

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН

Л. М. Бреховских

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	1
2. Отражение и преломление плоских волн.	2
I. Отражение сферических волн	
3. Отражение сферической волны в приближении геометрической оптики.	6
4. Разложение сферической волны на плоские	8
5. Поле отражённой волны в волновой зоне.	11
6. Формула Вейля-Ван дер Поля. Случай полюса, расположенного вблизи точки перевала	17
7. Наглядное истолкование результатов. Пределы применимости геометрической оптики	21
8. Поле поднятого излучателя	24
9. Боковые волны	25
10. Поле в области, близкой к углу полного внутреннего отражения	31
II. Преломление сферических волн	
11. Поле преломлённой волны в приближении геометрической оптики	33
12. Поправки к геометрической оптике для преломлённых волн	35
13. Случай, когда одна из сред обладает заметным поглощением	39
14. Звуковое поле в воде от излучателя, находящегося в воздухе	40

1. Введение

Теория отражения и преломления плоских волн была разработана ещё Френелем. В противоположность этому законченная теория отражения и преломления сферических волн была создана лишь в последние годы. Такой разрыв во времени объясняется главным образом тем, что в оптических явлениях сферические волны всегда можно считать практически плоскими, так как соответственные радиусы кривизны велики по сравнению с длиной волны. Только в области радио и акустики мы встречаемся со сферическими волнами как таковыми.

Как было показано работами последних лет (Автор¹, Отт^{2,3}, Крюгер⁴), задача об отражении и преломлении сферических волн может быть решена при помощи методов, аналогичных тем, которые известны в волновой оптике. Изложение основных достижений в этом направлении и составляет задачу настоящей статьи. При этом оказывается, что все частные случаи в задаче о распространении радиоволн при наличии границы раздела между двумя однородными средами (задача Зоммерфельда), решавшиеся обычно разными методами (например, случай большой проводимости почвы, рассмотренный В. А. Фоком⁵ и М. А. Леонтовичем⁶, случай умеренной проводимости, рассмотренный Вейлем⁷, случай поднятого диполя и т. д.), могут быть рассмотрены с единой точки зрения. Эта точка зрения, охватывающая также случай преломленных волн, имеет много преимуществ и базируется на математическом методе, адекватном явлениям, разыгрывающимся при распространении волн малых длин, роль которых в практике за последнее время сильно возросла.

Мы будем рассматривать параллельно случаи электромагнитных и звуковых волн, так как математический аппарат для этих случаев совершенно одинаков. Кроме того, на практике имеет место почти полный параллелизм во всех задачах по распространению звука и радиоволн. Среди них задача об отражении и преломлении сферических волн является простейшей.

Из более сложных практически важных задач можно упомянуть, например, задачу о распространении сферических волн в плоскослойных средах. Поэтому весьма существенно установить общий язык между этими двумя областями науки. Это было бы полезно и для таких вопросов, как моделирование электромагнитных явлений звуковыми и обратно.

2. Отражение и преломление плоских волн

Основой метода рассмотрения отражения и преломления сферических волн будет разложение их на плоские волны. При этом класс плоских волн понимается шире, чем обычно: в него включаются так называемые неоднородные волны или волны с комплексными направляющими косинусами. Поэтому нам необходимо сначала рассмотреть отражение и преломление плоских волн, учитывая также это обобщение. В случае электромагнитных волн мы ограничимся рассмотрением волн, у которых электрический вектор лежит в плоскости падения. Электромагнитное поле мы будем характеризовать вектором Герца⁸, который в рассматриваемом случае будет иметь только одну составляющую, нормальную границе раздела. Пусть ось z перпендикулярна к границе раздела и плоскость xz совпадает с плоскостью падения. Обозначив через $\Phi(x, z)$ единственную отличную от нуля составляющую вектора Герца по оси z и предположив, что все величины (записываемые в комплексном виде) зависят от времени через

множитель $e^{-i\omega t}$, будем иметь для составляющих электромагнитного поля *):

$$E_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \quad E_y = 0, \quad E_z = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$H_x = 0, \quad H_y = -\frac{i\omega \varepsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad H_z = 0. \quad (2)$$

Поле звуковой волны будем описывать звуковым потенциалом. Так как в дальнейшие формулы он будет входить совершенно так же, как вертикальная составляющая вектора Герца в формулы для электромагнитного поля, то его мы также обозначим через $\phi(x, z)$.

Звуковое давление $p(x, z)$ и колебательная скорость $v(x, z)$ выражаются через звуковой потенциал таким образом:

$$p(x, z) = i\omega \rho \phi(x, z), \quad v = \text{grad } \phi, \quad (3)$$

где ρ — плотность среды.

Пусть на границу раздела $z = 0$ падает под произвольным углом плоская электромагнитная или звуковая волна. Вертикальная составляющая вектора Герца или звуковой потенциал такой волны будет даваться формулой

$$e^{ik(x \cos \alpha - z \sin \alpha)}, \quad (4)$$

где k — волновое число ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$), а α — угол скольжения волны, т. е. угол, образуемый нормалью к фронту волны с границей раздела (рис. 1).

Благодаря наличию границы раздела мы будем иметь в верхней среде отражённую волну:

$$V e^{ik(x \cos \alpha + z \sin \alpha)}, \quad (4')$$

где V — коэффициент отражения, а в нижней среде преломлённую волну:

$$W e^{ik_1(x \cos \alpha_1 - z \sin \alpha_1)}, \quad (4'')$$

где k_1 — волновое число для нижней среды, а α_1 — угол скольжения преломлённой волны. Коэффициенты V и W определяются из условий на границе. В электромагнитном случае такими условиями являются непрерывность E_x и H_y при переходе через границу. Если будем индексом 1 отмечать величины, относящиеся к нижней среде, в то

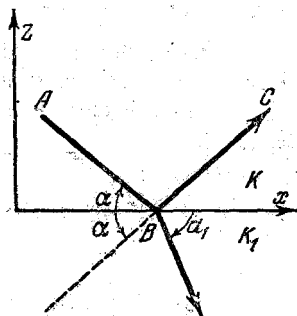


Рис. 1. Отражение и преломление плоской волны.

*) В общем случае, когда вектор Герца имеет отличные от нуля все три составляющие, то электрическое и магнитное поля в среде с произвольной диэлектрической постоянной ε определяются по формулам

$$E = \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \phi + \text{grad div } \phi, \quad H = -\frac{i\omega \varepsilon}{c} \text{rot } \phi.$$

Магнитную проницаемость μ мы всюду полагаем равной единице.

время как величины в верхней среде будем оставлять без индекса, то согласно (1) и (2) граничные условия можно записать:

$$z=0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \quad \psi = n^2 \psi_1, \quad (5)$$

где через $n = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}}$ обозначен показатель преломления.

В акустическом случае граничные условия требуют непрерывности нормальной составляющей скорости и звукового давления. Согласно (3) эти условия можно записать:

$$z=0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \quad \psi = \frac{\rho_1}{\rho} \psi_1. \quad (5')$$

Условия (5) и (5') можно записать единым образом, а именно:

$$z=0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \quad \psi = m \psi_1, \quad (6)$$

где $m = n^2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ — в электродинамике, $m = \frac{\rho_1}{\rho}$ — в акустике.

В дальнейшем, используя это обозначение, формулы в электродинамике и в акустике мы будем записывать единым образом.

Таким образом, для поля в верхней среде мы имеем

$$\psi = e^{ik(x \cos \alpha - z \sin \alpha)} + V e^{ik(x \cos \alpha + z \sin \alpha)}$$

и для поля в нижней среде:

$$\psi_1 = W e^{ik_1(x \cos \alpha_1 - z \sin \alpha_1)}.$$

Подставляя эти выражения в (6) и полагая затем $z=0$, мы получаем хорошо известным способом

$$n \cos \alpha_1 = \cos \alpha \quad (7)$$

и, далее,

$$V = \frac{m \sin \alpha - \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}}{m \sin \alpha + \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}}, \quad (8)$$

$$W = \frac{1}{m} (1 + V). \quad (9)$$

Эти формулы и являются основными в теории отражения и преломления плоских волн.

Отметим ещё следующее вполне очевидное обстоятельство, которым мы в дальнейшем будем пользоваться. Если поле падающей волны в точке x_0, z_0 равно ψ_0 , то поле отражённой волны в точке x, z будет:

$$\psi_0 V e^{ik[(x - x_0) \cos \alpha + (z + z_0) \sin \alpha]}, \quad (10)$$

где в экспоненте стоит суммарный набег фазы волны. Аналогично для поля преломлённой волны получаем:

$$\psi_1 = \phi_0 W e^{ik[(x-x_0) \cos \alpha + z_0 \sin \alpha - zn \sin \alpha_1]}, \quad (11)$$

где $z < 0$.

