины $0,1 \text{ eV}$ и скорее меньше этой величины. Нейтронная ширина для таких ядер при энергии вылетающих нейтронов порядка $10\text{—}100 \text{ KeV}$ уже превосходит радиационную ширину.

Выясним, каким образом можно связать частичные ширины с другими величинами, характеризующими состояние ядра. Мы воспользуемся для этой цели так называемым принципом детального равновесия, устанавливающим связь между вероятностями прямого и обратного переходов. В данном случае речь идёт об установлении связи между шириной уровня и сечением образования составного ядра.

Представим себе большой сосуд объёма Ω , содержащий ядра самых различных сортов. Между ядрами могут происходить ядерные реакции. Мы рассмотрим состояние статистического равновесия, при котором число расщеплений в единицу времени ядер сорта C , происходящих согласно схеме $C \rightarrow A + a$ (A, a — продукты реакции), равно в единицу времени числу рекомбинаций типа $A + a \rightarrow C$.

Обозначим вероятности процессов расщепления и рекомбинации, отнесённые к единице времени, соответственно через W_{Aa}^C и W_C^{Aa} . Условие равенства между числом рекомбинаций типа $A + a \rightarrow C$ и числом расщеплений типа $C \rightarrow A + a$ можно записать в виде

$$g_C W_{Aa}^C = g_A g_a W_C^{Aa}, \quad (1,5)$$

где g_A — статистический вес состояния, в котором находится ядро A .

Обозначим через $E_A, E_C \dots$ значения внутренней энергии ядер $A, C, \dots$, понимая под внутренней энергией разность между полной энергией покоящегося ядра и энергией покоя составляющих его частиц. Пусть, далее, p_A, p_C обозначают количества движения ядер $A, C, \dots$. Мы предположим, что количество движения ядра A находится в интервале между p_A и $p_A + d p_A$.

Если E_A относится к дискретному спектру, то под статистическим весом d мы должны понимать произведение $(2i + 1)$ (где i — момент количества движения ядра A в состоянии с энергией E_A)

$$\text{на } \frac{\Omega dp_A}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Если E_A относится к непрерывному спектру и внутренняя энергия ядра A лежит в интервале $(E_A, E_A + dE_A)$, то статистический

вес g_A равен

$$g_A = \rho(E_A) dE_A \frac{\Omega dp_A}{(2\pi\hbar)^3},$$

где $\rho(E_A) dE_A$ — число уровней ядра A в интервале энергии $(E_A, E_A + dE_A)$, причём каждый уровень считается столько раз, какова кратность его вырождения.

Мы понимаем под C составное ядро, энергия которого лежит в непрерывном спектре, состояние же ядра A считаем дискретным. Под a мы понимаем частицу, покидающую ядро C . Итак,

$$g_C = \rho(E_C) dE_C \frac{\Omega dp_C}{(2\pi\hbar)^3}; \quad g_A = (2i+1) \frac{\Omega dp_A}{(2\pi\hbar)^3}; \quad (1,6)$$

$$g_a = (2s+1) \frac{\Omega dp_a}{(2\pi\hbar)^3},$$

где s — спин частицы a , i — момент количества движения ядра A .

Подставляя (1,6) в (1,5), получим:

$$W_{Aa\rho}^C(E_C) dE_C dp_C = (2i+1)(2s+1) W_C^{Aa} dp_A dp_C \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (1,7)$$

Введём в рассмотрение вектор импульса относительного движения частиц A и a , который обозначим через $\mathbf{p}$,

$$\mathbf{p} = \frac{M_a M_A}{M_a + M_A} (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_A) = \frac{M_A \mathbf{p}_a - M_a \mathbf{p}_A}{M_a + M_A}$$

(здесь M_A , M_a — масса частиц A и a и $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_a$ — их скорости). Легко убедиться в том, что имеет место равенство

$$d\mathbf{p}_A d\mathbf{p}_a = d\mathbf{p}_C d\mathbf{p}.$$

(Это равенство означает, что якобиан перехода от переменных $\mathbf{p}_A$, $\mathbf{p}_a$ к переменным $\mathbf{p}_C = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_a$ и $\mathbf{p}$ равен единице.) Воспользовавшись этим равенством, перепишем (1,7) в виде

$$W_{Aa}^C dE_C = (2i+1)(2s+1) \frac{1}{\rho(E_C)} W_C^{Aa} dp \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (1,8)$$

Воспользуемся теперь законом сохранения энергии, в силу которого

$$E_C = E_A + E_a + E,$$

где E_a — энергия связи частицы a , E — энергия относительного движения частиц A и a :

$$E = \frac{p^2}{2M}, \quad M = \frac{M_a M_A}{M_a + M_A}.$$

Из написанного равенства следует, что $dE_C = dE$. Заменив dp на $4\pi p^2 \frac{dp}{dE} dE_C$, мы получим из (1,8) соотношение

$$W_{Aa}^C = W_C^{Aa} \frac{(2i+1)(2s+1)}{\rho(E_C)} \frac{4\pi M p \Omega}{(2\pi\hbar)^3} =$$

$$= W_C^{Aa} \frac{(2i+1)(2s+1)}{(2j+1)} D_j \frac{4\pi M p \Omega}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (1,9)$$

где j — момент количества движения составного ядра, а D_j — среднее расстояние между вырожденными уровнями составного ядра, момент количества движения которых равен j . Мы считаем при этом, что кратность вырождения уровня составного ядра с энергией возбуждения E_C равна $2j+1$.

Умножив W_{Aa}^C на $\hbar$, мы найдём частичную ширину по отношению к распаду типа $C \rightarrow A + a$, усреднённую по всем уровням составного ядра, энергия которых лежит вблизи $E_C = E_A + E_a + E$. Обозначим эту усреднённую ширину через Γ_{Aa}^C . Введём ещё сечение образования составного ядра в результате столкновения частиц A и a , равное

$$\sigma_C^{Aa} = \frac{W_C^{Aa}}{(v/\Omega)},$$

где v — скорость относительного движения частиц A и a . Формулу (1,9) мы перепишем окончательно в виде

$$\Gamma_{Aa}^C = \frac{(2j+1)(2s+1)}{2j+1} D_j \frac{\sigma_C^{Aa}}{2\pi^2 \lambda^2}, \quad (1,10)$$

где λ — разделённая на 2π длина волны частицы a .

Таким образом, пользуясь статистическими соображениями, можно связать частичную ширину уровня с вероятностью обратного процесса, т. е. с сечением образования составного ядра. При этом следует ещё раз подчеркнуть, что речь идёт о ширине, усреднённой по большому числу уровней, лежащих вблизи энергии возбуждения E_C .

Умножив σ_C^{Aa} на Γ_{Bb}^C/Γ_C , где Γ_C — полная ширина уровня составного ядра, а Γ_{Bb}^C — частичная ширина по отношению к распаду C на ядро B и частицу b , и просуммировав полученное выражение по всем значениям момента составного ядра j , совместимых с законом сохранения момента, найдём усреднённое эффективное сечение для процесса $A + a \rightarrow B + b$:

$$\overline{\sigma_{Bb}^{Aa}} = \frac{2\pi^2 \lambda^2}{(2i+1)(2s+1)} \sum_j (2j+1) \frac{\Gamma_{Aa}^C \Gamma_{Bb}^C}{\Gamma_C D_j}. \quad (1,11)$$

Перейдём теперь к определению сечения образования составного ядра σ_C^{Aa} . Напомним предварительно, что параметр столкновения частиц A и a , т. е. расстояние между первоначальным направлением движения a и центром ядра A , равен по порядку величины $r_l = l\lambda$, где λ — делённая на 2π длина волны частицы a вдали от ядра, а $l\hbar$ — момент частицы a относительно A . Мы рассмотрим случай быстрых падающих частиц, когда $\lambda \ll R$.

Обозначим через σ_l общее эффективное сечение образования составного ядра в результате столкновения ядра A с частицей a , обладающей моментом l , независимо от того, какое значение будет иметь при этом момент количества движения составного ядра.

Если α_{lj} — вероятность того, что образующееся составное ядро будет иметь момент j , то

$$\sigma_c^{Aa} = \sigma_j^{Al} = \alpha_{lj} \tau_l. \quad (1,12)$$

Для определения σ_j найдём число частиц a с моментом l , падающих в единицу времени на ядро A . Так как предполагается, что $\lambda \ll R$, то мы можем пользоваться квазиклассическим рассмотрением.

Вдали от ядра частицы с момента $l\hbar$ пронизывают, очевидно, площадь кольца, расположенного перпендикулярно к направлению движения частиц, причём внутренний и внешний радиусы кольца равны соответственно $r_l = l\lambda$ и $r_{l+1} = (l+1)\lambda$. Пусть поток частиц, т. е. число их, падающее в единицу времени на единицу площади, равняется единице. Так как площадь кольца равна $(2l+1)\pi^2\lambda$, то искомое число частиц, падающих на A в единицу времени и обладающих моментом l , равняется $(2l+1)\pi\lambda^2$. Это, очевидно, максимально возможное значение σ_l , отвечающее тому случаю, когда все падающие частицы поглощаются ядром. В действительности поглощается лишь некоторая их часть, которую мы обозначим через ζ_l .

Итак, сечение образования составного ядра можно представить в виде

$$\sigma_l = (2l+1)\pi\lambda^2\zeta_l \quad (0 \leq \zeta_l \leq 1). \quad (1,13)$$

Величина ζ_l называется вероятностью прилипания частицы к ядру или иначе вероятностью образования составного ядра.

Определим теперь α_{lj} , т. е. вероятность того, что в результате слияния ядра A и частицы a возникает составное ядро с моментом j . Будем предполагать, что вероятность прилипания ζ_l не зависит от j . Иными словами, мы считаем, что вероятность появления какого-либо значения j определяется только статистическим весом j , т. е. числом различных возможных ориентаций вектора момента, имеющего значение j . Число этих ориентаций равно $2j+1$. Поэтому мы полагаем:

$$\alpha_{lj} = g_{lis,j} \frac{2j+1}{(2s+1)(2l+1)(2i+1)}, \quad (1,14)$$

где $g_{lis,j}$ представляет собой число способов, которыми можно получить данное значение j , складывая векторно l, i, s .

Если хотя бы одно из чисел l, i, s равняется нулю, то $g = 1$. Если $s = 1/2$, то для максимального и минимального значений j , равных соответственно $l+i+\frac{1}{2}$ и $|l-i|-\frac{1}{2}$, величина $g = 1$; для всех промежуточных значений j величина $g = 2$, так как такие значения можно получить двумя способами. Легко убедиться в том, что определённая указанным образом величина α_{lj} представляет собой пронормированную вероятность, т. е. $\sum_j \alpha_{lj} = 1$, причём суммирова-

ние распространяется на все возможные, совместимые с законом сохранения момента значения j .

Пользуясь формулами (1,13) и (1,14), представим сечение образования составного ядра σ_j^{Al} в виде

$$\sigma_j^{Al} = \pi \lambda^2 g_{ls,j} \frac{2j+1}{(2s+1)(2i+1)} \zeta_l. \quad (1,15)$$

Подставляя это выражение в формулу (1,10), найдём усреднённую ширину $\Gamma_{Al}^j \equiv \Gamma_{Aa}^C$:

$$\Gamma_{Al}^j = g_{ls,j} D_j \frac{\zeta_l}{2\pi}. \quad (1,16)$$

Эта формула связывает вероятность (т. е. частичную ширину) распада составного ядра C (в результате которого появляется частица a с моментом l и ядро A) с вероятностью прилипания ζ_l частицы a к ядру A и средним расстоянием между уровнями составного ядра D_j (речь идёт, очевидно, об уровнях C с энергией возбуждения, близкой к $E_l = E_A + E_a + E$). Величина ζ_l определяется энергией падающей частицы E и её моментом l .

Из (1,16) вытекает важный вывод: если вероятность прилипания ζ_l по порядку величины равняется единице, то частичная ширина Γ_{Al}^j имеет порядок величины расстояния между уровнями составного ядра D_j , и наоборот. Иными словами, уровни составного ядра в этом случае перекрываются. Нужно подчеркнуть, что (1,16) определяет только усреднённую по большому числу близко расположенных уровней частичную ширину для какого-либо вида расщепления составного ядра.

Согласно (1,16) вероятность прилипания при $l=0$ равна

$$\zeta_0 = \frac{2\pi}{g_{0is,j}} \frac{\Gamma_{A0}^j}{D_j}. \quad (1,17)$$

Нейтронная ширина при малых энергиях нейтрона пропорциональна корню из энергии нейтрона. Напомним, что ζ_l с $l \neq 0$ при малых энергиях очень малы, так как наименьший прицельный параметр в этом случае будет больше чем радиус ядра. Используя экспериментальные данные⁶ о Γ_n , мы имеем:

$$\zeta_0 \approx 10^{-3} \frac{2\pi}{g_{0is,j}} \frac{\sqrt{E}}{D}. \quad (1,18)$$

(E и D в электрон-вольтах). Из этого соотношения следует, что при $E = 1 \text{ MeV}$ ζ_0 порядка единицы, если D порядка 10 eV при таких возбуждениях промежуточного ядра. Эта оценка показывает сильное поглощение ядром нейтронов с энергией порядка 1 MeV . (Речь идёт о поглощении, приводящем к образованию промежуточного ядра, а не о радиационном захвате.)

Аналогичные соотношения имеют место и для заряженных частиц (протонов, дейтронов, α -частиц) в том случае, когда они имеют энергию, превышающую высоту барьера на величину порядка 1 MeV .