Перейдём теперь к обобщению понятия плоской волны. Выражение (4) является решением волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k^2 \phi = 0.$$

Нетрудно убедиться, что оно остаётся решением, если под α понимать произвольную комплексную величину

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'',$$

причём тогда будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \alpha' \operatorname{ch} \alpha'' - i \sin \alpha' \operatorname{sh} \alpha'', \\ \sin \alpha &= \sin \alpha' \operatorname{ch} \alpha'' + i \cos \alpha' \operatorname{sh} \alpha''. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

В результате выражение (4) записывается в виде

$$e^{-k(x \sin \alpha' + z \cos \alpha') \operatorname{sh} \alpha'' + ik(x \cos \alpha' - z \sin \alpha') \operatorname{ch} \alpha''}. \quad (13)$$

Пределы изменения α' можно ограничить интервалом $(0, 2\pi)$, величина же α'' может принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Последнее выражение описывает волну с переменной амплитудой, причём плоскости постоянной амплитуды $x \sin \alpha' + z \cos \alpha' = \text{const.}$, как нетрудно видеть, нормальны к плоскостям постоянной фазы $x \cos \alpha' - z \sin \alpha' = \text{const.}$, т. е. к фронтам волн. Такие волны называются неоднородными плоскими волнами. Неоднородная плоская волна распространяется в направлении, образующем с осью x произвольный угол α' , имея при этом длину волны λ' , меньшую обычной длины волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Действительно, из (13) следует $k_x = k \cos \alpha' \operatorname{ch} \alpha''$ и $k_z = -k \sin \alpha' \operatorname{ch} \alpha''$, так что $\left(\frac{2\pi}{\lambda'}\right)^2 = k_x^2 + k_z^2 = k^2 \operatorname{ch}^2 \alpha'' > k^2$, откуда и вытекает: $\lambda' < \lambda$.

Отсюда следует также, что скорость распространения неоднородной волны меньше, чем скорость обычной волны и зависит от α'' . Амплитуда неоднородной волны убывает или возрастает в направлении, перпендикулярном к распространению.

В частности, при чисто мнимом α ($\alpha' = 0$) неоднородная волна, как видно из (13), распространяется вдоль оси x , амплитуда же её возрастает или убывает вдоль оси z .

Так как при выводе формул (7)–(9) мы нигде не пользовались условием вещественности α и α_1 , то эти формулы справедливы и для комплексных α и α_1 , т. е. для неоднородных волн. Для обычных плоских волн коэффициент отражения (8) является вещественной величиной, если m и n вещественны. Таким образом, фаза отражённой

волны совпадает с фазой падающей волны (если $V > 0$) или противоположна ей (если $V < 0$). В случае же неоднородных волн коэффициент отражения является комплексным, и изменение фазы может быть любым.

Посмотрим, как меняется характер неоднородной волны при её отражении и преломлении. Возьмём для простоты неоднородную волну, распространяющуюся вдоль оси x . Положив в (13) $\alpha' = 0$, получаем для неё выражение

$$e^{-kz \operatorname{sh} \alpha'' + ikx \operatorname{ch} \alpha''}. \quad (14)$$

Процесс отражения, как видно из рис. 1, а также из сравнения выражений (4) и (4'), можно рассматривать как изменение знака α . Следовательно, если трактовать (14) как падающую волну, то отражённая волна будет:

$$V e^{+z \operatorname{sh} \alpha'' + ikx \operatorname{ch} \alpha''}.$$

Таким образом, если падающая волна имела амплитуду, убывающую с увеличением z , то отражённая волна будет иметь амплитуду, возрастающую с увеличением z , и наоборот.

Существенные изменения характера неоднородной волны могут происходить также при её преломлении. Могут быть случаи, когда неоднородная волна при преломлении превращается в обычную плоскую волну, и наоборот. В самом деле, рассмотрим опять для простоты волну с чисто мнимым α . Здесь согласно (12) $\cos \alpha = \operatorname{ch} \alpha''$. Поэтому из (7) для угла скольжения преломлённой волны получаем:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\operatorname{ch} \alpha''}{n}.$$

При $n > \operatorname{ch} \alpha''$ α_1 будет вещественной величиной. Таким образом, неоднородная волна при преломлении превращается в обычную плоскую волну.

Пусть, далее, α вещественно; тогда из (7)

$$\cos \alpha_1 = \frac{\cos \alpha}{n};$$

при $n < \cos \alpha$ мы будем иметь $\cos \alpha_1 > 1$, т. е. α_1 мнимо. Здесь обычная плоская волна превратилась в неоднородную. Последний случай представляет собой не что иное, как хорошо известное явление полного внутреннего отражения.

1. ОТРАЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН

3. Отражение сферической волны в приближении геометрической оптики

Пусть имеется излучатель O (рис. 2) в виде вертикального диполя в электромагнитном случае и пульсирующей сферы малого радиуса в акустике. Создаваемое таким излучателем поле в окружающем пространстве, как и раньше, может быть охарактеризовано вектором Герца

(имеющим только одну вертикальную составляющую) в первом случае и звуковым потенциалом — во втором. Вертикальную составляющую вектора Герца и звуковой потенциал поля, создаваемого излучателем в отсутствии границы раздела, мы будем обозначать через ψ_0 . С точностью до постоянного множителя, зависящего от мощности излучателя, будем иметь:

$$\psi_0 = \frac{e^{ikR}}{R},$$

где R — расстояние от излучателя до точки наблюдения. Это выражение назовём сферической волной.

Наличие границы раздела сред скажется в том, что для получения полного поля ψ в верхней среде к ψ_0 нужно добавить отражённую волну ψ_r :

$$\psi = \psi_0 + \psi_r. \quad (15)$$

В нижней среде поле будет описываться преломлённой волной, которую мы обозначим через ψ_1 . В определении ψ_r и ψ_1 и будет заключаться наша задача.

Простейшим приёмом, годным для достаточно высоких частот, является применение геометрической (лучевой) оптики. Он заключается в том, что мы пренебрегаем кривизной волны при отражении и считаем, что она отражается, как плоская. Сферичность же волны учитываем только множителем, характеризующим убывание амплитуды волны из-за расхождения её фронта. В результате получаем для отражённой волны:

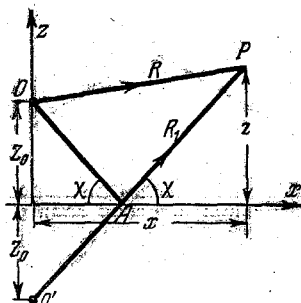


Рис. 2. Лучевая картина при отражении сферической волны.

$$\psi_r = V(\chi) \frac{e^{ikR_1}}{R_1}, \quad (16)$$

где множитель e^{ikR_1} даёт набег фазы волны вдоль луча. Здесь R_1 — длина луча OAP (рис. 2), соединяющего излучатель с точкой наблюдения и отражающегося от границы по закону геометрической оптики, χ — угол скольжения этого луча и, наконец, $V(\chi)$ — коэффициент отражения плоской волны, определяемый выражением (8).

При использовании выражения (16) для вычисления компонент электрического и магнитного полей получаются так называемые отражательные формулы. Ниже, в § 7, мы выясним, при каких условиях выражение, получаемое из точной теории, учитывающей кривизну фронта волны, переходит в (16).

Тем самым будут определены границы применимости отражательных формул.

4. Разложение сферической волны на плоские

Для более точного исследования отражения и преломления сферических волн оказывается удобным представление их в виде суперпозиции плоских волн, поскольку формулы для отражения и преломления плоских волн известны. Здесь сказывается весьма близкая аналогия задачи об отражении волн с дифракционными задачами (см. также статью В. А. Фока⁹). Обычным методом, применяемым в дифракционных задачах, является разложение падающей волны на волны, имеющие ту же симметрию, что и тело, на котором происходит дифракция.

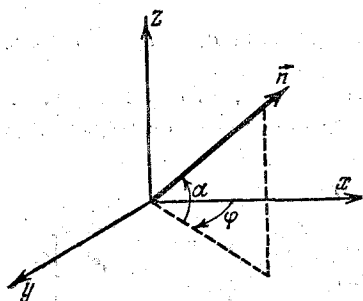


Рис. 3. $\vec{n}$ — нормаль к фронту произвольной плоской волны. Углы α и φ характеризуют её направление в пространстве.

Аналогично этому, в задаче об отражении сферическая волна раскладывается на плоские, поскольку рассматривается отражение от плоской границы. Вообще же нашу задачу об отражении сферической волны можно рассматривать как задачу о её дифракции на плоскости.

Рассмотрим подробнее разложение сферической волны на плоские. Направление нормали к фронту каждой из плоских волн мы будем характеризовать углами α и φ (рис. 3). Любая из плоских волн будет

даваться выражением

$$e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}, \quad (17)$$

где

$$k_x = k \cos \alpha \cos \varphi, \quad k_y = k \cos \alpha \sin \varphi, \quad k_z = k \sin \alpha \quad (18)$$

суть компоненты волнового вектора по осям координат.

Формула для разложения сферической волны на плоские волны (17) имеет вид^{*})

$$\frac{e^{ikR}}{R} = -\frac{ik}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} e^{ik(x \cos \alpha \cos \varphi + y \cos \alpha \sin \varphi \pm z \sin \alpha)} \cos \alpha \, d\alpha \, d\varphi, \quad (19)$$

причём временно предполагается, что излучатель находится в начале координат и, следовательно, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В экспоненте бе-

^{*}) См. ¹⁰, стр. 138. Выражение (19) отличается от имеющихся в литературе только тем, что мы употребляем углы скольжения α вместо углов падения γ .