Однако оценка (1,18) не годится, если $E > 1 \text{ MeV}$. Для того чтобы выяснить поведение ζ_i при больших энергиях, мы рассмотрим, следуя⁷, некоторый полукачественный способ определения вероятности прилипания.

Мы будем исходить из того, что свободная частица, попавшая в ядро, поглощается последним и теряет свою индивидуальность. Поэтому, рассматривая образование составного ядра с феноменологической точки зрения, мы должны характеризовать ядерное вещество большим поглощением ядерных частиц. Для получения качественной картины сделаем простейшее предположение, считая, что число частиц, поглощаемых в единицу времени в некоторой точке ядра, пропорционально плотности частиц в этой точке.

Уравнение непрерывности с учётом поглощения можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = -\frac{2}{\hbar} \sigma \rho, \quad (1,19)$$

где $\mathbf{j}$ и ρ — соответственно плотность тока и плотность частиц, а σ — некоторая величина, характеризующая поглощение, которую будем называть абсорбционным потенциалом. Эта величина зависит от координат, а также от энергии и других величин, характеризующих частицу (спин, направление движения и др.). Для качественной ориентации мы будем считать, что зависимость от спина и направления движения не существенна. Что же касается зависимости от энергии частицы, то она может стать заметной только в очень большом интервале изменения энергии, по порядку величины равном энергии связи частиц в ядре ($\sim 10 \text{ MeV}$). Рассматривая небольшой интервал изменения энергии, можно считать σ не зависящим от энергии частицы.

Итак, мы предполагаем, что σ зависит только от координат частицы. Легко видеть, что наличие абсорбционного потенциала в (1,19) можно учесть, если записать уравнение Шредингера для падающей частицы в виде

$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V + i\sigma) \Psi = 0, \quad (1,20)$$

где E — кинетическая энергия частицы вдали от ядра, а V — её потенциальная энергия.

Чтобы доказать эквивалентность уравнений (1,19) и (1,20), умножим (1,20) на Ψ^* (Ψ^* — величина, комплексно сопряжённая Ψ) и вычтем из полученного произведения комплексно сопряжённое ему выражение. Пользуясь определениями ρ и $\mathbf{j}$:

$$\rho = \Psi^* \Psi, \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*),$$

мы и получим (1,19).

Таким образом, абсорбционный потенциал появляется как мнимая часть эффективной комплексной потенциальной энергии частицы $V - i\sigma$.

Внутри ядра σ по порядку величины равняется энергии ядерного взаимодействия, что составляет около 30 MeV. Заметим, что ни σ , ни V не испытывают резкого скачка на границе ядра, поскольку ядерные силы, которыми в сущности и определяются V и σ , обладают конечным радиусом действия. Следует также иметь в виду, что граница ядра не может считаться резкой благодаря наличию нулевых колебаний ядерных частиц и конечности радиуса действия ядерных сил. Вне узкого пограничного слоя, который мы назовём областью диффузности ядерной границы, потенциал $V - iz$ можно не учитывать.

Излагаемая теория является полукачественной, тем не менее, как мы увидим далее, основные особенности поведения ξ_l при больших и малых энергиях она передаёт правильно.

Запишем потенциальную энергию частицы в виде $V = V_n + V_l$, где V_n связано с ядерными, а V_l — с кулоновскими и центробежными силами. Будем считать, что V_n , σ , V_l зависят только от r — расстояния до центра ядра. Введём радиальную функцию $U = r\Psi$; уравнение Шредингера для неё имеет вид

$$\frac{d^2 U}{dr^2} = \Phi(r) U, \quad (1,21)$$

где

$$\Phi(r) = \frac{2m}{\hbar^2} [-W(r) + V_n(r) - iz(r)]$$

и

$$W(r) = E - V_l(r).$$

Вне ядра, но вблизи от его поверхности, где V_n и σ играют ещё существенную роль, будем считать $W(r)$ постоянной, равной

$$W = E - V_l(R),$$

где R — радиус ядра.

Рассмотрим сначала случай больших энергий падающей частицы, когда длина волны частицы значительно меньше радиуса ядра. В этом случае можно пользоваться методом квазиклассического приближения. Условие применимости этого метода состоит в том, что модуль изменения Φ на протяжении длины волны, равной $\frac{1}{\sqrt{\Phi}}$, должен быть малым по сравнению с абсолютным значением самой функции Φ .

Поскольку величина W предполагается большой, а V_n и σ не испытывают резкого изменения на границе ядра, можно считать, что условия применимости метода квазиклассического приближения выполнены.

Пользуясь этим методом, представим решение уравнения (1,21) в виде

$$U = \text{const.} \cdot \Phi^{-1/4} \exp\left(\int_0^r \Phi^{1/2} dr\right). \quad (1,22)$$

Мы должны при этом взять $\sqrt{\Phi}$ с таким знаком, чтобы U убывало по направлению к центру ядра. Такой выбор знака соответствует нашему основному предположению о поглощении частиц ядром. Итак, вещественная часть должна быть положительной. При $r < R$ величина Φ находится в третьей четверти плоскости комплексного переменного (вещественная и мнимая части Φ отрицательны). Поэтому $\Phi^{1/2}$ должна лежать в четвертой четверти комплексной плоскости.

Представим себе теперь, что r увеличивается; при этом σ и V_n уменьшаются и, наконец, вне ядра становятся равными нулю. Поскольку $\Phi^{1/2}$ всё время должно оставаться в четвертой четверти, мнимая часть $\Phi^{1/2}$ должна быть отрицательной также и вне ядра. Поэтому решение (1,22) вне ядра имеет вид

$$U = \text{const. } \Phi^{-1/2} \exp \left\{ -i \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int \sqrt{E - V_l(r)} dr \right\}, \quad (1,22')$$

т. е. представляет собой чисто падающую волну. Так как мы не получили отраженной волны, то это значит, что вероятность прилипания ζ_l равна единице.

Итак, для быстрых частиц, попадающих в сферу действия ядра,

$$\zeta_l = 1.$$

Полученное соотношение имеет простой физический смысл. Поскольку мы рассматриваем случай быстрых частиц, т. е. малых длин волн, справедлива классическая механика. Но в таком случае совершенно ясно, что если частица попадает в сферу действия ядра, т. е. параметр столкновения для неё меньше радиуса ядра, то частица поглощается ядром, иначе говоря, $\zeta_l = 1$. Отклонения от соотношения $\zeta_l = 1$ связаны с неточностью квазиклассического приближения, которым мы пользовались.

Перейдём теперь к рассмотрению случая малых энергий падающей частицы, когда её длина волны велика по сравнению с радиусом ядра.

Предположим, что падающей частицей является медленный нейтрон, орбитальный момент которого равен нулю. В этом случае $V_l = 0$.

Вне ядра уравнение (1,21) имеет вид

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} EU = 0,$$

откуда

$$U = \text{const. } \sin(kr + \eta) = \text{const. } (e^{ikr+i\eta} - e^{-ikr-i\eta}), \quad (1,23)$$

где $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ и η — комплексная фаза рассеяния. Последнюю можно связать со значением логарифмической производной U на поверхности ядра, т. е. при $r = R$:

$$\left(\frac{1}{U} \frac{dU}{dr} \right)_{r=R} = \chi. \quad (1,24)$$

Так как мы предполагаем, что длина волны падающей частицы значительно больше размеров ядра, то значение этой производной вне ядра не испытывает существенного изменения на расстояниях порядка R . Поэтому введение величины χ имеет смысл, несмотря на диффузность ядерной границы.

Величину χ следует считать комплексной, так как благодаря возможности поглощения частиц комплексной является эффективная потенциальная энергия. Мы запишем χ в виде

$$\chi = -\frac{1}{b} e^{-i\frac{\varphi}{2}}, \quad \varphi > 0,$$

где b по порядку величины определяет ширину области диффузности ядерной границы, φ — вещественная фаза, зависящая от комплексного потенциала $V - i\sigma$. (То обстоятельство, что $\varphi > 0$, следует из выражения для коэффициента прилипания ζ_0 ; см. ниже (1,25)). В первом приближении можно считать, что b и φ не зависят от энергии.

Так как kR и абсолютное значение η малы по сравнению с единицей (последнее условие означает, что величина сечения рассеяния мала по сравнению с $\pi\lambda^2$), то (1,23) мы представим в виде

$$U = \text{const.} (kr + \eta).$$

Граничное условие (1,24) приводит к результату

$$\eta = -kR + kbe^{i\varphi/2}.$$

Вероятность прилипания частиц с моментом $l=0$ равна [см. дальше (3,8) ($\beta_0 = e^{2i\eta_0}$)]:

$$\zeta_0 = 1 - |\beta_0|^2 = 4kb \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (1,25)$$

причём мы пренебрегли здесь членами порядка $|\eta|^2$.

Выше мы говорили, что b и φ в области малых энергий можно считать не зависящими от энергии нейтрона. Формула (1,25) показывает в таком случае, что для медленных нейтронов, длина волны которых велика по сравнению с R , вероятность прилипания пропорциональна k , т. е. $\sqrt{E}$. Отметим, что ζ_0 становится порядка единицы при $E \approx 1 \text{ MeV}$, если $b \approx 10^{-13} \text{ см}$. Этот результат соответствует тем выводам, которые были получены ранее (1,18). Таким образом по отношению к нейтронам, энергия которых $E \gg 1 \text{ MeV}$, ядра являются «чёрными». (При очень больших энергиях ядра становятся прозрачными.)

Мы определили зависимость вероятности прилипания от энергии падающей частицы в предельных случаях больших и малых энергий, когда длина волны частицы мала или велика по сравнению с радиусом ядра. Для получения общей формулы для ζ_l , пригодной при всех энергиях, необходима детальная теория ядерных сил.

2. ОПТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФРАКЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ БЫСТРЫХ НЕЙТРОНОВ

Начнём с рассмотрения диффракционного рассеяния быстрых нейтронов, считая ядро абсолютно «чёрным» телом, поглощающим все падающие на него нейтроны.

Будем предполагать, что ядро имеет форму шара радиуса R и что длина волны нейтронов значительно меньше размеров ядра. При выполнении этого условия ядро можно считать абсолютно «чёрным» для нейтронов, попадающих в сферу действия ядра.

Оценим энергию нейтрона E_0 , при которой длина его волны, делённая на 2π и обозначаемая ниже через λ , становится равной радиусу ядра. Считая, что радиус ядра равен приближённо

$$R = 1,5 \cdot 10^{-13} A^{1/2} \text{ см},$$

где A — массовое число, получим:

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2MR^2} = \frac{8,2}{A^{1/2}} \text{ MeV}.$$

Если $A = 40$, то $E_0 \approx 0,8 \text{ MeV}$, при $A = 100$ $E_0 \approx 0,5 \text{ MeV}$ и при $A = 238$ $E_0 \approx 0,25 \text{ MeV}$.

Итак, мы видим, что если энергия нейтронов превосходит несколько миллионов электрон-вольт, то выполняется условие

$$\lambda \ll R.$$

С другой стороны, хорошо известно, что если длина волны света мала по сравнению с размерами препятствия, то возможно получение общей формулы, описывающей диффракционные явления.

Мы получим диффракционную картину при рассеянии быстрых нейтронов, сперва основываясь на этой оптической диффракционной формуле, а затем убедимся, что та же картина будет иметь место, если исходить из строгой квантовомеханической теории рассеяния. Прежде всего напомним эту формулу и пользуясь ею, получим диффракционную картину для случая, когда свет падает на абсолютно чёрный поглощающий шар радиуса R .

Общая формула, определяющая диффракцию, имеет следующий вид⁸:

$$u = \int_S \frac{k}{2\pi i r} u_0 e^{ikr} df_n. \quad (2,1)$$

Здесь u — искомое поле в некоторой точке P , u_0 — поле в какой-либо точке поверхности интегрирования S , df_n — проекция элемента поверхности df на направление луча $\mathbf{n}$, идущего от источника света к элементу df , $\mathbf{r}$ — расстояние от точки P до элемента поверхности df , $\mathbf{k}$ — волновой вектор. Поверхность интегрирования, в общем произвольного вида, закрывает отверстия в непрозрачном экране и огра-

ничивается его краями. Значения поля u_0 предполагаются здесь такими же, как если бы вовсе не было никаких экранов.

В дальнейшем нас будет интересовать тот случай, когда и источник света и точка наблюдения P находятся на весьма больших расстояниях от экранов. В этом случае, который известен под названием дифракции Фраунгофера, лучи, идущие от источника света, падают на экраны параллельным пучком; параллельными являются также лучи, идущие от экранов в точку наблюдения. Поэтому при дифракции Фраунгофера мы имеем дело с изменением направления пучка света, претерпевшего дифракцию около экранов. Интенсивность света является в этом случае функцией угла отклонения света от первоначального направления. Этот угол называется углом дифракции.

В случае дифракции Фраунгофера все лучи, падающие на экран, имеют одинаковое направление, т. е. одинаковый волновой вектор $\mathbf{k}$. Поэтому поле u_0 на поверхности интегрирования в формуле (2,1) можно представить в виде

$$u_0 = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}},$$

где A — постоянная, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведённый из некоторой точки O к элементу поверхности df (рис. 1).