При этом $\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma$.

рётся знак «плюс», если $z > 0$, и знак «минус», если $z < 0$, что необходимо для сходимости интеграла.

Интегрирование по φ производится от 0 до 2π , а по α — сначала по вещественным значениям от $-\frac{\pi}{2}$ до 0 и затем по мнимым от 0 до $i\infty$ (рис. 4). Таким образом, кроме распространяющихся по всем направлениям обычных плоских волн, в разложении присутствуют неоднородные волны, соответствующие мнимым α , распространяющиеся с укороченной длиной волны в плоскости xu и экспоненциально затухающие (или возрастающие) по амплитуде в направлении оси z (см. предыдущий параграф). Необходимость привлечения такого рода волн при разложении сферической волны вытекает из того, что суперпозицией одних только обычных плоских волн нельзя получить поле, которое имело бы требуемую особенность при $R = 0$ и оставалось конечным во всех остальных точках. Покажем, каким образом такая особенность получается при привлечении неоднородных волн.

Полагая $\alpha = i\alpha''$, мы получаем согласно (18) и (12) для неоднородных волн:

$$\left. \begin{aligned} k_x &= k \operatorname{ch} \alpha'' \cos \varphi, & k_y &= k \operatorname{ch} \alpha'' \sin \varphi, \\ k_z &= i k \operatorname{sh} \alpha''. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

При $\alpha'' \rightarrow \infty$ из (20) получаем $k_x \rightarrow \infty$, $k_y \rightarrow \infty$, $k_z \rightarrow i\infty$. Это означает, что мы имеем волны, распространяющиеся в горизонтальной плоскости с длиной волны, стремящейся к нулю, и одновременно затухающие в вертикальном направлении с коэффициентом затухания, стремящимся к бесконечности.

При $x = y = z = 0$ суперпозиция бесконечного числа этих волн [интеграл (19)] даёт бесконечное значение вектора Герца или звукового потенциала. При отходе же от этой точки получаются конечные значения или из-за затухания (при $z \neq 0$), или из-за расфазировки волн (при $x \neq 0$ или $y \neq 0$, так как все волны имеют одинаковую фазу только при $x = y = 0$).

Здесь уместно сделать следующее замечание. Выражение для первичной волны $\frac{e^{ikR}}{R}$ не изменяется при любом повороте системы координат, поскольку начало координат предполагается совмещённым с излучателем. Однако при разных положениях осей координат в разложениях берутся разные неоднородные волны. Именно, каждый раз берутся те неоднородные волны, которые затухают вдоль выбранного направления оси z . Отсюда следует вывод, что одно и то же поле мы можем представлять наложением плоских

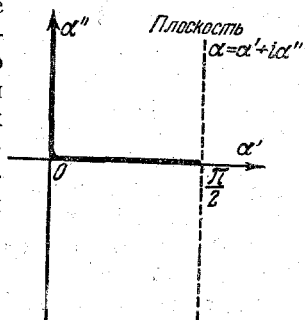


Рис. 4. Путь интегрирования в комплексной плоскости углов при разложении сферической волны на плоские.

волн, направляющие косинусы которых выбираются по различным законам. Это замечание имеет для нас фундаментальное значение. Выбор наиболее удобного закона, что эквивалентно отысканию подходящего пути интегрирования в комплексной плоскости, может существенно упростить задачу (причём имеющиеся здесь возможности не сводятся, вообще говоря, к одним поворотам системы координат). Эта идея лежит в основе излагаемого в следующих параграфах метода.

При наличии границы раздела сред каждая из плоских волн даёт отражённую и преломлённую волны. В результате вектор Герца (или звуковой потенциал) в верхней среде будет даваться интегралом вида (19), где под интегралом будут стоять не только прямая, но и отражённая волны. В нижней среде будем иметь аналогичный интеграл от преломлённых плоских волн.

Для дальнейшего нам удобно предположить, что начало прямоугольной системы координат (x, y, z) находится на границе раздела, а излучатель помещён в точке $(0, 0, z_0)$ (рис. 2). При этом в выражении (19) z нужно заменить на $z - z_0$. Кроме того, предположим, что точка наблюдения лежит в плоскости xz . Тогда $y = 0$.

Учитывая теперь даваемый формулой (10) набег фазы для каждой из отражённых плоских волн, мы получаем для отражённой сферической волны

$$\psi_r = -\frac{ik}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{i\infty} \int_0^{2\pi} e^{ik[x \cos \alpha \cos \varphi + (z + z_0) \sin \alpha]} V(\alpha) \cos \alpha d\alpha d\varphi \quad (21)$$

и, аналогично, учитывая также ещё (9), для преломлённой волны *)

$$\begin{aligned} \psi_1 = -\frac{ik}{2\pi m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{i\infty} \int_0^{2\pi} e^{ik(x \cos \alpha \cos \varphi + z_0 \sin \alpha) - ik_1 z \sin \alpha_1} [1 + \\ + V(\alpha)] \cos \alpha d\alpha d\varphi. \quad (21') \end{aligned}$$

Здесь, согласно закону преломления (7),

$$k_1 \sin \alpha_1 = k \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}.$$

*) Используемый здесь метод имеет весьма широкую область применимости. Так, нетрудно видеть, что все наши рассуждения, приведшие к формуле (21), остались бы в силе, если бы среда при $z < 0$ имела параметры, произвольным образом зависящие от z . При этом функция $V(\alpha)$ означала бы коэффициент отражения плоских волн от такой среды. Это позволяет подойти с новой точки зрения к широкому и важному классу задач, на чём мы подробнее остановимся в другом месте.

Знак корня нужно выбирать так, чтобы мнимая часть его была положительна, т. е.

$$\operatorname{Im} \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha} > 0, \quad (22)$$

что необходимо для того, чтобы при $z \rightarrow -\infty$ амплитуда преломлённой волны стремилась к нулю.

5. Поле отражённой волны в волновой зоне

Анализ интеграла (21) оказывается значительно сложнее, чем его получение. Мы проведём этот анализ для волновой зоны, т. е. для больших по сравнению с длиной волны расстояний от излучателя. При этом интеграл оказывается возможным представить таким образом, что в нём основную роль будут играть только те плоские волны, направление которых почти совпадает с направлением луча OP (рис. 2), построенного по законам геометрической оптики.

Удобным математическим приёмом здесь является так называемый метод перевала. Он служит для оценки значений интегралов вида

$$I = \int_C e^{\rho f(\zeta)} f(\zeta) d\zeta \quad (23)$$

при больших значениях ρ . Через C обозначен некоторый путь в комплексной плоскости $\zeta = \zeta' + i\zeta''$, по которому и производится интегрирование. В частном случае путь C может захватывать только вещественные значения ζ .

Общую теорию метода перевала читатель найдёт в литературе^{11, 12}. В основных чертах этот метод сводится к следующему. Путь интегрирования в комплексной плоскости можно деформировать, не меняя при этом значения интеграла. Пользуясь этим, постараемся путь интегрирования провести так, чтобы та часть пути, которая определяет в основном всё значение интеграла, была возможно короче. Тогда, как увидим, подинтегральную функцию удастся заменить на другую, более простую функцию (обычно степенной ряд), достаточно точно совпадающую с подинтегральной функцией на этом существенном участке пути интегрирования. При этом мы можем не заботиться о том, какой она будет на других, несущественных участках.

Не ограничивая общности, ρ в (23) можно считать вещественным и положительным. Выделим в $f(\zeta)$ вещественную и мнимую части:

$$f(\zeta) = f_1 + if_2.$$

Тогда экспонента под интегралом в (23) запишется:

$$e^{i\rho f_2 + \rho f_1}. \quad (24)$$

Отсюда видно, что путь интегрирования нужно выбирать таким образом, чтобы на нём функция f_1 имела в некоторой точке максимум

и спадала возможно быстрее при удалении от этой точки. Но мнимая и вещественная части аналитической функции — в нашем случае f_1 и f_2 — обладают тем свойством, что на плоскости $\zeta = \zeta' + i\zeta''$ линии быстрейшего спада одной из них являются линиями постоянного значения для другой*). Так как путь интегрирования должен идти по линии быстрейшего спада f_1 , то отсюда вытекает, что он должен совпадать с линией $f_2 = \text{const.}$ — линией постоянной фазы. Расположенная на этом пути точка, в которой f_1 принимает максимальное значение, называется точкой перевала. В ней должна быть равна нулю производная от f_1 , взятая в направлении пути интегрирования. Так как на этом пути $f_2 = \text{const.}$, то, следовательно, равна нулю и производная от f_2 . Таким образом, при дифференцировании в направлении пути интегрирования

$$\frac{df}{d\zeta} = 0. \quad (25)$$

Но если производная аналитической функции в какой-либо точке равна нулю хотя бы по одному направлению, то она равна нулю и по всем остальным, ибо она, как известно, одинакова по всем направлениям. Таким образом, точка перевала должна являться корнем уравнения (25).