Как видно из этого рисунка, расстояние r от df до точки наблюдения P можно приблизительно, при большом r , заменить на $r = R_0 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}'$, где $\mathbf{n}'$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{R}_0$, т. е. в направлении луча идущего от экрана в точку наблюдения. Используя это соотношение и замечая, что в подынтегральном выражении величина $\frac{1}{r}$ может считаться постоянной и равной $\frac{1}{R_0}$, представим общую формулу (2,1) в случае дифракции Фраунгофера в виде

$$u = \text{const.} \int_S e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} df, \quad (2,2)$$

где $\text{const.} = \frac{A k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_0}}{2\pi i R_0}$ и $\mathbf{k}' = k \mathbf{n}'$ — волновой вектор диффрактированного луча.

Из формулы (2,2) вытекает важное свойство так называемых дополнительных экранов, т. е. двух таких плоских экранов, из которых

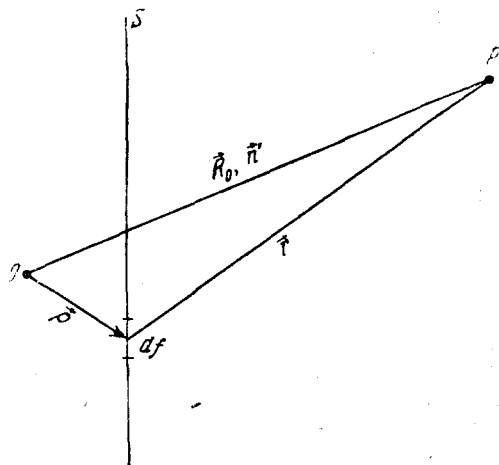


Рис. 1.

один имеет отверстие там, где второй непрозрачен. Она заключается в том, что диффракционные картины дополнительных экранов одинаковы. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно заметить, что если в качестве поверхности интегрирования в (2,2) взять всю бесконечную плоскость, в которой лежит отверстие, то (2,2) сведётся к $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, где $\delta(f)$ — дираковская δ -функция. Поэтому при $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ этот интеграл обращается в нуль и, следовательно, для дополнительных экранов при $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ значения функции u отличаются только знаком. При $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ сформулированное выше свойство дополнительных экранов, вообще говоря, не имеет места.

Нас интересует диффракция от абсолютно чёрного шара радиуса R , на который падает параллельный пучок лучей. Диффракционная картина в этом случае, согласно сказанному выше, совпадает с диффракционной картиной от круглого отверстия радиуса R в непрозрачном экране, перпендикулярно к плоскости которого падает свет. Важно заметить, что диффракционные картины совпадают также и при $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, так как в этом направлении в обоих случаях имеет место максимум интенсивности.

Итак, рассмотрим диффракцию от круглого отверстия радиуса R . Обозначим проекцию вектора $\mathbf{k}'$ на плоскость отверстия через x (вектор $\mathbf{k}$, как было сказано выше, перпендикулярен к этой плоскости).

Введём цилиндрические координаты z, φ с осью, проходящей через центр отверстия перпендикулярно к его плоскости. Из соображений симметрии ясно, что интенсивность диффрагированных лучей не будет зависеть от φ ; поэтому достаточно ограничиться рассмотрением луча, идущего в плоскости $\varphi = 0$. Формула (2,2) приводит к следующему выражению для поля диффрагированной волны:

$$\begin{aligned} u &= \text{const.} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \varphi} r dr d\varphi = \\ &= \frac{Ak}{iR_0} e^{ikR_0} \int_0^R J_0(xr) r dr, \end{aligned} \quad (2,3')$$

где $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \varphi} d\varphi$ — функция Бесселя нулевого ранга.

Пользуясь известным из теории бесселевых функций соотношением

$$\int_0^R J_0(xr) r dr = \frac{R J_1(xR)}{x},$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого ранга, перепишем (2,3') в виде

$$u = -iAkR \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \frac{J_1(xR)}{x}. \quad (2,3)$$

Умножив $|u|^2$ на $R_0^2 d\theta$, где $d\theta$ — элемент телесного угла, в котором лежит вектор $\mathbf{k}'$, найдём интенсивность света dI , претерпевшего дифракцию в этом направлении:

$$dI = R^2 A^2 k^2 \left| \frac{J_1(xR)}{x} \right|^2 d\theta.$$

Замечая, что $A^2 \pi R^2$ представляет собой полную интенсивность падающего на отверстие света, которую мы обозначим через I_0 , представим dI в виде

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(kR \sin \theta)}{\pi \sin^2 \theta} d\theta, \quad (2,4)$$

где θ — угол дифракции, связанный с x соотношением $x = k \sin \theta$.

Такой же формулой определяется распределение света при дифракции от абсолютно чёрного поглощающего шара¹⁰. В этом случае под I_0 следует понимать полную интенсивность света, падающего на площадь поперечного сечения шара. Мы видим, что в этом случае, так же как и при дифракции от круглого отверстия, максимум интенсивности лежит при $x = 0$, т. е. в направлении распространения падающего пучка света. Иными словами, максимум интенсивности лежит в центре тени, получаемой по законам геометрической оптики.

Аналогичной формулой должно определяться диффракционное упругое рассеяние быстрых нейтронов ядрами в том случае, когда ядра полностью поглощают падающие на них нейтроны. Под $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ следует при этом понимать волновые векторы падающих и рассеянных нейтронов, а под I_0 — полную интенсивность пучка нейтронов, падающего на площадь поперечного сечения ядра.

Формулу (2,4) в случае рассеяния нейтронов удобнее выражать в терминах эффективных сечений. Если разделить dI на плотность потока падающих нейтронов, равную $I_0/\pi R^2$, то мы получим дифференциальное поперечное сечение рассеяния $\sigma(\theta) d\theta$, отнесённое к элементу телесного угла $d\theta$. Оно определяется следующей формулой:

$$\sigma(\theta) d\theta = R^2 \left| \frac{J_1(kR \sin \theta)}{\sin \theta} \right|^2 d\theta. \quad (2,5')$$

Заметим, что по самому смыслу оптической диффракционной теории отклонения от геометрической оптики должны быть небольшими; это значит, что угол дифракции должен быть малым. Из полученной нами формулы (2,5') для сечения рассеяния легко заключить, что эффективный угол рассеяния мал и по порядку величины составляет

$\lambda/R \ll 1$. Действительно, при больших значениях аргумента функция Бесселя $J_1(x)$ асимптотически равна

$$J_1(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \gg 1. \quad (2,6)$$

Поэтому в области углов, удовлетворяющих условию $\frac{1}{kR} \ll \sin \theta < 1$, дифференциальное сечение $\sigma(\theta)$ убывает обратно пропорционально $\sin^3 \theta$. Благодаря бы-

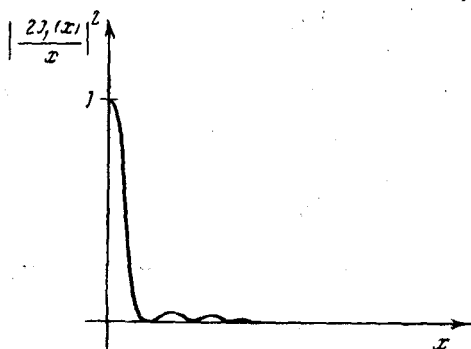


Рис. 2.

строму спадаанию эффективного сечения при углах рассеяния, превышающих λ/R , главную роль в интегральном эффективном сечении играют углы порядка λ/R .

Учитывая это обстоятельство, мы заменим в (2,5') $\sin \theta$ на θ и представим $\sigma(\theta) d\theta$ в виде

$$\sigma(\theta) d\theta = R^2 \left| \frac{J_1(kR\theta)}{\theta} \right|^2 d\theta. \quad (2,6')$$

Представление о характере угловой зависимости сечения даёт рис. 2, на котором изображена зависимость функции $\left| \frac{2J_1(x)}{x} \right|^2$ от x . Эта функция имеет резкий максимум при $x=0$ и далее, осциллируя, стремится к нулю при возрастании x .

В области малых углов рассеяния, когда $\theta \ll \lambda/R$, функция Бесселя $J_1(kR\theta)$ может быть заменена $\frac{kR\theta}{2}$ и поэтому

$$\sigma(\theta) d\theta = \frac{k^3 R^2}{4} d\theta, \quad \theta \ll \frac{\lambda}{R}. \quad (2,7)$$

Таким образом, при очень малых углах θ дифференциальное сечение стремится к постоянному пределу.

Если углы θ удовлетворяют условию $\frac{\lambda}{R} \ll \theta \ll 1$, то функция Бесселя может быть заменена асимптотическим выражением (6), и $\sigma(\theta) d\theta$ равняется

$$\sigma(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} R \lambda \frac{\sin^2\left(\frac{R}{\lambda} \theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\theta^3} d\theta, \quad \frac{\lambda}{R} \ll \theta \ll 1. \quad (2,8)$$

Эффективное сечение в этой области углов быстро осциллирует с «частотой» R/λ , причём амплитуда колебаний убывает обратно пропорционально кубу угла рассеяния. В силу этого, как уже отмеча-

лось выше, большие углы не играют роли; эффективными в интегральном сечении оказываются углы порядка λ/R .

Итак, мы видим, что диффракционное рассеяние нейтронов характеризуется резкой асимметрией; нейтроны рассеиваются преимущественно вперёд. Эффективный угол рассеяния по порядку величины равен λ/R . При больших углах имеют место вторичные максимумы, отличающиеся, однако, значительно меньшей интенсивностью, чем главный максимум.

Определим полное эффективное сечение рассеяния σ . Интегрируя (2,5) и расширяя пределы интегрирования по $x = kR\theta$ от нуля до бесконечности, найдём:

$$\sigma = 2\pi R^2 \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(x)}{x} dx.$$

Последний интеграл (см. ¹¹⁾ равен $\frac{1}{2}$. Поэтому

$$\sigma = \pi R^2, \quad \lambda \ll R. \quad (2,9)$$

Таким образом, интегральное сечение упругого рассеяния быстрых нейтронов, длина волны которых значительно меньше радиуса ядра, равна площади поперечного сечения последнего.

3. КВАНТОМЕХАНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ К БЫСТРЫМ НЕЙТРОНАМ

Покажем теперь, что формула (2,5), определяющая сечение диффракционного рассеяния нейтральных частиц, может быть получена из общей квантовомеханической теории рассеяния частиц. Мы приведём вывод этой формулы, основанный на общей теории рассеяния, имея в виду в дальнейшем обобщить его на случай заряженных частиц, диффракция которых не может быть описана элементарной формулой (2,2).

Напомним предварительно некоторые общие соотношения, имеющие место при упругом рассеянии частиц.

Пусть на рассеиватель в направлении оси z падает монохроматический пучок частиц, описываемых плоской волной e^{ikz} (k — величина волнового вектора частиц). Вдали от рассеивателя рассеянная волна имеет вид

$$\frac{1}{r} e^{ikr} f(\theta),$$

где r — расстояние до рассеивателя и θ — угол рассеяния. Величина $f(\theta)$ имеет размерность длины и называется амплитудой рассеяния. Амплитуда рассеяния непосредственно связана с дифференциальным сечением $\sigma(\theta) d\theta$ упругого рассеяния частиц в телесном угле $d\theta$ ($d\theta = 2\pi \sin \theta d\theta$):

$$\sigma(\theta) d\theta = |f(\theta)|^2 d\theta. \quad (3,1)$$

Амплитуда рассеяния может быть выражена через так называемые «фазы на бесконечности»¹², определяющие асимптотическое поведение радиальных волновых функций частицы при различных значениях орбитального момента частицы по отношению к рассеивателю. Так как метод расчёта амплитуды рассеяния с помощью фаз на бесконечности чрезвычайно важен, то мы остановимся на нём несколько подробнее.

Заметим, прежде всего, что имеет место следующее разложение плоской волны e^{ikz} в ряд по полиномам Лежандра¹³:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) f_l(kr), \quad (3,2)$$

где

$$f_l(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2} J_{l+\frac{1}{2}}(kr)$$

и $J_{l+\frac{1}{2}}$ — функция Бесселя $l + \frac{1}{2}$ ранга.

Каждое отдельное слагаемое в сумме (3,2) представляет собой волновую функцию свободной частицы с определённым значением орбитального момента количества движения; именно, слагаемое с индексом l соответствует моменту частицы относительно рассеивателя, равному $\hbar l$.

Из теории функций Бесселя известно, что при больших r справедлива асимптотическая формула

$$f_l(kr) \sim (kr)^{-1} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}).$$

Отсюда видно, что волновая функция свободной частицы при больших r ведёт себя как

$$\frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) \{e^{-ikr} - (-1)^l e^{ikr}\} P_l(\cos \theta). \quad (3,3)$$

Поэтому функция

$$\frac{i}{2kr} (-1)^l (2l+1) \{e^{-ikr} - (-1)^l e^{ikr}\} \quad (3,3')$$

представляет собой асимптотическое выражение для радиальной волновой функции свободной частицы с моментом $\hbar l$. В этом выражении первое слагаемое представляет собой падающую, а второе — расходящуюся волну с моментом l .