Итак, наиболее выгодный путь интегрирования должен проходить через точку перевала, определяемую уравнением (25), и уходить от неё по линии быстрейшего спада функции f_1 , совпадающей с линией $f_2 = \text{const.}$ Такой путь для краткости мы будем называть «перевальным путём интегрирования». Если ρ велико, то экспонента (24) при удалении от точки перевала будет быстро спадать, так что существенную роль будет играть только малая часть пути интегрирования, включающая точку перевала.

Допустим, что, решая уравнение (25), мы нашли для точки перевала $\zeta = \zeta_0$. Тогда на перевальном пути интегрирования должно быть:

$$f(\zeta) = f(\zeta_0) - s^2, \quad (26)$$

причём s пробегает все вещественные значения от $-\infty$ до $+\infty$, в точке же перевала $s = 0$. Действительно, при этом согласно (26) мнимая часть функции $f(\zeta)$ остаётся всё время равной $f_2(\zeta_0)$, а вещественная убывает по обе стороны от точки перевала. Произведём теперь в (23) замену переменных ζ на новую переменную s . В плоскости комплексного переменного s перевальный путь интегрирования будет даваться вещественной осью**).

*) Это является следствием известных соотношений Коши-Римана. См., например¹⁸ стр. 254.

**) При преобразовании первоначального пути интегрирования в перевальный нужно учесть особые точки подинтегральной функции, если они имеются.

В результате, обозначив

$$F(\zeta) \frac{d\zeta}{ds} = \Phi(s), \quad (27)$$

интеграл (23) запишем в виде

$$I = e^{2f(\zeta_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho s^2} \Phi(s) ds. \quad (28)$$

Так как ρ предполагается большим, то под интегралом будут существенны только малые значения s . Вследствие этого функцию $\Phi(s)$ целесообразно представить в виде ряда по степеням s^*):

$$\Phi(s) = \Phi(0) + \Phi'(0)s + \frac{1}{2} \Phi''(0)s^2 + \dots$$

Подставляя этот ряд под интеграл, получаем после подстановки значений известных интегралов

$$I = e^{2f(\zeta_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \left[\Phi(0) + \frac{1}{4\rho} \Phi''(0) + \dots \right]. \quad (29)$$

Таким образом, метод перевала позволяет представить значение интеграла в виде ряда по обратным степеням большого параметра ρ . Если функция $\Phi(s)$ является достаточно медленно меняющейся по сравнению с экспонентой $e^{-\rho s^2}$, т. е. если её производные достаточно малы, то в (29) можно ограничиться одним или несколькими первыми членами.

Применим эти соображения к вычислению интеграла по φ в (21). Он может быть записан в виде **)

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varphi \cos \varphi} d\varphi, \quad (30)$$

где обозначено $\rho = kx \cos \alpha$. Мы предположим, что $\rho \gg 1$, и рассмотрим сначала случай, когда α вещественно. Сравнивая с (23), получаем $f(\varphi) = i \cos \varphi$, $F(\varphi) = 1$. При применении метода перевала к этому интегралу необходимо представить себе комплексную плоскость $\varphi = \varphi' + i\varphi''$, первоначальный путь интегрирования на которой является отрезком вещественной оси $(0, 2\pi)$. Перевальные точки согласно (25) найдутся из уравнения

$$\frac{d}{d\varphi} \cos \varphi = 0$$

*) Функцию $\Phi(s)$, определяемую (27), обычно приходится сразу искать в виде ряда по степеням s , так как отыскание явного её выражения в точном виде затруднительно (примеры см. ниже).

**) Интеграл (30) хорошо известен. Он равен $2\pi J_0(\rho)$, где $J_0(\rho)$ — функция Бесселя. Получаемое же ниже выражение (32) является асимптотическим представлением этой функции. Мы проводим исследование интеграла с целью проиллюстрировать постоянно употребляемый ниже метод на простом примере.

и будут

$$\varphi = 0, \pi, 2\pi.$$

Согласно (26) мы вводим новую переменную s , связанную с φ уравнением

$$\cos \varphi = \pm 1 + is^2, \quad (31)$$

и проводим в плоскости φ через точки перевала пути интегрирования так, чтобы вдоль них s менялось от $-\infty$ до $+\infty$. Приравнявая в последнем выражении вещественные части в обеих сторонах равенства, получаем для этих путей:

$$\cos \varphi' \operatorname{ch} \varphi'' = \pm 1.$$

При этом верхний и нижний знаки перед единицей здесь и в (31) относятся к путям, проходящим соответственно через точки $\varphi = 0$ (или 2π) и $\varphi = \pi$. Эти пути интегрирования изображены на рис. 5 пунктирными линиями.

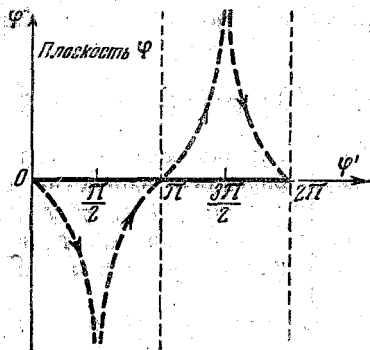


Рис. 5. Замена первоначального пути интегрирования (жирная линия) на перевальный (пунктирные линии).

Вместо интегрирования по вещественной оси от 0 до 2π мы можем интегрировать по этим путям в направлении, указанном стрелками, что равносильно изменению s в пределах вещественных значений. Согласно (27) мы имеем: $\Phi(s) = \frac{d\varphi}{ds}$. Пользуясь (31), получаем, с точностью до s^2 включительно,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{2} e^{\mp \frac{i\pi}{4}} \left(1 \mp i \frac{s^2}{4} \right).$$

Выбор верхнего или нижнего знаков производится так же, как и в (31). В результате мы получим интегралы вида (28), где функция $\Phi(s)$ оказывается уже разложенной в ряд по s . Подставив значения соответствующих табличных интегралов, будем иметь окончательно:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho \cos \varphi} d\varphi = \sqrt{\frac{2\pi}{\rho}} \left[e^{i\rho - \frac{i\pi}{4}} \left(1 + \frac{1}{8i\rho} \right) + e^{-i\rho + \frac{i\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{8i\rho} \right) \right]. \quad (32)$$

Здесь первый член в квадратных скобках получается от перевальных точек 0, 2π , а второй от точки π *). Можно показать, что выражение (32) справедливо и для комплексных ρ .

*) Точки перевала $\varphi = 0, 2\pi$ соответствуют волнам, распространяющимся от излучателя к приёмнику, а точка перевала π — волнам, распространяющимся от приёмника к излучателю. Разложение сферической волны по плоским включает в себя оба направления распространения. Из дальнейшего будет видно, что с увеличением расстояния роль «обратных» плоских волн уменьшается.

Подставляя (32) в (21), получаем:

$$\psi_r = -\frac{ik}{\sqrt{2\pi x}} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{i\infty} e^{i\rho - \frac{i\pi}{4}} \left(1 + \frac{1}{8i\rho}\right) e^{ik(z+z_0)\sin\alpha} V(\alpha) \cos\alpha d\alpha + \right. \\ \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{i\infty} e^{-i\rho + \frac{i\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{8i\rho}\right) e^{ik(z+z_0)\sin\alpha} V(\alpha) \cos\alpha d\alpha \right]. \quad (33)$$

Здесь второй интеграл удобно преобразовать, введя новую переменную $\beta = \pi - \alpha$, путь интегрирования по которой будет идти от $\frac{\pi}{2}$ до $\pi - i\infty$. При этом $\sin\alpha = \sin\beta$, $\cos\alpha = -\cos\beta$, $\sqrt{\cos\alpha} = -i\sqrt{\cos\beta}$ (знак «минус» в последнем равенстве вытекает из анализа правой и левой частей равенства на удалённых участках соответственных путей интегрирования) и согласно (8) $V(\alpha) = V(\beta)$. В результате подинтегральное выражение во втором интеграле в (33) запишется так же, как и в первом, но пределы интегрирования в нём будут $\pi - i\infty$ и $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, оба эти интеграла можно объединить в один с путём интегрирования, идущим из $\pi - i\infty$ через точку $\frac{\pi}{2}$ и уходящим в $i\infty$ (путь Γ_1 на рис. 6). Если, кроме того, в экспоненте заменить $\rho = kx \cos\alpha = kR_1 \cos\chi \cos\alpha$ и $z + z_0 = R_1 \sin\chi$ (см. рис. 2), то выражение (33) запишется:

$$\psi_r = -\sqrt{\frac{k}{2\pi x}} e^{\frac{i\pi}{4}} \int_{\pi - i\infty}^{i\infty} e^{ikR_1 \cos(\alpha - \chi)} \left(1 + \frac{1}{8kx \cos\alpha}\right) V(\alpha) \sqrt{\cos\alpha} d\alpha. \quad (34)$$

Анализ этого интеграла также можно провести методом перевала, так как величина kR_1 предполагается большой.

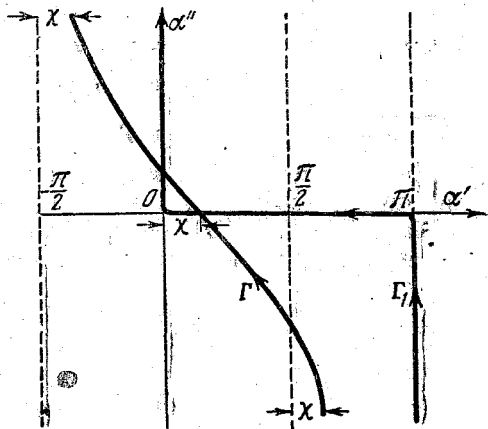


Рис. 6. Картина в комплексной плоскости α . Γ — перевальный путь интегрирования.

Сравнивая с (23), мы полагаем $\rho = kR_1$, $f(\alpha) = i \cos(\chi - \alpha)$ и

$$F(\alpha) = \left(1 + \frac{1}{8kx \cos \alpha}\right) V(\alpha) \sqrt{\cos \alpha}.$$

Точка перевала, определяемая уравнением $\frac{df}{d\alpha} = 0$, будет $\alpha = \chi$. Переход к переменной s — см. (26) — будет производиться согласно соотношению

$$\cos(\alpha - \chi) = 1 + is^2. \quad (35)$$

Интегрирование по пути Γ_1 в плоскости α заменим интегрированием по новому (перевальному) пути интегрирования, который бы соответствовал вещественным значениям s . Взяв вещественные части от обеих сторон равенства (35) и учитывая (12), получаем уравнение этого пути в плоскости α :

$$\cos(\alpha' - \chi) \operatorname{ch} \alpha'' = 1.$$

Путь будет пересекать вещественную ось в точке $\alpha = \chi$ под углом в 45° и уходить, с одной стороны, в $-\frac{\pi}{2} + \chi + i\infty$, а с другой, в $\frac{\pi}{2} + \chi - i\infty$ (путь Γ на рис. 6). Таким образом, интегрирование по комплексным значениям α заменяется интегрированием по вещественным значениям s от $-\infty$ до $+\infty$. Функция $\Phi(s)$, определяемая выражением (27), без труда может быть найдена в виде ряда по степеням s , после чего согласно общей формуле (29) получаем:

$$\psi_r = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \left[V(\chi) - \frac{iN}{kR_1} \right], \quad (36)$$

где

$$N = \frac{1}{2} V''(\chi) \cos^2 \chi - V'(\chi) \sin \chi. \quad (37)$$

Если ввести обозначения $q_0 = \sqrt{n^2 - \cos^2 \chi}$ ($\operatorname{Im} q_0 > 0$), $\sin \chi = \gamma$ и ограничиться случаем малых γ , то вычисление производных даёт:

$$N = - \frac{m [2m \sqrt{n^2 - 1} + \gamma (2n^2 + 1)]}{(m\gamma + q_0)^3}. \quad (38)$$

Легко дать физическую интерпретацию производным при вычислении интеграла (34) математическим операциям. Прежде всего деформация первоначального пути интегрирования Γ_1 в путь Γ соответствует отмеченной в предыдущем параграфе возможности представлять одно и то же поле наложением плоских волн, выбранных различными способами. Выбор пути Γ соответствует тому, что поле составляется из тех плоских волн, которые имеют в точке наблюдения одинаковую фазу ($\operatorname{Re} \cos(\alpha - \chi) = 1$), а именно ту же, что и волна, отражённая под углом скольжения χ . Путь, на котором фаза постоянна, согласно общим свойствам аналитических функций

является также путём, на котором (при выполнении в данном случае условия $\operatorname{Im} \cos(\alpha - \chi) > 0$) величина экспоненты под интегралом быстрее всего убывает. Поэтому-то и оказалось, что при анализе интеграла были существенны только малые s , т. е. α , близкие к χ . Это означает, что поле в точке наблюдения в основном составляется из плоских волн, отражённых от границы под углами, близкими к χ — углу отражения луча, построенного по законам геометрической оптики.

В соответствии с этим основным членом в (35) является первый член в скобках, дающий отражённую волну в приближении геометрической оптики. Второй член можно рассматривать как поправку, играющую, однако, в ряде случаев весьма существенную роль, в частности, как мы покажем ниже, когда излучатель и приёмник находятся на малых по сравнению с длиной волны расстояниях от границы.

Выражение (38) в одном отношении не является полным. В нём не учтена так называемая боковая волна, получающаяся при более тщательном проведении анализа деформирования пути интегрирования в комплексной плоскости. Однако в электромагнитном случае, когда нижней средой является земля, эта волна не играет никакой роли, так как быстро затухает с расстоянием. При отражении сферической волны от диэлектрика без потерь, а также в акустике она может играть роль, но на этом мы подробнее остановимся в § 9.

6. Формула Вейля-Ван дер Поля. Случай полюса, расположенного вблизи точки перевала

Произведём одно уточнение выражения (36) и одновременно выйдем границы его применимости.

Основными этапами при выводе формулы (36) являлась замена (35) и разложение всего подинтегрального выражения в (34), кроме экспоненты, в ряд по степеням s . Необходимо, естественно, чтобы этот ряд сходил. Однако радиус сходимости подинтегральной функции ограничен вследствие того, что $V(\alpha)$ обращается в бесконечность (имеет полюс первого порядка) в точке $\alpha = \alpha_p$, где α_p находится в случае электродинамики из уравнения

$$n^2 \sin \alpha_p + \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha_p} = 0, \quad (39)$$

что даёт:

$$\cos \alpha_p = \pm \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}. \quad (40)$$

Если местонахождение полюса в плоскости s обозначить через s_0 , причём согласно (35)

$$\cos(\alpha_p - \chi) = 1 + i s_0^2, \quad (41)$$

то ряд по степеням s будет сходиться внутри круга радиуса s_0 , на границе которого лежит полюс. Чем меньше s_0 (т. е. чем больше $|n|$), тем в большей степени круг сходимости стягивается к точке перевала $s = 0$. Для применимости употреблённого нами выше метода перевала необходимо, чтобы вся область существенных значений s

под интегралом $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kR_1 s^2} ds$ лежала внутри круга сходимости.

Обозначим верхнюю границу существенных значений s через s_1 . Она имеет порядок величины $s_1 \sim \frac{1}{\sqrt{kR_1}}$. Если при разложении в ряд ограничиваться членом с s^2 , то необходимо, чтобы зона существенных значений s была значительно меньше, чем s_0 , что можно записать в виде $\left(\frac{s_1}{s_0}\right)^2 \ll 1$ или

$$kR_1 s_0^2 \gg 1. \quad (42)$$

Величину $w = kR_1 s_0^2$ принято называть численным расстоянием. Следовательно, для применения полученных выше формул (36) и (37) необходимо, чтобы численные расстояния были велики.

Используя выражения (40) и (41), получаем *):

$$w^2 = ikR_1 \left(1 - \frac{n \cos \chi - \sin \chi}{\sqrt{n^2 + 1}} \right). \quad (43)$$

Если χ мало, а $|n|$ велико, так что величинами χ^2 и $\frac{1}{n^2}$ можно пренебречь по сравнению с единицей, будем иметь:

$$w^2 = \frac{ikR_1}{2n^2} (1 + 2n\chi). \quad (44)$$

При больших $|n|$, т. е. большой проводимости почвы и длинных волнах, условие (42) может не выполняться. Однако можно получить выражение, применимость которого ограничена не условием (42), а обычным для метода перевала условием $kR_1 \gg 1$, если несколько модифицировать метод перевала, как это было сделано В. А. Фоком¹⁴ и Оттом³, разными методами (см. также¹⁵). Изложим этот вопрос сначала в общем виде.

Допустим, что у нас имеется интеграл вида

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kRs^2} \Phi(s) ds, \quad (45)$$

*) В (40) мы берём знак «плюс», так как нам существенен полюс, лежащий вблизи начала координат ($\cos \alpha_p \cong 1$). Из (41) также имеем $\sin \alpha_p = -\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$. Знак «плюс» здесь недопустим вследствие того, что тогда из (39) следовало бы $\text{Im} \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha_p} < 0$, что противоречит условию (22).

где kR велико. Пусть функция $\Phi(s)$ имеет простой полюс в точке $s=s_0$, где s_0 в общем случае комплексно. Умножаем и делим под-интегральное выражение в (45) на $s^2 - s_0^2$:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kRs^2} \Phi(s) (s^2 - s_0^2) \frac{ds}{s^2 - s_0^2};$$

функция $\Phi(s) (s^2 - s_0^2)$ уже не имеет особенности при $s=s_0$. Разложим её по степеням s :

$$\Phi(s) (s^2 - s_0^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{m!} s^m. \quad (46)$$

Можно показать³, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-kRs^2} s^{2m} ds}{s^2 - s_0^2} &= \\ &= \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1) \sqrt{\pi} \omega^{2m-1}}{2^{m-1} (kR)^{m-\frac{1}{2}}} e^{-\omega^2} \int_{\omega}^{i\infty} \frac{e^{u^2}}{u^{2m}} du, \end{aligned}$$

где нужно брать знак «плюс», если s_0 лежит в верхней полуплоскости, и «минус», — если в нижней (при этом $\omega = \sqrt{kR} s_0$).