Если частица испытывает отклонение в силовом поле, т. е. не является свободной, то асимптотическое выражение для её волновой

функции при больших r будет определяться вместо (3,3) формулой

$$\Psi \sim \frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) \{e^{-ikr} - (-1)^l \beta_l e^{ikr}\} P_l(\cos \theta). \quad (3,4)$$

Эта функция отличается от функции, описывающей свободное движение, другими амплитудами расходящихся волн: амплитуда расходящейся волны с моментом l в формуле (3,4) отличается множителем β_l от амплитуды расходящейся волны с моментом l в случае свободного движения. Величины β_l при наличии рассеяния отличны от единицы. Если рассеиватель не поглощает частиц, то по модулю они равны единице, так как интенсивность расходящейся волны равняется в этом случае интенсивности падающей волны. В этом важном случае отсутствия поглощения величину β_l можно представить в виде

$$\beta_l = e^{2i\eta_l},$$

где η_l — вещественная величина, определяющая изменение при рассеянии фазы на бесконечности у l -волны, описывающей движение частицы с моментом $l\hbar$. Эта величина называется фазой на бесконечности. Асимптотическое выражение для радиальной волновой функции несвободной частицы с моментом l имеет вид

$$e^{i\eta_l} \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \eta_l\right).$$

Пользуясь формулами (3,3) и (3,4), легко определить амплитуду рассеяния $f(\theta)$. Для этого следует из (3,4) вычесть (3,3) и результат приравнять $\frac{1}{r} e^{ikr} f(\theta)$. Мы получим, таким образом, следующее выражение для $f(\theta)$, связывающее амплитуду рассеяния с введенными выше величинами β_l :

$$f(\theta) = -\frac{i\lambda}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (\beta_l - 1) P_l(\cos \theta), \quad (3,5)$$

где λ — разделенная на 2π длина волны частицы *).

Для свободного движения, когда $\beta_l = 1$, эта величина, как и должно быть, обращается в нуль.

Определим интегральное сечение упругого рассеяния. Пользуясь формулой (3,1) и замечая, что

$$\int |P_l(\cos \theta)|^2 d\theta = \frac{4\pi}{2l+1}. \quad (3,1')$$

*) В этой формуле не учитывается существование у частицы спина. В дальнейшем формула (3,5) будет применяться к нейтронам, взаимодействие которых с ядрами в интересующей нас области энергии может считаться не зависящим от ориентации спина нейтрона, так как поглощение нейтрона ядром определяется только орбитальным моментом нейтрона и не зависит от его спина (см. формулу (3,10)).

получим, интегрируя (3,1) по телесному углу, следующее выражение для интегрального сечения:

$$\sigma = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |\beta_l - 1|^2. \quad (3,6)$$

Если отсутствует поглощение частиц, то $\beta_l = e^{2i\eta_l}$ (η_l — вещественно) и

$$\sigma = 4\pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \eta_l. \quad (3,6')$$

Заметим, что формула (3,5) является более общей, чем формула (3,6'), так как она применима также и в тех случаях, когда происходит поглощение частиц. В этом случае модуль β_l меньше единицы, так как интенсивность расходящейся волны меньше интенсивности падающей волны.

Прежде чем анализировать формулу (3,6) в интересующем нас случае рассеяния быстрых нейтронов ядрами, мы выведем здесь ещё общую формулу для сечения поглощения частиц ядрами и свяжем это сечение с величинами β_l . Проще всего с этой целью определить поток частиц через поверхность сферы большого радиуса, окружающей ядро. Этот поток, взятый в направлении внутренней нормали к сфере, определяет, очевидно, число частиц, поглощаемых в единицу времени ядром. Поток определяется известной формулой

$$S = \frac{i\hbar}{2M} r^2 \int \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial r} \right) d\Omega, \quad (3,7)$$

где r — радиус сферы, $d\Omega$ — элемент телесного угла и M — масса частицы, описываемой волновой функцией Ψ . В качестве Ψ мы должны, очевидно, воспользоваться асимптотическим выражением (3,4), справедливым вдали от ядра. Замечая, что

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{\Psi}{r} + \frac{1}{2r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-1)^l \{ e^{-ikr} + (-1)^l \beta_l e^{ikr} \} P_l(\cos \theta),$$

и используя условие нормировки шаровых функций (3,1'), получим следующий результат:

$$S = \frac{\pi \hbar}{Mk} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\beta_l|^2).$$

Для определения эффективного поперечника поглощения $\sigma_{\text{зах}}$ нужно разделить S на плотность потока падающих частиц, равную $\frac{\hbar k}{M}$. В результате мы получим следующее выражение для сечения

поглощения частиц:

$$\sigma_{\text{захв}} = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\beta_l|^2). \quad (3,8)$$

Если $|\beta_l| = 1$, то, как и следовало ожидать, $\sigma_{\text{захв}} = 0$.

Итак, мы видим, что как сечение упругого рассеяния, так и сечение захвата полностью определяются величинами β_l . Входящая в (3,8) величина $1 - |\beta_l|^2$ является коэффициентом прилипания ζ_l (1,13).

Вводя ζ_l , перепишем (3,8) в виде

$$\sigma_{\text{захв}} = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \zeta_l. \quad (3,8')$$

Эта формула, связывающая сечение захвата с коэффициентами прилипания, допускает простую физическую интерпретацию, заключающуюся в следующем.

Рассмотрим параллельный пучок быстрых частиц, падающих на ядро. Будем предполагать, что длина волны частиц значительно меньше размеров ядра. В этом случае применимо квазиклассическое рассмотрение. Мы можем поэтому приравнять выражения для момента количества движения частицы, даваемые классической и квантовой механикой. В классической механике момент количества движения частицы равен $M v_{\infty} r_{\infty}$, где v_{∞} — скорость частицы массы M на бесконечном расстоянии от ядра, а r_{∞} — то кратчайшее расстояние, на котором прошла бы частица от ядра, двигаясь по прямой. (Эта величина, как указано ранее, называется параметром столкновения.) В квантовой механике момент равен $\sqrt{l(l+1)} \hbar$. Приравнивая оба выражения, можно определить параметр столкновения:

$$r_{\infty} = \frac{\hbar}{M v_{\infty}} \sqrt{l(l+1)}.$$

Замечая, что $\hbar / M v_{\infty} = \lambda$ и что в квазиклассическом приближении квантовые числа велики, получим следующее выражение для параметра столкновения:

$$r_{\infty} = l \lambda. \quad (3,9)$$

Используя (3,9), легко видеть, что вдали от ядра частицы с моментом l пронизывают площадь кольца, ориентированного перпендикулярно к направлению движения частиц, причём внутренний и внешний радиусы кольца равны соответственно $l \lambda$ и $(l+1) \lambda$. Предположим, что плотность потока частиц, т. е. число их, падающее в единицу времени на единицу площади, равно единице. Так как площадь кольца равна $(2l+1) \pi \lambda^2$, то число частиц, падающих в единицу времени и обладающих моментом l , равняется $(2l+1) \pi \lambda^2$.

Умножив $(2l+1)\pi\lambda^2$ на ζ_l , мы определим долю этих частиц, поглощаемых рассеивателем. Поэтому сумма $\sum_l \pi\lambda^2(2l+1)\zeta_l$ представ-

ляет собой полное сечение захвата частиц. Заметим, что хотя наши рассуждения, строго говоря, справедливы при $l \gg 1$, полученная формула, совпадающая с (3,8'), справедлива при всех l .

Величины β_l и ζ_l являются сложными функциями энергии падающей частицы. Значительные упрощения наступают в случае быстрых частиц, к рассмотрению которого мы теперь и перейдём.

Начнём снова с быстрых нейтронов, длину волны которых будем предполагать малой по сравнению с размерами ядра. Вместе с тем мы будем считать, что энергия нейтронов недостаточно велика для того, чтобы ядро было прозрачным для нейтронов. В этих условиях ядро ведёт себя как абсолютно чёрное тело, поглощающее нейтроны, если только они попадают в сферу действия ядра, иными словами, нейтрон поглощается ядром, если параметр столкновения меньше радиуса ядра. В интересующем нас случае, когда $\lambda \ll R$, параметр столкновения для нейтрона с орбитальным моментом $\hbar l$ равен, как указывалось выше, λl . Поэтому мы приходим к выводу, что коэффициент прилипания равен единице, если $l \leq R/\lambda$, и равен нулю, если $l > R/\lambda$, т. е.

$$\zeta_l = \begin{cases} 1, & \text{если } l \leq R/\lambda, \\ 0, & \text{если } l > R/\lambda \end{cases} \quad (\lambda \ll R). \quad (3,10)$$

Отсюда следует, что β_l равно нулю, если $l \leq R/\lambda$.

Если $l > R/\lambda$, то нейтрон проходит вне ядра и с ним не взаимодействует. Поэтому для моментов количества движения $l > R/\lambda$ величина β_l равна единице. Итак,

$$\beta_l = \begin{cases} 0, & \text{если } l \leq R/\lambda, \\ 1, & \text{если } l > R/\lambda. \end{cases} \quad (3,10')$$

Прежде чем вычислять амплитуду рассеяния с этими значениями β_l , заметим, что резкое разграничение значений моментов количества движения, для которых коэффициент прилипания равен нулю и единице, имеет, конечно, приближённый характер. Это связано, во-первых, с неточностью квазиклассического рассмотрения, которым мы пользовались выше при определении β_l , и, во-вторых, с нерезкостью ядерной границы, которая возникает благодаря движению ядерных частиц, расположенных у границы ядра, и конечности радиуса действия ядерных сил. Поэтому можно сказать, что введение критического момента $l_0 = [R/\lambda]$, разграничивающего значения моментов, для которых ζ равно нулю или единице, имеет смысл с точностью до величины порядка единицы.

Покажем, что мы тем не менее можем пользоваться приведёнными значениями β_l при определении сечения рассеяния быстрых нейтронов,

для которых $\lambda \ll R$. Вычисление амплитуды рассеяния с этими значениями β_l даст, очевидно, правильный результат, если изменение l_0 на единицу не приведёт к заметному изменению амплитуды рассеяния. Записав $f(\theta)$ в виде

$$f(\theta) = -\frac{i\lambda}{2} \sum_{l=0}^{l_0} (2l+1) P_l(\cos \theta), \quad (3.11)$$

мы приходим к следующему условию применимости нашего метода расчёта:

$$|P_{l_0}(\cos \theta) - P_{l_0 \pm 1}(\cos \theta)| \ll |P_{l_0}(\cos \theta)|. \quad (3.11')$$

Так как $l_0 \gg 1$, то для полиномов Лежандра можно воспользоваться асимптотическим выражением⁷

$$P_l(\cos \theta) \approx \left(\frac{2}{\pi l \sin \theta}\right)^{1/2} \cos \left[\left(l + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]. \quad (3.12)$$

(Эта формула справедлива, если $2(2l+3)\sin \theta \gg 1$.) Подстановка (3.12) в (3.11) приводит к результату, что угол рассеяния должен быть малым по сравнению с единицей.

Таким образом, использование полученных квазиклассических значений β_l приводит к правильному результату при вычислении $f(\theta)$ в случае малых углов рассеяния.

Покажем теперь, что при $\lambda \ll R$ малые углы рассеяния играют главную роль. Воспользуемся для этого равенством¹⁴

$$(2l+1)P_l(\cos \theta) = P'_{l+1}(\cos \theta) - P'_{l-1}(\cos \theta). \quad (3.13)$$

Амплитуда рассеяния может быть представлена в виде

$$f(\theta) = \frac{i\lambda}{2} \{P'_{l_0+1}(\cos \theta) + P'_{l_0}(\cos \theta)\}. \quad (3.14)$$

Подставляя сюда вместо $P_{l_0}(\cos \theta)$ выражение (3.12), получим:

$$f(\theta) = i\lambda \left(\frac{2}{\pi l_0}\right)^{1/2} \frac{1}{\sin^{3/2} \theta} \sin \left[\left(l_0 + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]. \quad (3.14')$$

Это выражение показывает, что, отвлекаясь от осцилляций, сечение рассеяния убывает с ростом угла обратно пропорционально $\sin^3 \theta$. Отсюда следует, что главную роль в упругом рассеянии нейтронов с $\lambda \ll R$ играют малые углы рассеяния, для которых наше рассмотрение является вполне законным. Заменяя $\sin \theta$ его аргументом, получим:

$$f(\theta) = iR \left(\frac{2}{\pi l_0}\right)^{1/2} \frac{\sin \left[\left(l_0 + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\theta^{3/2}}. \quad (3.15)$$

Эта формула справедлива, если $2(2l_0+3)\theta \gg 1$.

Обратим внимание на то, что при больших значениях аргумента для функции Бесселя $J_1(z)$ справедливо асимптотическое выражение

$$J_1(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right). \quad (3,16')$$

Сравнение (3,16') с (3,15) показывает, что при $2(2l_0 + 3)\theta \gg 1$

$$f(\theta) = iR \frac{J_1(l_0 \theta)}{\theta}. \quad (3,16)$$

Это выражение для амплитуды рассеяния, совпадающее с полученным ранее при оптико-дифракционном рассмотрении, имеет существенное преимущество по сравнению с (3,15), так как (3,16) оказывается справедливым при сколь угодно малых углах θ . Действительно, при $\theta \rightarrow 0$ точная формула (3,11) для $f(\theta)$ даёт:

$$f(0) = \frac{i\tilde{\kappa}}{2} \sum_{l=0}^{l_0} (2l+1).$$

Так как $l_0 \gg 1$, то эту сумму можно заменить интегралом

$$f(0) \cong \frac{i\tilde{\kappa}}{2} \int_0^{l_0} 2l \, dl = \frac{i}{2} \frac{R^3}{\tilde{\kappa}}.$$

К такому же результату, как легко видеть, приводит и (3,16).

Возводя модуль $f(\theta)$ в квадрат и умножая его на элемент телесного угла, найдём дифференциальное сечение рассеяния

$$\sigma(\theta) d\sigma = |f(\theta)|^2 d\sigma = R^2 \left| \frac{J_1\left(\frac{R\theta}{\tilde{\kappa}}\right)}{\theta} \right|^2 d\sigma. \quad (3,17)$$

Эта формула в точности совпадает с формулой (2,5'), полученной из элементарных оптических соображений. Мы видим, что и обычная теория дифракции и точная теория рассеяния, использующая основное предположение о непрозрачности ядра для нейтронов, приводят к одинаковым результатам, что, конечно, и следовало ожидать.

Проинтегрировав (3,17) по углам, получим полное сечение упругого рассеяния быстрых нейтронов, вызываемого их поглощением:

$$\sigma = \pi R^2. \quad (3,17')$$

Оно равно площади поперечного сечения ядра.

Существенно отметить, что самый факт наличия упругого рассеяния является прямым следствием поглощения нейтронов. Выпадение нейтронов из пучка будет вызываться как поглощением их, так и рассеянием. Очевидно, сечение поглощения нейтронов в рассматриваемом случае малых длин волн также равняется πR^2 , так что полное сечение всех процессов равняется $2\pi R^2$. Чтобы убедиться в этом,

следует воспользоваться формулой (3,8) и подставить в неё значения ζ_l , даваемые (3,10). Мы получим следующее выражение для сечения захвата нейтронов:

$$\sigma_{\text{захв}} = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{[R/\lambda]} (2l+1) \approx \pi R^2.$$

Таким образом, сечение захвата, т. е. неупругого рассеяния быстрых нейтронов, при $\lambda \ll R$ равняется площади поперечного сечения ядра («чёрное» ядро). Наличие поглощения обуславливает дополнительное упругое рассеяние (не связанное с образованием составного ядра и реэмиссией нейтрона), происходящее главным образом на малые углы, которое может быть названо диффракционным рассеянием и полное сечение которого, так же как и неупругого рассеяния, равняется πR^2 . Полное сечение для всех процессов как упругого, так и неупругого рассеяния быстрых нейтронов равняется $2\pi R^2$. Эта величина определяет выпадение нейтронов из пучка.

4. ДИФФРАКЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Перейдём к рассмотрению рассеяния быстрых заряженных частиц, могущих поглощаться ядрами¹⁵.

При этом также должны происходить диффракционные явления, в некоторой мере аналогичные дифракции быстрых нейтронов. Явление, однако, усложняется наличием заряда у частиц. В силу этого мы не можем пользоваться элементарной оптической теорией для описания интересующего нас рассеяния, которое можно охарактеризовать как дифракцию заряженных лучей около абсолютно чёрного заряженного тела. Чтобы определить амплитуду этого рассеяния, следует с самого начала пользоваться общей формулой теории рассеяния (3,5). Мы должны прежде всего выяснить, какой вид имеют теперь величины β_l и ζ_l . В отличие от случая нейтронов, для которых β_l равняется единице, если параметр столкновения превышает радиус ядра, при рассеянии заряженных частиц β_l всегда, для всех сколь угодно больших значений l , отлично от единицы. Это связано с кулоновским рассеянием, существующим при всех сколь угодно больших значениях параметра столкновения. Если рассеяние происходит на малые углы, то частица проходит на большом расстоянии от ядра и не может быть им захвачена. Следовательно, при очень малых углах рассеяние должно быть кулоновским. Заметные отклонения от чисто кулоновского рассеяния должны наступать при углах, превышающих некоторый минимальный. Этот вывод подтверждается ниже расчётом.

Мы будем, так же как и в случаях быстрых нейтронов, предполагать, что заряженная частица, попадающая в сферу действия ядра, поглощается последним. Рассматривая нейтроны, мы считали,

что поглощение происходит в том случае, если параметр столкновения не превосходит радиуса ядра. Для заряженных частиц условие поглощения должно быть сформулировано несколько иначе.

В интересующем нас случае быстрых частиц, длина волны которых мала по сравнению с размерами ядра, справедливо квазиклассическое рассмотрение. Мы можем поэтому сказать, что для поглощения частицы во всяком случае необходимо, чтобы кратчайшее расстояние r_0 между ядром и частицей, двигающейся по законам классической механики, не превосходило радиуса ядра R :

$$r_0 \leq R. \quad (4,1)$$

Величину r_0 легко связать с параметром столкновения r_∞ . Обозначая скорость частицы при наибольшем сближении с ядром и на бесконечном расстоянии от ядра соответственно через v_0 и v_∞ , имеем на основании закона сохранения момента количества движения:

$$\frac{\dot{r}_0}{r_\infty} = \frac{v_\infty}{v_0}.$$

Отношение скоростей равняется, очевидно,

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{Zee'}{r_0 E}}},$$

где E — энергия падающей частицы, e' — её заряд, Ze — заряд ядра. Поэтому

$$r_0 = \frac{r_\infty}{\sqrt{1 - \frac{Zee'}{r_0 E}}}.$$

Неравенство (4,1) приобретает вид

$$r_\infty \leq R \sqrt{1 - \frac{Zee'}{RE}}. \quad (4,2)$$

Таково условие, которому должен удовлетворять параметр столкновения для того, чтобы частица могла быть поглощённой ядром.

Мы ниже будем предполагать, что если условие (4,2) выполняется, то частица поглощается ядром. Если $e' = 0$, то это условие переходит в условие поглощения нейтронов, которым мы выше пользовались. В случае отрицательно заряженных частиц параметр столкновения может превосходить радиус ядра. В случае положительно заряженных частиц параметр столкновения должен быть меньше радиуса ядра. В этом последнем случае величина $\frac{Zee'}{R}$ представляет собой, очевидно, высоту барьера, препятствующего прохождению

частицы в ядро. Обозначая высоту барьера через B , перепишем (4,2) в виде

$$r_{\infty} \leq R \sqrt{1 - \frac{B}{E}}.$$

С ростом E радикал стремится к единице, поэтому при $E \gg B$ условие поглощения заряженных частиц совпадает с условием поглощения нейтронов.

В квазиклассическом приближении, которым можно пользоваться в случае быстрых частиц, параметр столкновения равен, как известно, $\lambda_{\infty} l$, где λ_{∞} — длина волны частицы на бесконечном расстоянии от ядра, $\hbar l$ — момент частицы.

Отсюда видно, что для поглощения частицы её момент l не должен превосходить величины $l_0 = \frac{R}{\lambda_{\infty}} \sqrt{1 - \frac{Zee'}{RE}}$:

$$l \leq l_0 = \frac{R}{\lambda_{\infty}} \sqrt{1 - \frac{Zee'}{RE}}. \quad (4,2')$$

Это условие заменяет в случае заряженных частиц условие $l \leq \frac{R}{\lambda}$, относящееся к случаю нейтронов. Легко видеть, что величина $\lambda_{\infty} \left(1 - \frac{Zee'}{RE}\right)^{-1/2}$ представляет собой длину волны частицы на поверхности ядра. Обозначая её через λ_0 , мы можем переписать (4,2') в виде

$$l \leq \frac{R}{\lambda_0}.$$

Итак, мы предполагаем, что частица, длина волны которой значительно меньше радиуса ядра, поглощается ядром, если момент количества движения частицы не превосходит l_0 , т. е. коэффициент прилипания ζ_l равен единице, если $l \leq l_0$. Отсюда следует, что при $l \leq l_0$ $\beta_l = 0$.

Так же как и в случае нейтронов, следует иметь в виду, что при очень больших энергиях ядро становится прозрачным для падающих на него частиц. Мы будем предполагать, что энергия частицы лежит ниже того предела, при котором ядро становится прозрачным для частиц.

Приведём значения величины l_0 (которую можно назвать критическим значением момента частицы) для различных частиц, в зависимости от энергии E . Для тяжёлых ядер в конце периодической системы высота потенциального барьера составляет примерно 12—14 MeV для протонов и 25—28 MeV для α -частиц. Для таких ядер и протонов с энергией порядка 15 MeV величина l_0 равна ~ 4 , а при энергии протонов порядка 25 MeV $l_0 \approx 7$. Для тяжёлых ядер и α -частиц с энергией 50 MeV $l \approx 20$; при энергии α -частиц, равной 25 MeV, $l_0 \approx 5$.

В случае лёгких ядер ($A \approx 100$) и протонов с энергией 25 MeV $l_0 \approx 6$, для таких же ядер и α -частиц с энергией 50 MeV $l_0 \approx 17$.

Таблица I

Значения l_0 для протонов, дейтеронов и α -частиц

Протон					
$E \backslash A$	40	66	112	174	238
10	2,33	2,15	0	—	—
15	3,45	3,73	3,57	3,2	—
25	4,96	5,63	6,16	6,64	6,83
50	7,44	8,64	10,0	11,4	12,1
100	—	—	—	17,2	18,9
500	—	—	—	—	44,8
Дейтерон					
10	3,33	3,14	0	—	—
15	4,88	5,23	5,74	4,53	2,6
25	7,0	7,86	8,66	9,38	9,46
50	10,4	12,2	14,0	15,8	17,1
100	15,5	18,1	21,3	24,4	26,8
500	35,1	41,5	49,2	57,0	63,2
α -частица					
10	—	—	—	—	—
15	3,77	—	—	—	—
25	8,08	6,74	4,82	—	—
50	13,8	17,2	18,5	19,9	—
100	—	28,3	32,0	35,3	—
500	—	—	—	88,4	—

В таблице I собраны значения

$$l_0 = \frac{1,5 \cdot 10^{-13} A^{1/2}}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{B}{E}} \quad (B \text{ — высота барьера})$$

для протонов, дейтеронов и α -частиц в зависимости от массы ядер A и энергии частиц E .

Если орбитальный момент частицы превосходит l_0 , то коэффициент прилипания равняется нулю. Отсюда следует, что коэффи-

коэффициенты рассеяния β_l при $l > l_0$ равны по модулю единице. В случае нейтронов, проходящих вне ядра, мы попросту считали β_l равным единице. В случае заряженных частиц, проходящих на сколь угодно большом расстоянии от ядра, всегда имеет место рассеяние, вызываемое кулоновскими силами, поэтому β_l при $l > l_0$ отлично от единицы.

Мы можем считать, что при $l > l_0$ фазы на бесконечности будут такими же, как и в случае чисто кулоновского рассеяния. В последнем случае, как известно, фаза на бесконечности η_l равняется ¹⁶

$$\eta_l = \arg \Gamma(l+1+i\alpha),$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\alpha = Ze^2/\hbar v$, v — скорость частицы на бесконечном расстоянии от ядра. Таким образом, при $l > l_0$

$$\beta_l = e^{2i\eta_l}.$$

Теперь мы можем сформулировать задачу определения амплитуды рассеяния быстрых заряженных частиц поглощающим ядром следующим образом: требуется найти величину $f(\theta)$, определяемую формулой (3,5), в которой β_l равны:

$$\beta_l = \begin{cases} 0, & \text{если } l \leq l_0, \\ e^{2i\eta_l}, & \text{если } l > l_0. \end{cases} \quad (4,3)$$

Прежде чем переходить к вычислению $f(\theta)$, заметим, так же, как это мы сделали выше при рассмотрении рассеяния нейтронов, что резкое разграничение значений орбитальных моментов, для которых коэффициент прилипания равен нулю и единице, имеет приближенный характер. Можно сказать, что введение критического момента l_0 имеет смысл с точностью до величины порядка единицы. Поэтому вычисление $f(\theta)$ с приведёнными выше значениями β_l даст правильный результат, если в написанной ниже сумме (4,4) роль промежуточных членов, т. е. членов со значениями l , близкими к l_0 , будет незначительной. Иными словами, наш метод расчёта $f(\theta)$ даст правильный результат, если при изменении l_0 на величину порядка единицы амплитуда рассеяния мало изменится.

Чтобы выяснить, к каким условиям приводит это требование, выпишем амплитуду рассеяния с определёнными выше значениями β_l :

$$f(\theta) = \frac{1}{2} i\hbar \sum_{l=0}^{l_0} (2l+1) P_l(\cos \theta) - \\ - \frac{1}{2} i\hbar \sum_{l=l_0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\eta_l} - 1) P_l(\cos \theta). \quad (4,4)$$

Изменение l_0 на величину порядка единицы не скажется на амплитуде рассеяния при выполнении условий

$$\left. \begin{aligned} |P_{l_0}(\cos \theta) - P_{l_0 \pm 1}(\cos \theta)| &\ll |P_{l_0}(\cos \theta)|, \\ |\eta_{l_0 \pm 1} - \eta_{l_0}| &\ll |\eta_{l_0}|. \end{aligned} \right\} \quad (4,5)$$

Первое из этих неравенств мы уже рассматривали выше и видели, что оно приводит к условию

$$\theta \ll 1.$$

Рассмотрим теперь второе неравенство. Используя формулу Стирлинга*), определяющую $\Gamma(z)$ при больших $|z|$, можно представить $e^{2i\eta_l}$ в случае больших значений l в виде

$$e^{2i\eta_l} = \frac{\Gamma(1+l+ia)}{\Gamma(1+l-ia)} \approx e^{2ia \ln l}, \quad l \gg 1.$$

Отсюда легко заключить, что второе из неравенств (4,6) приводит к условию

$$\alpha \ll l_0.$$

Таким образом, вводя квазиклассически величину l_0 , разграничивающую значения l , для которых коэффициент прилипания равен нулю и единице, мы получаем правильный результат для амплитуды рассеяния в области малых углов рассеяния, если только длина волны частицы на поверхности ядра мала по сравнению с его радиусом и если $\alpha \ll l_0$.

Как видно из дальнейшего, главную роль при $\lambda \ll R$ играют малые углы рассеяния, для которых наше рассмотрение является вполне законным.

В таблице II даны значения $\alpha = \frac{Z}{137} \sqrt{\frac{Mc^2}{2E}}$ (M — масса частицы) для различных частиц в зависимости от Z и энергии частицы E .