В результате для интеграла (45) получим:

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 \sqrt{\pi} c_{2m} \omega^{2m} e^{-\omega^2}}{4^m m! (kR)^m (\pm s_0)} \int_{\omega}^{i\infty} \frac{e^{u^2}}{u^{2m}} du. \quad (47)$$

Таким образом, задача решается при любом расположении полюса, в том числе и как угодно близко к точке перевала. Интегралы в (47) допускают численное интегрирование обычными методами.

В отличие от обычного метода перевала конечный результат (47) не является рядом по степеням $\frac{1}{kR}$, так как kR входит также ещё и в ω . Однако если численное расстояние велико, то, представляя интеграл в (47) при помощи интегрирования по частям в виде сходящегося ряда по степеням $\frac{1}{\omega}$, мы получаем сразу же, как нетрудно показать, тот же ряд по степеням $\frac{1}{kR}$, который получается, если к (45) применить обычный метод перевала (т. е. разложить $\Phi(s)$ в ряд по степеням s и произвести почленное интегрирование).

Применим теперь изложенный выше метод к нашей проблеме. Вектор Герца в верхней среде даётся суммой выражений (19) и (21), что мы запишем в виде

$$\psi = \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{ik}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{i\infty} e^{ikx \cos \alpha \cos \varphi} \times \\ \times [e^{ik(z+z_0) \sin \alpha} + (V(\alpha) - 1)e^{ik(z+z_0) \sin \alpha}] \cos \alpha d\alpha d\varphi.$$

Здесь интеграл от первого члена в квадратных скобках по аналогии с (19) (в последнем нужно положить $y=0$) даёт $\frac{e^{ikR_1}}{R_1}$, т. е. волну, как бы исходящую из мнимого излучателя O' (см. рис. 2). Интеграл от второго члена приводится к виду (34) с той разницей, что вместо $V(\alpha)$ будет стоять $V(z) - 1$. В результате получаем (пренебрегая $\frac{1}{8ikx \cos \alpha}$ по сравнению с 1):

$$\psi = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR_1}}{R_1} + \\ + \sqrt{\frac{k}{2\pi x}} e^{\frac{i\pi}{4}} \int_{\pi-i\infty}^{i\infty} e^{ikR_1 \cos(\alpha-\chi)} [1 - V(\alpha)] \sqrt{\cos \alpha} d\alpha, \quad (48)$$

причём согласно (8), где $m = n^2$,

$$1 - V(z) = \frac{2q(\alpha)}{M(\alpha)},$$

где

$$q(\alpha) = \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}, \quad M(\alpha) = n^2 \sin \alpha + q.$$

Произведя замену $\cos(\alpha - \chi) = 1 + is^2$ и изменив путь интегрирования так, чтобы интегрирование производилось по вещественным значениям s (перевальный путь интегрирования), причём

$$d\alpha = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi i}{4}} \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{is^2}{2}}}, \quad (49)$$

мы приведём интеграл в (48) к виду (45), после чего будем иметь согласно (47):

$$\psi = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR_1}}{R_1} + \\ + \sqrt{\frac{2k}{x}} e^{ikR_1} + \frac{i\pi}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{2m} \omega^{2m} e^{-\omega^2}}{4^m m! (kR_1)^m s_0} \int_{\omega}^{i\infty} \frac{e^{u^2}}{u^{2m}} du. \quad (50)$$

Здесь c_{2m} — коэффициенты разложения:

$$\frac{2q(\alpha)}{M(\alpha)} (s^2 - s_0^2) \frac{d\alpha}{ds} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{m!} s^m. \quad (51)$$

Из (51) получаем *) для $|n| \gg 1$, $\chi \ll 1$:

$$c_0 = \frac{2s_0}{n}, \quad c_2 = \frac{is_0}{2n}. \quad (52)$$

Подставляя это в (49), мы замечаем, что при больших kR_1 можно ограничиться первым членом суммы, и в результате получаем:

$$\psi = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \left(1 + \frac{1}{n} \sqrt{8kR_1} e^{\frac{i\pi}{4} - w^2} \int_w^{i\infty} e^{u^2} du \right). \quad (53)$$

В частном случае, когда излучатель находится на границе раздела ($R = R_1$), мы получаем известную формулу Вейля-Ван дер Поля (см.¹⁰, стр. 105 или⁵, стр. 954):

$$\phi = \frac{2}{R} e^{ikR} \left(1 + \frac{1}{n} \sqrt{2kR} e^{\frac{i\pi}{4} - w^2} \int_w^{i\infty} e^{u^2} du \right) **).$$

7. Наглядное истолкование результатов. Пределы применимости геометрической оптики

В предыдущих параграфах мы видели, что поле в произвольной точке P составляется в основном из плоских волн, угол скольжения которых отличается от χ — угла скольжения луча, построенного по законам геометрической оптики, — лишь на малые величины.

Это находится в полном соответствии с известным результатом^{16, 17, 18}, согласно которому при отражении сферической волны от бесконечной отражающей плоскости существенную роль играет не вся плоскость, а лишь некоторая «эффективная зона» на ней. Последняя захватывает определённое число зон Френеля, построенных около луча, отражающегося по законам геометрической оптики. При этом

*) Т. к. $M(s_0) = 0$, то $M(s) = (s - s_0) M'(s_0) + \frac{1}{2} (s - s_0)^2 M''(s_0) + \dots$

и, следовательно,
$$\frac{s^2 - s_0^2}{M(s)} = \frac{s + s_0}{M'(s_0) + \frac{1}{2} (s - s_0) M''(s_0)}.$$

Здесь $M'(s_0) = \frac{dM(\alpha)}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds}$ и т. д.

**) Работа Ван дер Поля относится к 1931 г. Шулейкин ещё в 1923 г. получил формулу, дающую те же численные результаты²⁵.

часто считают^{17, 18}, что в качестве эффективной зоны можно брать первую зону Френеля и что остальные зоны не играют существенной роли. Можно показать, что это допустимо только в том случае, если рассматривается порядок величины поля в точке наблюдения P .

Согласно сказанному выше интервал углов, существенных при интегрировании плоских волн, равен по порядку величины $\frac{1}{\sqrt{kR_1}}$.

Можно показать, что при достаточно высоком расположении излучателя и приёмника над границей раздела угол в плоскости xz , под которым видна из приёмника первая зона Френеля, по порядку величины также равен $\frac{1}{\sqrt{kR_1}}$. Однако при приближении излучателя и

приёмника к границе раздела угол, под которым видна первая зона Френеля, непрерывно увеличивается, в то время как интервал существенных углов в методе перевала остаётся неизменным. В этом сказывается различие между методом зон Френеля, где суммируются сферические волны от вторичных излучателей на границе, и методом интегрирования плоских волн по Вейлю. Соображения, связанные с зонами Френеля, были использованы Е. Л. Фейнбергом¹⁹ в его работе относительно эффективной трассы радиоволны.

Обычный метод перевала применим в тех случаях, когда коэффициент отражения мало меняется при изменении угла в указанных пределах. В электродинамике в случае больших проводимостей нижней среды и малых углов скольжения это условие не выполняется, что и обуславливает необходимость применения модифицированного метода перевала. В самом деле, при $\alpha = 0$ согласно (8) $V = -1$ при любых m и n . Однако если m (равное в случае электродинамики n^2) велико, то уже при достаточно малых, но отличных от нуля α $V(\alpha) \cong +1$. Чем больше n^2 , тем короче интервал α , в пределах которого $V(\alpha)$ от -1 переходит практически к $+1$.

Из формулы (8) получаем, полагая $m = n^2$:

$$\left(\frac{dV}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \frac{2n^2}{\sqrt{n^2-1}}. \quad (54)$$

При увеличении $|n|$ растёт и производная, что означает, что при больших $|n|$ и достаточно малых α коэффициент отражения является весьма быстро меняющейся функцией. Это и естественно, так как в предыдущем параграфе было показано, что в этом случае в комплексной плоскости углов вблизи начала координат лежит полюс. Идея модифицированного метода перевала и заключается в том, чтобы перейти к функции, которая не имеет полюса вблизи точки перевала и поэтому является медленно меняющейся.

Заметим, что $\left(\frac{dV}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}$ согласно (54) велико также при n , близком к 1. В этом случае от значения $V = -1$ при $\alpha = 0$ коэффи-

циент отражения быстро падает до малых значений при α конечном. Здесь также неприменим обычный метод перевала *).

Рассмотрим теперь вопрос о том, когда можно пользоваться формулами геометрической оптики, получающимися в первом приближении метода перевала.

Второй член в (36) согласно (37) обращается тождественно в нуль, если $V = \text{const.}$, т. е. если коэффициент отражения не зависит от угла падения. Это имеет место, в частности, для абсолютно отражающих поверхностей, где $V = \pm 1^{**}$). Применимость геометрической оптики в этом случае хорошо известна, причём отражённую волну здесь удобно представлять как бы исходящей из воображаемого («мнимого») излучателя O' на рис. 2. В случае акустики коэффициент отражения не зависит от угла, кроме случаев полного отражения, также при $c = c_1$ ($n = 1$). Действительно, полагая в (8) $n = 1$ и учитывая, что $m = \frac{\rho_1}{\rho}$, получаем:

$$V = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 + \rho}.$$

В этом случае геометрическая акустика также является строго справедливой. Аналогичное положение имеет место также для некоторых случаев анизотропных сред.