Перейдем к исследованию формулы (4,4), определяющей амплитуду рассеяния.

Заметим предварительно, что бесконечный ряд, определяющий $f(\theta)$, расходится, так как фаза η_l не стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$. Это связано с отмечавшимся уже ранее свойством кулоновского взаимодействия: рассеяние, обусловливаемое кулоновскими силами, происходит при сколь угодно больших расстояниях между частицами. Тем не менее ряд (4,4) является суммируемым; его можно рассматривать как предел степенного ряда, члены которого отличаются от соответствующих членов (4,4) множителями ϵ^l , где $\epsilon < 1$. Если $\theta \neq 0$, то существует предел суммы этого ряда при $\epsilon \rightarrow 1$; сумму ряда (4,4) мы и считаем равной этому пределу.

*) Эта формула имеет вид ¹⁷

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi} \, z^{\frac{z-1}{2}} e^{-z}.$$

Таблица II

Значения α для протонов, дейтеронов и α -частиц

Протон					
$E \backslash Z$	20	50	70	80	92
10	0,996	2,49	3,48	3,98	4,58
15	0,813	2,03	2,85	3,31	3,74
20	0,705	1,76	2,47	2,82	3,24
25	0,63	1,57	2,21	2,52	2,91
50	0,445	1,11	1,56	1,78	2,05
100	0,315	0,785	1,1	1,26	1,45
250	0,199	0,497	0,697	0,796	0,917
500	0,141	0,352	0,494	0,564	0,648
Дейтерон					
10	1,41	3,52	4,94	—	—
15	1,15	2,87	4,03	4,63	5,28
20	0,996	2,49	3,49	3,91	4,58
25	0,891	2,22	3,11	3,56	4,12
50	0,629	1,57	2,21	2,52	2,9
100	0,445	1,11	1,55	1,78	2,05
250	0,281	0,702	0,985	1,12	1,3
500	0,2	0,498	0,698	0,793	0,916
α -частица					
10	3,98	9,92	13,9	—	—
15	3,25	8,12	11,4	—	—
20	2,82	7,04	9,88	—	—
25	2,52	6,28	8,85	10,1	—
50	1,78	4,44	6,23	7,12	8,2
100	1,26	3,14	4,1	5,04	5,8
250	0,796	1,91	2,99	3,15	3,67
500	0,565	1,41	1,97	2,23	2,59

Бесконечную сумму, входящую в (4,4), можно связать с амплитудой кулоновского рассеяния, которое отличается от бесконечной суммы (4,4) тем, что в ней суммирование производится не от l_0 , а от нуля. Поэтому $f(\theta)$ можно записать в виде

$$f(\theta) = \frac{1}{2} i\lambda \sum_{l=0}^{l_0} (2l+1) e^{2i\eta_l} P_l(\cos \theta) + f_{\text{кулон}}(\theta), \quad (4,6)$$

где $f_{\text{кулон}}(\theta)$ — амплитуда кулоновского рассеяния, равная, как известно,

$$f_{\text{кулон}}(\theta) = -\frac{Ze^2}{Mv^2} \frac{e^{-i\alpha \ln \sin \frac{\theta}{2} + 2i\eta_0}}{1 - \cos \theta} = -\alpha \lambda \frac{e^{-2i\alpha \ln \frac{\theta}{2} + 2i\eta_0}}{1 - \cos \theta},$$

$$e^{2i\eta_0} = \frac{\Gamma(1+i\alpha)}{\Gamma(1-i\alpha)}. \quad (4,6')$$

Формулой (4,6) неудобно пользоваться; мы поэтому преобразуем несколько основное соотношение (4,4).

Рассмотрим с этой целью ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta).$$

Этот ряд расходится. Однако он является суммируемым в указанном выше смысле и его сумма при $\theta \neq 0$ равняется нулю. В этом легко убедиться, если вспомнить известное из теории полиномов Лежандра соотношение

$$(1 - 2z\varepsilon + \varepsilon^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l P_l(z),$$

из которого следует, что

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(z) \varepsilon^l = \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 - 2z\varepsilon + \varepsilon^2)^{3/2}}.$$

Если z отлично от единицы, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \varepsilon^l P_l(\cos \theta) = 0, \quad \theta \neq 0.$$

Вычитая этот ряд из (4,4), представим амплитуду $f(\theta)$ в виде

$$f(\theta) = -\frac{i\lambda}{2} \sum_{l_0}^{\infty} (2l+1) e^{2i\alpha \ln l} P_l(\cos \theta). \quad (4,7)$$

Этот ряд также не сходится в обычном смысле, однако и он является суммируемым. Расходимость физически связана с исключительной ролью малых углов θ при кулоновском рассеянии. Из формулы (4,6') видно что если амплитуду кулоновского рассеяния умножить на $(1 - \cos \theta)$, то мы получим конечную величину при всех сколь угодно малых углах. По этой причине оказывается целесообразным преобразовать формулу (4,7), умножив её предварительно на $(1 - \cos \theta)$ и используя известное из теории полиномов Лежандра соотношение

$$(2l+1) x P_l(x) = (l+1) P_{l+1}(x) + l P_{l-1}(x).$$

Мы получим следующее выражение для $(1 - \cos \theta) f(\theta)$:

$$\begin{aligned} (1 - \cos \theta) f(\theta) &= -\frac{i\lambda}{2} \sum_{l_0}^{\infty} l^{2i\alpha} \{ (2l+1) P_l(\cos \theta) - \\ &\quad - (l+1) P_{l+1}(\cos \theta) - l P_{l-1}(\cos \theta) \} = \\ &= -\frac{i\lambda}{2} \left\{ l_0(l_0-1)^{2i\alpha} P_{l_0}(\cos \theta) - l_0^{2i\alpha+1} P_{l_0-1}(\cos \theta) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l_0}^{\infty} \left[(2l+1) l^{2i\alpha} - l(l-1)^{2i\alpha} - (l+1)^{2i\alpha+1} \right] P_l(\cos \theta) \right\}. \quad (4,8) \end{aligned}$$

Так как $l_0 \gg 1$, то выражение, стоящее в квадратных скобках в последней формуле, с точностью до $\frac{1}{l^2}$ равняется $-(2i\alpha)^2 l^{2i\alpha-1}$, поэтому формула (4,8) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} (1 - \cos \theta) f(\theta) &= -\frac{i\lambda}{2} \left\{ l_0^{2i\alpha+1} [P_{l_0}(\cos \theta) - P_{l_0-1}(\cos \theta)] - \right. \\ &\quad \left. - 2i\alpha l_0^{2i\alpha} P_{l_0}(\cos \theta) - (2i\alpha)^2 \sum_{l_0}^{\infty} l^{2i\alpha-1} P_l(\cos \theta) \right\}. \quad (4,8') \end{aligned}$$

Выше мы указывали, что наш метод определения амплитуды рассеяния является законным только при малых углах рассеяния и больших l_0 . Если $\theta \ll 1$ и $l \gg 1$, то, как известно, справедливо соотношение $P_l(\cos \theta) \approx J_0(l\theta)$, где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого ранга. Принимая ещё во внимание неравенство $\alpha \ll l_0$, из которого следует, что относительное изменение множителя $l^{2i\alpha}$ при переходе от l к $l+1$ значительно меньше единицы, мы можем заменить бесконечную сумму, входящую в (4,8'), интегралом

$$\sum_{l_0}^{\infty} l^{2i\alpha-1} P_l(\cos \theta) \approx \theta^{-2i\alpha} \int_{l_0\theta}^{\infty} z^{2i\alpha} \frac{J_0(z)}{z} dz.$$

Кроме того, разность $P_{l_0}(\cos \theta) - P_{l_0-1}(\cos \theta)$ можно заменить $\theta J'_0(l_0\theta) = -\theta J_1(l_0\theta)$. Поэтому окончательно мы получим следующее выражение для $f(\theta)$:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -i\lambda \left\{ l_0^{2i\alpha+1} \frac{J_1(l_0\theta)}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \left[2i\alpha l_0^{2i\alpha} J_0(l_0\theta) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (2i\alpha)^2 \theta^{-2i\alpha} \int_{l_0\theta}^{\infty} z^{2i\alpha} \frac{J_0(z)}{z} dz \right] \right\}. \quad (4,9) \end{aligned}$$

При $\alpha = 0$ это выражение переходит в известное уже нам выражение для амплитуды рассеяния нейтральных частиц.

Входящий сюда интеграл, который мы обозначим $L_\alpha(x)$, где $x = l_0\theta$, не выражается в общем случае через известные трансцендентные функции. Он может быть назван диффракционным интегралом

исследуемой задачи. Ниже мы будем пользоваться следующими обозначениями для его вещественной и мнимой частей:

$$C_{\alpha}(x) = \int_x^{\infty} \cos(2\alpha \ln z) \frac{J_0(z)}{z} dz,$$

$$S_{\alpha}(x) = \int_x^{\infty} \sin(2\alpha \ln z) \frac{J_0(z)}{z} dz.$$

Вид этих функций при значении $\alpha = 1$ представлен на рис. 3.

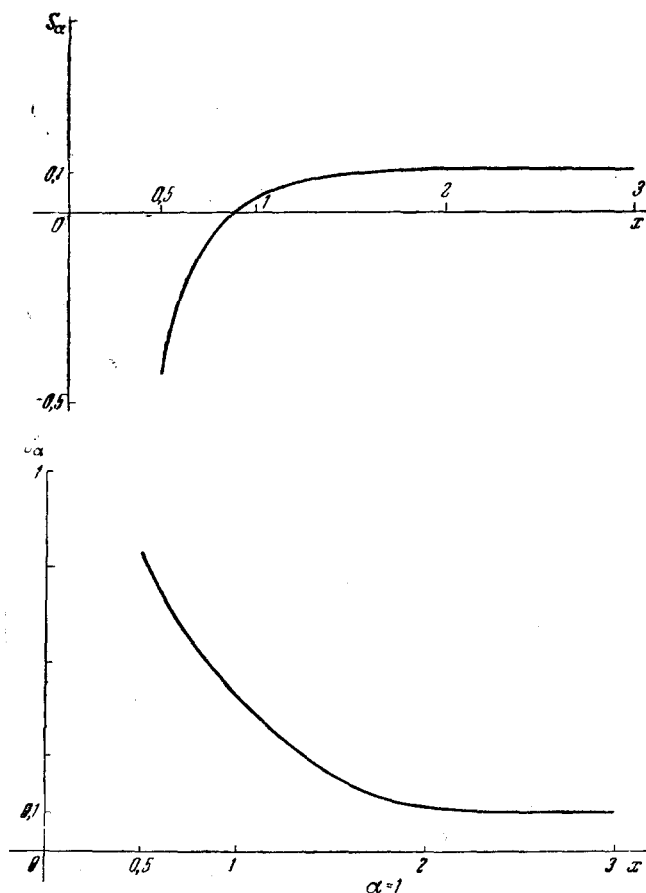


Рис. 3.

Возводя модуль $f(\theta)$ в квадрат и умножив его на элемент телесного угла $d\theta$, получим дифференциальное сечение рассеяния, кото-

рое может быть представлено в виде

$$\sigma(\theta) d\theta = \frac{4\alpha^2 \lambda^2}{\theta^4} N(l_0 \theta, \alpha) d\theta, \quad (4,9')$$

где $\sigma_R(\theta) = \frac{4\alpha^2 \lambda^2}{\theta^4}$ — дифференциальное сечение рассеяния в чисто кулоновском поле при малых углах рассеяния*), а $N(l_0 \theta, \alpha)$ — множитель, определяющий отклонение сечения от формулы Резерфорда. Этот множитель равен

$$N(x, \alpha) = J_0^2(x) + \left(\frac{x}{2\alpha}\right)^2 J_1^2(x) + 4\alpha^2 \{ C_\alpha^2(x) + S_\alpha^2(x) \} + \\ + 2C_\alpha(x) \{ \alpha \sin(2\alpha \ln x) J_0(x) - x \cos(2\alpha \ln x) J_1(x) \} - \\ - 2S_\alpha(x) \{ \alpha \cos(2\alpha \ln x) J_0(x) + x \sin(2\alpha \ln x) J_1(x) \}.$$

Отличие от сечения в чисто кулоновском поле обусловлено возможностью поглощения частиц ядрами. На рис. 4 показан ход зависимости множителя N от $l_0 \theta$ и α .

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФРАКЦИОННОГО ИНТЕГРАЛА

Диффракционный интеграл может быть выражен через известные функции только в некоторых предельных случаях, которые мы прежде всего и рассмотрим.

Легко получить разложение диффракционного интеграла в ряд по возрастающим степеням x . Заметим для этого, что¹⁹

$$\int_0^\infty x^m J_n(x) dx = \\ = 2^m \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{2}\right)}.$$

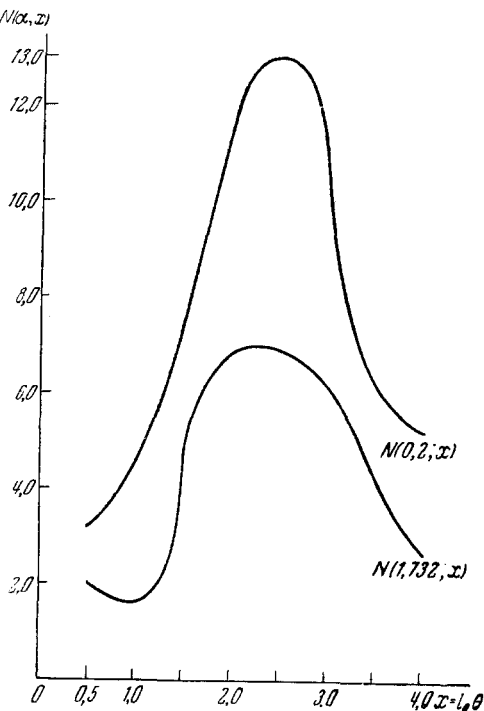


Рис. 4.

*) Амплитуда этого рассеяния при $\theta \ll 1$ равна согласно¹⁸

$$f_{\text{кулон}}(\theta) = -\frac{2\lambda}{\theta^3} e^{-2i\alpha \ln \frac{\theta}{2} + 2i\eta}.$$

Полагая в ней $m = 2i\alpha - 1$, получим:

$$\int_0^{\infty} z^{2i\alpha} \frac{J_0(z)}{z} dz = \frac{2^{2i\alpha}}{2i\alpha} \frac{\Gamma(1+i\alpha)}{\Gamma(1-i\alpha)} = \frac{1}{2i\alpha} e^{2i\alpha \ln 2 + 2i\eta_0},$$

где η_0 — фаза на бесконечности в кулоновском поле при $l = 0$.

Пользуясь этой формулой и разлагая $J_0(z)$ в ряд по степеням z , получим:

$$\begin{aligned} L_\alpha(x) &\equiv \int_x^\infty z^{2i\alpha} \frac{J_0(z)}{z} dz = \frac{1}{2i\alpha} e^{2i\alpha \ln 2 + 2i\eta_0} - \\ &- \int_0^x z^{2i\alpha} \left\{ 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^4 (2!)^2} - \dots \right\} dz = \\ &= \frac{1}{2i\alpha} e^{2i\alpha \ln 2 + 2i\eta_0} - \frac{x^{2i\alpha}}{2i\alpha} + \frac{x^{2i\alpha+2}}{(2i\alpha+2) 2^2} - \frac{x^{2i\alpha+4}}{(2i\alpha+4) 2^4 4} + \dots \quad (5.1) \end{aligned}$$

Если $x \ll 1$, то

$$L_\alpha(x) = \frac{1}{2i\alpha} e^{2i\alpha \ln 2 + 2i\eta_0} - \frac{x^{2i\alpha}}{2i\alpha}. \quad (5.1')$$

Это разложение справедливо при любых значениях α .

Рассмотрим теперь предельный случай больших x . Заменяя в этом случае под знаком интеграла функцию Бесселя её асимптотическим представлением

$$J_0(z) \approx \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right), \quad z \gg 1,$$

и интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} L_\alpha(x) &\approx \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_x^\infty z^{2i\alpha-3/2} \sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right) dz = \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left\{ x^{2i\alpha-3/2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2i\alpha-3/2}{x} x^{2i\alpha-3/2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Этим разложением можно пользоваться, если $\alpha \ll x$.

Ограничиваясь первым членом и замечая, что функция Бесселя $J_1(x)$ при $x \gg 1$ определяется формулой

$$J_1(x) \approx -\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

получим следующее асимптотическое выражение для $L_\alpha(x)$, справедливое при больших x и α , удовлетворяющих условию $\alpha \ll x$:

$$L(x) \approx -x^{2\alpha-1} J_1(x), \quad x \gg 1, \quad \alpha \ll x. \quad (5.2)$$

Эта формула несправедлива при $\alpha > x$. Мы выведем поэтому асимптотическую формулу для $L_\alpha(x)$, справедливую при больших x и больших α . (При $x \ll 1$ и произвольных α $L_\alpha(x)$ определяется формулой (5,1').)

Пользуясь снова асимптотическим выражением для $J_0(z)$, представим $L_\alpha(x)$ в виде ($x \gg 1$)

$$L_\alpha(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_x^\infty z^{-3/2} \left\{ e^{i(2\alpha \ln z - z + \frac{\pi}{4})} + e^{i(2\alpha \ln z + z - \frac{\pi}{4})} \right\} dz. \quad (5,3')$$

Будем предполагать, что $2\alpha > x$. В этом случае для вычисления $L_\alpha(x)$ можно применить метод «перевала». Обозначим экспоненты первого и второго слагаемых в фигурных скобках через $b_-(z)$ и $b_+(z)$. Заметим, что производная от $b_-(z)$ обращается в нуль в точке $z_0 = 2\alpha$, которая лежит в интервале интегрирования; нуль же производной от $b_+(z)$ не лежит в этом интервале. Так как главную роль в интеграле играет область значений z , близких к нулю производной от экспоненты, где экспоненциальный множитель мало меняется и где поэтому не происходит взаимного погашения различных частей интеграла, то из сказанного выше следует, что вклад в интеграл от второго слагаемого будет значительно меньше, чем от первого. Мы пренебрежём поэтому вторым слагаемым и заменим $b_-(z)$ двумя первыми членами разложения этой функции в ряд по степеням $z - z_0$:

$$b_-(z) = b_-(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2} b''_-(z_0) = 2\alpha \ln 2\alpha - 2\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{(z - 2\alpha)^2}{4\alpha}.$$

Вынося из-под знака интеграла предэкспоненциальный множитель в точке $z = 2\alpha$ и расширяя пределы интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$, получим:

$$\begin{aligned} L_\alpha(x) &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} (2\alpha)^{-3/2} e^{i(2\alpha \ln 2\alpha - 2\alpha + \frac{\pi}{4})} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \frac{(z - z_0)^2}{4\alpha}} dz = \\ &= \frac{1}{2\alpha} e^{i(2\alpha \ln 2\alpha - 2\alpha)}. \quad (5,3) \end{aligned}$$

Вяясним теперь условия применимости этого асимптотического выражения. Прежде всего необходимо, чтобы нуль $b'_-(z)$ лежал в интервале (x, ∞) , откуда следует, что 2α должно быть больше x . В интеграле, входящем в (5,3), ширина области эффективных значений $z - z_0$ равна по порядку величины $\alpha^{1/2}$. Для применимости метода необходимо, чтобы эта ширина была значительно меньше z_0 , откуда следует, что α должно быть значительно больше единицы.

Рассмотрим, наконец, вопрос о допустимых значениях x . Так как в интеграле (5,3) существенны большие значения x , лежащие вблизи $z_0 = 2\alpha \gg 1$, то мы могли бы пользоваться асимптотическим представлением $J_0(z)$, не делая специального предположения о том, что $x \gg 1$. Поэтому величина x должна быть только меньше 2α ,

в остальном же может быть произвольной. Это рассуждение неприменимо к малым x , так как в этом случае в интеграле появляется вторая существенная область значений z , лежащих вблизи нуля. Эта область, как явствует из (5,1'), даёт такой же вклад в интеграл, как и область $z \sim z_0$.

В рассмотренных предельных случаях диффракционный интеграл выражается через элементарные функции. В других областях переменных для определения $L_\alpha(x)$ необходимо численное интегрирование, результаты которого представлены на рис. 3.

6. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ДИФФРАКЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Выясним поведение амплитуды и сечения рассеяния быстрых заряженных частиц в некоторых предельных случаях. Начнём со случая малых α .

Случай малых α

Рассмотрим сперва область малых углов рассеяния θ , удовлетворяющих условию $l_0\theta \ll 1$. Для малых значений аргумента диффракционный интеграл определяется формулой (5,1'). Пользуясь этой формулой и замечая, что при $x \ll 1$ $J_0(x) \approx 1$, $J_1(x) \approx \frac{x}{2}$, представим $f(\theta)$ в виде

$$f(\theta) = \frac{\lambda}{2} l_0^2 e^{2i\alpha \ln l_0 + i \frac{\pi}{2}} - \frac{2\alpha\lambda}{\theta^2} e^{-2i\alpha \ln \frac{\theta}{2} + 2i\eta_0}, \quad (6,1')$$

причём $l_0\theta \ll 1$.

Первое слагаемое в этой формуле, не зависящее от угла θ , представляет собой амплитуду диффракционного, а второе слагаемое, обратно пропорциональное θ^2 , — амплитуду кулоновского рассеяния.

Дифференциальное сечение рассеяния при $l_0\theta \ll 1$ равняется

$$\sigma(\theta) = \frac{4\alpha^2 \lambda^2}{\theta^4} \left\{ 1 + \frac{(l_0\theta)^4}{16\alpha^2} + \frac{(l_0\theta)^2}{2\alpha} \sin \left(2\alpha \ln \frac{l_0\theta}{2} - 2\eta_0 \right) \right\}. \quad (6,1)$$

Множитель в фигурных скобках, определяющий отклонение от формулы Резерфорда, может значительно отличаться от единицы. Если $(l_0\theta)^2 \ll 2\alpha$, т. е. $\theta \ll \frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$, то этот множитель практически равен единице и сечение определяется формулой Резерфорда

$$\sigma(\theta) = \frac{4\alpha^2 \lambda^2}{\theta^4}, \quad \theta \ll \frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}, \quad \alpha \ll 1. \quad (6,2)$$

Если $\frac{1}{l_0} \gg \theta \gg \frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$, то множитель сводится к $\frac{(l_0\theta)^4}{16\alpha^2}$, сечение не зависит от угла рассеяния и равняется

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4} \lambda^2 l_0^4, \quad \frac{1}{l_0} \gg \theta \gg \frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}, \quad \alpha \ll 1. \quad (6,3)$$

Это выражение совпадает с сечением рассеяния быстрых нейтронов в том случае, когда $\theta \ll \frac{1}{l_0}$.

Рассмотрим теперь углы рассеяния, превосходящие $\frac{1}{l_0}$. При малых значениях α диффракционный интеграл определяется формулой (5,2). С ростом $l_0\theta$ он убывает, как $(l_0\theta)^{-3/2}$. В выражении (4,9), определяющем $f(\theta)$, основную роль играет первое слагаемое

$$f(\theta) = i\lambda l_0^{2iz} \frac{l_0}{\theta} J_1(l_0\theta), \quad 1 \gg \theta \gg \frac{1}{l_0}, \quad \alpha \ll 1. \quad (6,4)$$

Мы видим, что в этих условиях амплитуда рассеяния заряженных частиц только фазой отличается от амплитуды рассеяния нейтронов. Сечение рассеяния как для тех, так и для других частиц одинаково и равняется

$$\sigma(\theta) = \lambda^2 l_0^2 \left| \frac{J_1(l_0\theta)}{\theta} \right|^2, \quad 1 \gg \theta \gg \frac{1}{l_0}, \quad \alpha \ll 1. \quad (6,4')$$

Итак, в рассмотренных предельных случаях сечение рассеяния определяется либо формулой Резерфорда, либо формулой (2,6'), описывающей диффракционное рассеяние нейтронов, причём тот или другой случай имеет место в зависимости от того, какое рассеяние

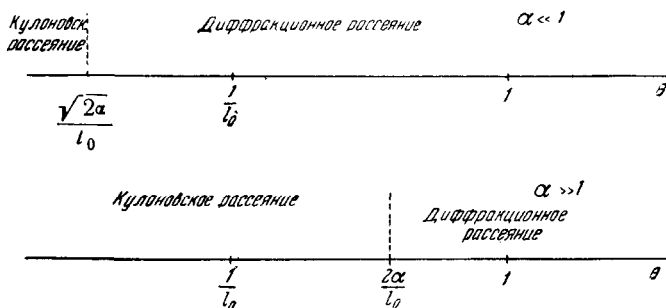


Рис. 5.

больше — кулоновское или диффракционное. Величина $\frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$ разграничивает области углов с разными законами рассеяния.

На рис. 5 схематически показаны разные области рассеяния.

Перейдем к исследованию случая больших α .

Случай больших α

Начнём с рассмотрения малых углов рассеяния, $\theta \ll \frac{1}{l_0}$. В этом случае диффракционный интеграл определяется формулой (5,1'). Сечение рассеяния определяется формулой (6,1), справедливой при любых значениях α . В частности, кулоновское рассеяние имеет место

при углах $\theta \ll \frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$. Однако, как мы сейчас увидим, область применимости формулы Резерфорда значительно расширяется в сторону больших углов, которые должны лишь удовлетворять условию $\theta \ll \frac{2\alpha}{l_0}$.

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим углы $\theta \gg \frac{1}{l_0}$. Если $\alpha \gg l_0 \theta \gg 1$, то диффракционный интеграл определяется формулой (5,3). Амплитуда рассеяния приобретает вид

$$f(\theta) = i\lambda \left\{ l_0^{2i\alpha} \frac{l_0}{\theta} J_1(l_0 \theta) + \frac{2i\alpha}{\theta^2} l_0^{2i\alpha} J_0(l_0 \theta) - \right. \\ \left. - \frac{2\alpha}{\theta^2} e^{-2i\alpha \left(\ln \frac{\theta}{2} - \ln \alpha + 1 \right)} \right\} \approx - \frac{2i\alpha\lambda}{\theta^2} e^{-2i\alpha \left(\ln \frac{\theta}{2} - \ln \alpha + 1 \right)}. \quad (6,5)$$

(Последнее слагаемое значительно больше первых двух.) Точно такой же формулой определяется амплитуда рассеяния в кулоновском поле в том случае, когда $\alpha \gg 1$. Действительно, фазовый множитель $e^{2i\eta_0}$ при $\alpha \gg 1$ может быть представлен в виде

$$e^{2i\eta_0} = \frac{\Gamma(1 - i\alpha)}{\Gamma(1 + i\alpha)} \approx i e^{-i\alpha + 2i\alpha \ln \alpha}.$$

(Мы воспользовались формулой Стирлинга.) Поэтому амплитуда $f_{\text{кулон}}(\theta)$ при $\alpha \gg 1$ равняется

$$f_{\text{кулон}}(\theta) = - \frac{2i\alpha\lambda}{\theta^2} e^{-2i\alpha \left(\ln \frac{\theta}{2} - \ln \alpha + 1 \right)},$$

что совпадает с (6,5).