Во многих практических случаях поправочный член в (30) хотя и не равен тождественно нулю, но даёт настолько малую добавку к суммарному полю прямой и отражённой волн, что ею можно пренебречь. Выведем критерий, показывающий, когда это можно делать.

Обратимся сначала к случаю, когда излучатель или приёмник (для определённости будем считать, что первый) находится на границе раздела. Тогда $R = R_1$, и условие малости поправочного члена в (36) по сравнению с суммой прямой $\frac{e^{ikR}}{R}$ и отражённой $V(\chi) \frac{e^{ikR}}{R}$ волн запишется:

$$kR |1 + V(\chi)| \gg |N|.$$

Отсюда, используя выражение (8) для $V(\chi)$ и выражение (38) для N , получаем для малых $\gamma = \sin \chi$:

$$kz \gg \left| \frac{m \sqrt{n^2 - 1}}{(m \sin \chi + \sqrt{n^2 - 1})^2} \right|. \quad (55)$$

*) Случай n , очень близких к 1, автором подробно рассмотрен в другом месте ²³.

**) Случай $V = -1$ реализуется, например, при отражении звуковой волны, идущей из воды на границу раздела вода — воздух.

Если χ настолько мало, что $m \sin \chi \ll \sqrt{n^2 - 1}$, (55) запишется:

$$kz \gg \left| \frac{m}{\sqrt{n^2 - 1}} \right|. \quad (56)$$

Таким образом, для применимости геометрической оптики необходимо, чтобы возвышение приёмника (излучателя) над границей раздела было достаточно велико по сравнению с длиной волны.

При $|m| \rightarrow \infty$ мы имеем переход к абсолютно отражающей границе, так как согласно (8) при этом $V \rightarrow 1$. В соответствии с этим правая часть (55) стремится к нулю, откуда и следует, что геометрическая оптика (акустика) справедлива в этом случае при любых значениях z .

Если ни излучатель, ни приёмник не находятся на границе раздела, то полученные критерии остаются приближённо справедливыми, но только вместо z будет входить сумма $z + z_0$, причём и $\sin \chi = \frac{z + z_0}{R_1}$.

8. Поле поднятого излучателя

В практических подсчётах напряжённости электромагнитного поля часто пользуются формулой, полученной впервые, повидимому, Гершельманом²⁰, а затем, другим методом, Ниссенем²¹. Эта формула относится к случаю поднятого излучателя и, когда этот излучатель является вертикальным диполем, имеет вид

$$\phi(z_0, x, z) = \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR_1}}{R_1} + \phi(0, x, z + z_0). \quad (57)$$

Здесь мы употребляем такой способ обозначения, когда первой в аргументе у ϕ стоит высота излучателя над границей раздела, а на втором и третьем местах — координаты точки наблюдения. Таким образом, чтобы получить для произвольной точки (x, z) вертикальную составляющую вектора Герца диполя, поднятого на высоту z_0 , нужно взять прямую волну и добавить к ней: а) волну, исходящую из мнимого излучателя, взятую с минусом, б) вертикальную составляющую вектора Герца диполя, находящегося на границе раздела, вычисленную не для точки (x, z) , а для вспомогательной точки $P'(x, z + z_0)$. Этот рецепт для вычисления поля поднятого диполя весьма полезен, но выглядит несколько «мистически». К тому же оба вывода формулы (57) весьма громоздки. По существу же формула (57) и следующий из неё рецепт могут быть получены из весьма наглядных соображений*).

*) Эти соображения возникли в совместной с Б. В. Малановым дискуссии вопроса.

Вертикальная составляющая вектора Герца в произвольной точке состоит из прямой и отражённой волн

$$\phi(z_0, x, z) = \frac{e^{ikR}}{R} + \psi_r(z_0, x, z). \quad (58)$$

Но, как видно из первоначального выражения (21) для отражённой волны, величины z и z_0 входят в неё только в виде суммы и, следовательно, она не изменится, если высоту излучателя уменьшить, а высоту приёмника увеличить на одну и ту же величину. Следовательно,

$$\psi_r(z_0, x, z) = \psi_r(0, x, z + z_0). \quad (59)$$

Это следует и из наглядных соображений, поскольку при таком изменении высот излучателя и приёмника не меняются ни суммарный набег фазы, ни угол падения на границу любой из плоских волн, из которых составляется поле отражённой волны. На рис. 7 это видно для волны, падающей на границу под углом скольжения χ . Из этого свойства отражённой волны сразу и вытекает формула (57). Действительно, отражённую волну при излучателе, расположенном на границе, т. е. $\psi_r(0, x, z + z_0)$, можно выразить через полное поле $\phi(0, x, z + z_0)$ для этого случая, так как полное поле является суммой прямой и отражённой волн:

$$\phi(0, x, z + z_0) = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} + \psi_r(0, x, z + z_0). \quad (60)$$

Здесь первый член представляет собой прямую волну. Расстояние от излучателя до приёмника равно здесь $CP' = R_1$ (рис. 7). Выразив отсюда $\psi_r(0, x, z + z_0)$ и подставив в (59), мы получим $\psi_r(z_0, x, z)$. Подстановка, в свою очередь, этого выражения в (58) и даёт формулу (57).

Изложенный вывод показывает, что формула (57) справедлива также и для звукового потенциала в случае излучателя, поднятого над границей раздела.

9. Боковые волны

Для того чтобы получить полное выражение для поля отражённой волны, к выражению (36) нужно добавить ещё один член, соответствующий так называемой боковой волне. Приведём сначала фор-

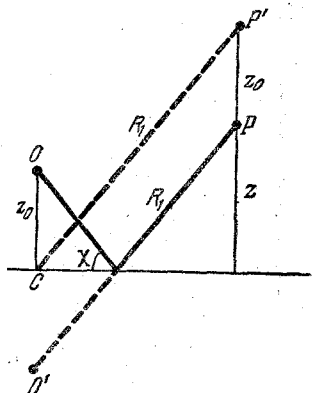


Рис. 7, показывающий, что длина отражённого луча R_1 и угол, под которым он отражается χ , не изменяются, если излучатель опустить, а приёмник поднять на одну и ту же величину.

мально-математические основания для этого и получим явное выражение для этого члена, а затем выясним его физический смысл.

В § 4 интегрирование по первоначальному пути Γ_1 мы заменили интегрированием по пути Γ (рис. 6). Как мы уже видели, выбор разных путей интегрирования физически означает не что иное, как представление одного и того же поля в виде наложения плоских волн, направляющие косинусы которых выбираются по разным законам. Внесём в это преобразование пути интегрирования некоторые коррективы.

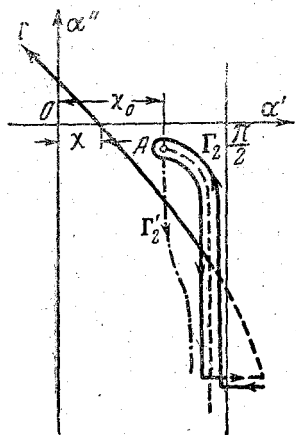


Рис. 8. Картина в комплексной плоскости, при наличии боковой волны. Боковая волна даётся интегралом по пути Γ_2 , идущему по берегам разреза.

Подинтегральная функция в (34) двухзначна, так как в $V(\alpha)$ входит корень $\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}$ [см. (8)], знак которого можно выбирать двояким образом. Для удобства рассуждений в таких случаях представляют себе два эквивалентных экземпляра плоскости α (два листа поверхности Римана), на каждом из которых подинтегральная функция будет принимать разные значения, соответствующие тому или другому выбору знака корня. Пусть на одном листе (назовём его «верхним») знак корня выбирается так, что $\text{Im} \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha} > 0$, а на другом («нижнем») $\text{Im} \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha} < 0$. Эти листы соединяются по линиям $\text{Im} \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha} = 0$, одна из которых, лежащая в интересующей нас области комплексной плоскости α , изображена на рис. 8 в виде пунктирной линии. Она начинается в точке A , где $\alpha = \arccos n$ (точка разветвления), и уходит в отрицательно-мнимую бесконечность, приближаясь к прямой $\alpha' = \frac{\pi}{2}$. При этом предполагается, что n обладает малой мнимой частью и $\text{Re } n < 1$.

Первоначальный путь интегрирования согласно условию (22) лежит на верхнем листе. Деформация его в перевальный путь интегрирования возможна только тогда, когда начало и конец перевального пути также будут лежать на верхнем листе.