Итак, в области углов $\frac{1}{l_0} \ll \theta \ll \frac{2\alpha}{l_0}$ рассеяние является чисто кулоновским.

В области углов $\frac{2\alpha}{l_0} \ll \theta \ll 1$ диффракционный интеграл определяется формулой (5,2). В выражении (4,9) для амплитуды рассеяния первое слагаемое значительно больше двух остальных. Поэтому

$$f(\theta) = i\lambda l_0^{2i\alpha} \frac{l_0}{\theta} J_1(l_0 \theta)$$

и

$$\sigma(\theta) = \lambda^2 l_0^2 \left| \frac{J_1(l_0 \theta)}{\theta} \right|^2 \approx \frac{2}{\pi} l_0 \lambda^2 \frac{\sin^2 \left(l_0 \theta + \frac{\pi}{4} \right)}{\theta^3}, \\ \frac{2\alpha}{l_0} \ll \theta \ll 1. \quad (6,6)$$

Мы получили выражение для сечения диффракционного рассеяния нейтронов.

Таким образом, при $\alpha \gg 1$ в области углов $\theta \ll \frac{2\alpha}{l_0}$ рассеяние является кулоновским, а в области углов $\frac{2\alpha}{l_0} \ll \theta \ll 1$ — диффракционным. Разграничение двух областей углов с разными законами рассеяния происходит при $\theta \sim \frac{2\alpha}{l_0}$, в то время как в случае $\alpha \ll 1$ такое разграничение имеет место при $\theta \sim \frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$ (см. рис. 5). Мы видим, следовательно, что в случае $\alpha \gg 1$ область углов, в которой сечение рассеяния определяется формулой Резерфорда, относительно шире, чем в случае малых α .

Заметим, что в случае $\alpha \ll 1$ амплитуды кулоновского и диффракционного рассеяния совпадают по порядку величины при $\theta \sim \frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$. В случае $\alpha \gg 1$ эти амплитуды при $\theta \sim \frac{2\alpha}{l_0}$ не совпадают; напротив, амплитуда кулоновского рассеяния превосходит амплитуду диффракционного рассеяния в $\alpha^{1/2}$ раз. Равенство амплитуд имеет место при $\theta \sim \frac{4\alpha^2}{l_0}$, и лишь при больших углах амплитуда диффракционного рассеяния становится больше амплитуды кулоновского рассеяния. Выше мы, однако, видели, что рассеяние приобретает черты диффракционного уже при углах $\theta > \frac{2\alpha}{l_0}$, а не при углах, превосходящих $\frac{4\alpha^2}{l_0}$, т. е. рассеяние становится диффракционным при углах, гораздо меньших, чем те, при которых сравниваются амплитуды обоих видов рассеяния. Отсюда вытекает важный вывод: вблизи угла $\theta \sim \frac{2\alpha}{l_0}$ происходит резкое уменьшение сечения рассеяния по порядку величины в α раз. Примерный ход сечения при $\alpha \gg 1$ имеет вид, изображенный на рис. 6.

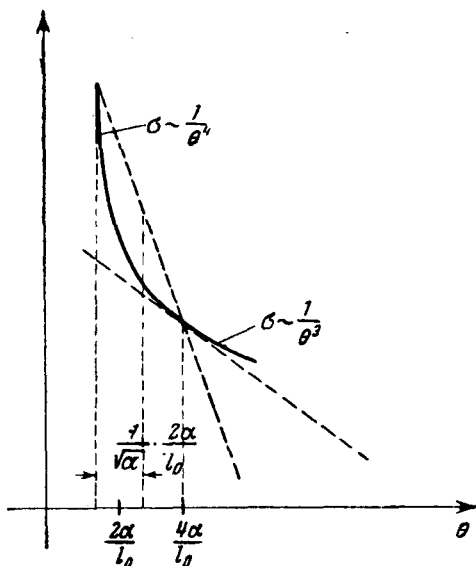


Рис. 6.

Резкое уменьшение сечения рассеяния происходит из-за изменения ширины области эффективных значений переменной в диффракционном интеграле при переходе угла рассеяния через значение $\theta_0 = \frac{2\alpha}{l_0}$.

Выше уже отмечалось, что ширина области эффективных значений z в дифракционном интеграле в том случае, когда $z_0 = 2\alpha \gg l_0\theta$, равняется по порядку величины $\Delta z \sim \sqrt{\alpha}$ ($\alpha \gg 1$). Если $l_0\theta \gg 2\alpha$, то, как явствует из вывода формулы (5,2), $\Delta z \sim 1$. Таким образом, при переходе угла рассеяния через значение $\theta_0 \sim \frac{2\alpha}{l_0}$ ширина области эффективных значений z уменьшается в $\sqrt{\alpha}$ раз. Это приводит к уменьшению амплитуды рассеяния в $\sqrt{\alpha}$ и сечения в α раз. Так как $z = l\theta$, то ширина области эффективных значений орбитальных моментов l , играющих роль в сумме (4,8), равна по порядку величины $\Delta l \sim \frac{\Delta z}{\theta_0}$. Если $\theta < \theta_0$, то $\Delta l \sim \frac{\sqrt{\alpha}}{\theta_0} \sim \frac{l_0}{\sqrt{\alpha}}$. Если $\theta > \theta_0$, то $\Delta l \sim \frac{1}{\theta_0} \sim \frac{l_0}{\alpha}$.

Легко оценить интервал углов $\Delta\theta$, в котором происходит резкое изменение сечения. Этот интервал равен по порядку величины $\Delta\theta \sim \frac{\Delta z}{l_0} \sim \frac{\sqrt{\alpha}}{l_0} \sim \frac{\theta_0}{\sqrt{\alpha}}$. Он в $\sqrt{\alpha}$ раз меньше граничного угла $\theta_0 \approx \frac{2\alpha}{l_0}$, отделяющего области кулоновского и дифракционного рассеяния.

Подводя итоги, мы можем сказать, что упругое рассеяние быстрых заряженных частиц, могущих поглощаться ядрами, вообще говоря, не описывается формулой Резерфорда.

Если $\alpha = \frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1$, то рассеяние определяется формулой Резерфорда только при очень малых углах, малых по сравнению с $\frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0} \left(l_0 = \frac{R}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{Zee'}{RE}} \right)$. При углах, больших $\frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$, сечение упругого рассеяния заряженных частиц совпадает с сечением упругого рассеяния быстрых нейтронов. Это рассеяние, в котором главную роль играют углы $\theta \ll 1$, может быть названо дифракционным, так как оно имеет такой же характер, как и дифракция света от абсолютно чёрного шара. Различие между нейтронами и заряженными частицами проявляется только в фазе амплитуды рассеяния. В области углов от $\frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$ до $\frac{1}{l_0}$ эффективное сечение этого рассеяния не зависит от угла рассеяния. При больших углах появляются характерные дифракционные осцилляции.

Если $\alpha \gg 1$, то формула Резерфорда имеет место при углах, меньших $\frac{2\alpha}{l_0}$. При больших углах рассеяние снова имеет характер дифракционного рассеяния. Вблизи угла $\theta_0 \sim \frac{2\alpha}{l_0}$ происходит резкое уменьшение сечения рассеяния по порядку величины в α раз.

Так как сечение диффракционного рассеяния в среднем обратно пропорционально кубу угла рассеяния, а не четвертой степени, как это имеет место при рассеянии в чисто кулоновском поле, то можно сказать, что благодаря наличию поглощающего ядра рассеяние на большие углы становится более вероятным. В силу этого средний угол рассеяния оказывается значительно большим, чем в случае чисто кулоновского рассеяния.

Сечение рассеяния в предельных случаях малых и больших α определяется следующими формулами:

Если $\alpha \ll 1$, то

$$\sigma(\theta) \approx \sigma_R(\theta) \text{ при } \theta \ll \frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0},$$

$$\sigma(\theta) \approx \sigma_R(\theta) \left| \frac{l_0 \theta}{2\alpha} J_1(l_0 \theta) \right|^2 \text{ при } \frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0} \ll \theta \ll 1.$$

Если $\alpha \gg 1$, то

$$\sigma(\theta) \approx \sigma_R(\theta) \text{ при } \theta \ll \frac{2\alpha}{l_0},$$

$$\sigma(\theta) \approx \sigma_R(\theta) \left| \frac{l_0 \theta}{2\alpha} J_1(l_0 \theta) \right|^2 \text{ при } \frac{2\alpha}{l_0} \ll \theta \ll 1,$$

где

$$\sigma_R(\theta) = \frac{4\alpha^2 \lambda^2}{\theta^4}.$$

Изложенные закономерности диффракционного рассеяния быстрых нейтронов были экспериментально исследованы рядом авторов^{20,21}. При этом было обнаружено качественное согласие между теорией и опытными данными.

Довольно отчетливая картина диффракционного рассеяния нейтронов была получена в работе Амальди, Боччиарели, Каччапуоти и Трабаччи²¹. Они показали, что полное сечение для выпадения нейтронов из пучка в два раза больше, чем сечение для неупругого рассеяния (и поглощения). В случае свинца они изучили угловое распределение упруго рассеянных нейтронов и показали его соответствие диффракционной формуле (2,5') с радиусом ядра R свинца, равным $8,7 \cdot 10^{-13}$ см. Это значение согласуется с другими данными. В этой работе²¹ использовались нейтроны с энергией около 14 MeV. Представляет интерес исследование диффракционного рассеяния нейтронов и заряженных частиц при значительно больших энергиях, вплоть до таких, когда ядра начинают становиться прозрачными.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. R. Serber, Phys. Rev. **72**, 1114 (1947).
2. Н. Бор, У.Ф.Н. XVI, 425, (1936).
3. Л. Ландау, ЖЭТФ **7**, 819 (1937).
4. Я. Френкель, Sow. Phys. **9**, 533 (1936).
5. V. Weisskopf, Phys. Rev. **52**, 295 (1937).
6. Г. А. Бете, Физика ядра, часть II, ГТТИ, стр. 158 (1948).

7. Н. Bethe, Phys. Rev. **57**, 1125 (1940).
8. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, II изд., ГТТИ, стр. 168 (1948).
9. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 3, стр. 670 (1939).
10. М. Борн, Оптика, ОНТИ, стр. 216 (1937).
11. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, ч. II, ГТТИ (1934).
12. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Квантовая механика, ч. I, стр. 453 (1948).
13. Мотт и Мэсси, Теория атомных столкновений, стр. 31 (1936).
14. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 3, стр. 650 (1939).
15. А. Ахиезер и И. Померанчук, ЖЭТФ **16**, 396 (1946).
16. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Квантовая механика, ч. I, стр. 477 (1948).
17. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 3, стр. 477 (1939).
18. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Квантовая механика, ч. I, стр. 476 (1948).
19. G. N. Watson, Theory of Bessel Functions, 1945.
20. Н. Аoki, Proc. Mat. Phys. Jap. **21**, 232 (1939); S. Kikuchi, H. Aoki, T. Wakatuki, Proc. Mat. Phys. Jap. **21**, 410 (1939); Phys. Rev. **55**, 1264 (1939); T. Wakatuki, S. Kikuchi, Proc. Mat. Phys. Jap. **21**, 650 (1939).
21. E. Amaldi, D. Bocciarelli, B. N. Carriapuoti, G. C. Trabacchi, Nuovo Cimento **3**, 203 (1946).

ПРИМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

В недавно вышедшей работе Фернбаха, Сербера и Тейлора (Phys. Rev. **75**, 1352, 1949) рассматривается дифракционное рассеяние нейтронов полупрозрачными ядрами. Ядра являются полупрозрачными в том случае, когда длина свободного пробега нейтронов в них оказывается сравнимой с радиусом ядра. Такое положение имеет место у нейтронов с энергиями порядка 100 MeV или выше. Пользуясь квазиклассическим рассмотрением и вводя коэффициенты поглощения и преломления n нейтронов, равные

$$k = \frac{3A\sigma}{4\pi R^2}, \quad n = \sqrt{1 - \frac{V}{E}},$$

где σ — эффективное сечение рассеяния нейтронов одной ядерной частицей, A — атомный номер, V — средняя потенциальная энергия, можно легко найти амплитуду дифракционного рассеяния. Если частица прошла в ядре путь s , то амплитуда ψ -функции уменьшилась на величину $e^{-ks\frac{1}{2}}$ и, кроме того, приобрела фазовый множитель $e^{i(n-1)ks}$. Поэтому непосредственно за ядром волновое поле имеет вид:

$$r \geq R \quad \psi = \text{const} = \psi_0, \quad r \leq R \quad \psi = e^{-\frac{ks}{2} + i(n-1)ks}.$$

Разлагая эту функцию в ряд Фурье, находим амплитуду волн, рассеянных на данный угол θ :

$$f(\theta) = k \int_0^R \left[1 - e^{-\frac{ks}{2} + i(n-1)s} \right] J_0(k\rho \sin \theta) \rho d\rho,$$

$$s = 2 \sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

Если $k \rightarrow \infty$, $f(\theta)$ переходит в амплитуду, соответствующую абсолютно чёрным ядрам.

Сравнение полученного выражения для $f(\theta)$ с опытом может быть даст возможность найти V .