Это не будет иметь места при таком положении точки разветвления, как на рис. 8. Здесь перевальный путь интегрирования пересекает пунктирную линию и, следовательно, переходит с одного листа на другой, так как мнимая часть корня $\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}$ при этом переходит через нуль и меняет знак. Чтобы избежать этой трудности, мы сконструируем путь интегрирования, как указано на рис. 8. От точки $\frac{\pi}{2} + \chi - i\infty$ он идёт до точки $\frac{\pi}{2} - i\infty$ и затем обходит

пунктирную линию. После этого он пересекает пунктирную линию и уже по нижнему листу идёт в точку $\frac{\pi}{2} + \chi - i\infty$, а оттуда по нормальному пути Γ , начальная часть которого, обозначенная пунктиром, лежит на нижнем листе. Теперь начало и конец пути интегрирования лежат на верхнем листе, но только к пути прибавляется интеграл по обеим сторонам пунктирной линии (интеграл по берегам разреза).

Таким образом, полное выражение для отражённой волны будет состоять из двух частей:

$$\psi_r = \psi'_r + \psi''_r, \quad (61)$$

где первая часть даётся интегралом по перевальному пути и была исследована выше [см. (36)], а вторая — выражением

$$\begin{aligned} \psi''_r = -\sqrt{\frac{k}{2\pi x}} e^{i\frac{\pi}{4}} & \left[\int_{\frac{\pi}{2} - i\infty}^{\chi_0} e^{ikR_1 \cos(\chi - \alpha)} V(\alpha) \sqrt{\cos \alpha} d\alpha + \right. \\ & \left. + \int_{\chi}^{\frac{\pi}{2} - i\infty} e^{ikR_1 \cos(\chi - \alpha)} V^+(\alpha) \sqrt{\cos \alpha} d\alpha \right] \quad (62) \end{aligned}$$

(сравни с (34); мы пренебрегаем $\frac{1}{kx}$ по сравнению с единицей). Здесь введено обозначение $\chi_0 = \arccos n$. $V^+(\alpha)$ отличается от $V(\alpha)$ тем, что в нём знак корня $\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}$ изменён на обратный*). Переставив пределы интегрирования в первом интеграле в (62), мы можем свести оба интеграла к одному, взятому от χ_0 до $\alpha = \frac{\pi}{2} - i\infty$, причём под интегралом будет стоять разность $V^+ - V$. Согласно (8) имеем:

$$V^+ - V = \frac{4m \sin \alpha \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}}{(m \sin \alpha)^2 - n^2 + \cos^2 \alpha}.$$

Все дальнейшие вычисления удобно производить методом быстрого спуска, аналогичным методу перевала. Для этого путь интегрирования деформируем таким образом, чтобы от точки разветвления $\alpha = \chi_0$ он шёл по линии, на которой фаза выражения $e^{ikR_1 \cos(\alpha - \chi)}$ остаётся постоянной, т. е. $\operatorname{Re} \cos(\alpha - \chi) = \text{const.}$ (путь Γ_2 на рис. 8).

Так как предполагается, что $kR_1 \gg 1$, то экспонента будет иметь существенное значение только в небольшой области вблизи

*) При обходе вокруг точки разветвления квадратный корень меняет знак (см., например¹³, § 92).

начала пути интегрирования, ширина которой порядка $\frac{1}{\sqrt{kR_1}}$ (см. выше, § 6). Разлагая, как и в методе перевала, оставшуюся часть под-интегрального выражения в ряд по степеням отклонения от точки разветвления (причём здесь нулевой член обращается в нуль), мы получаем после интегрирования:

$$\psi_r' = \frac{2 \operatorname{ine}^{ik} [nr + \sqrt{1-n^2} (z+z_0)]}{mkx^2 (1-n^2) (1-\operatorname{ctg} \chi_0 \operatorname{tg} \chi)^{3/2}}. \quad (63)$$

Приведённые результаты относятся к случаю, когда точка разветвления лежит справа от перевального пути интегрирования Γ (рис. 8), т. е. к случаю $\chi < \chi_0$. Луч, построенный по законам геометрической оптики, испытывал бы при этом полное внутреннее отражение. Если точка разветвления будет лежать слева от пути Γ , то последний будет дважды пересекать разрез, так что его начало и конец будут лежать на верхнем листе поверхности Римана. В результате надобность в интеграле, обходящем разрез, пропадает,

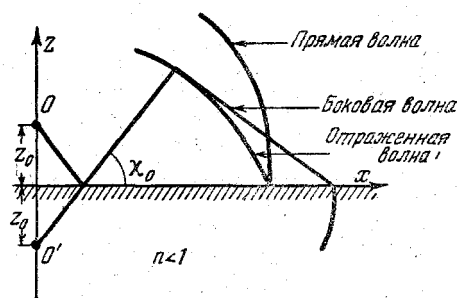


Рис. 9. Расположение фронта боковой волны по отношению к фронтам прямой и отражённой сферических волн для случая, когда скорость в нижней среде превышает скорость в верхней.

и всё решение для отражённой волны будет даваться исследованным в предыдущих параграфах интегралом по перевальному пути Γ . Таким образом, боковая волна представляет собой явление того же характера, что и полное внутреннее отражение в случае плоских волн, с тем отличием, что она имеет место не только при $n < 1$, но и при $n > 1$ (см. ниже).

Как видно из формулы (63), в плоскости r, z фронт боковой волны является прямолинейным (в пространстве он будет коническим) и нормальным к прямой, идущей из мнимого излучателя под углом χ_0 , как это изображено на рис. 9. Нижний край фронта боковой волны совпадает с краем фронта волны, распространяющейся в нижней среде со скоростью c_1 (рассматривается случай $c_1 > c$). Верхний её фронт сливается с фронтом отражённой волны. Формула (63) показывает, что амплитуда боковой волны убывает с расстоянием, как $\frac{1}{x^2}$, и возрастает при удалении от границы (при увеличении χ) из-за возрастания множителя $(1 - \operatorname{ctg} \chi_0 \operatorname{tg} \chi)^{-3/2}$. При $\chi = \chi_0$ формула (63) несправедлива. Этот случай будет рассмотрен в следующем параграфе.

Боковая волна, так же как и второй член в (36), представляет собой поправку к полю, вычисленному в приближении геометрической оптики [первый член в (36)]. Это видно хотя бы из того, что при $\lambda \rightarrow 0$ ($k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \infty$), что соответствует переходу к геометрической оптике, амплитуда боковой волны в (63) обращается в нуль. Несмотря на это, боковая волна допускает наглядное истолкование с помощью представлений, аналогичных представлениям геометрической оптики. Для этого нужно представить себе, что, кроме обычного луча, отражённого от границы под углом скольжения χ (луч OQP на рис. 10), в точку P из точки O попадает также луч, который падает на границу под углом полного внутреннего отражения χ_0 , распространяется затем по нижней среде вдоль границы раздела и, наконец, выходит снова в верхнюю среду опять под углом полного внутреннего отражения (луч $OCDP$). Для этого необходимо, конечно, в согласии с тем, что мы имели выше, чтобы $\chi < \chi_0$. У луча $OCDP$ есть то общее с обычным лучом OQP , что тот и другой соответствуют минимуму длины оптического пути (принцип Ферма).

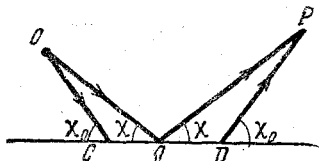


Рис. 10. Луч OQP соответствует отражённой сферической волне, луч $OCDP$ — боковой волне.

Действительно, можно показать, что набег фазы при распространении волны из O в P по лучу $OCDP$ будет меньше, чем для всех других возможных лучей, пути которых лежат частично в нижней среде*). Этот набег фазы будет также меньше, чем для луча OQP .

С волновой точки зрения возникновение боковой волны нужно представлять себе следующим образом.

В разложении сферической волны содержатся плоские волны, которые при падении на границу вызывают в нижней среде неоднородные волны, распространяющиеся вдоль границы. К числу таких плоских волн относятся, например, обычные плоские волны, имеющие угол скольжения $\alpha \leq \chi_0$. Все неоднородные волны в нижней среде, складываясь, на больших расстояниях дают волновой процесс, распространяющийся вдоль границы со скоростью c_1 и создающий на границе возмущение с пространственным периодом $\lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1}$. Это возмущение обуславливает появление в верхней среде новой волны. Однако, так как длина волны λ в верхней среде меньше, чем λ_1 ($\lambda = \lambda_1 \cos \chi_0$), то, чтобы иметь периодичность вдоль границы с периодом λ_1 , волна должна быть наклонена так, чтобы нормаль к её фронту образовывала с границей угол χ_0 . Именно таким образом и расположен фронт боковой волны.

*) См. §, гл. XII и, в частности, стр. 528.

Боковая волна для этого случая аналогична известной «головной волне» Маха, а угол χ_0 — углу Маха.

Несмотря на то, что боковая волна является лишь поправкой к геометрической оптике, в целом ряде случаев она играет основную роль. На её наблюдении, в частности, базируются некоторые методы в сейсмометрии (волна Минтропа).

В лабораторных условиях боковую волну наблюдал Шмидт²² при отражении звуковых волн от границы раздела двух жидкостей. На рис. 11 воспроизведена одна из его многочисленных фотографий, полученных при помощи метода Теплера.

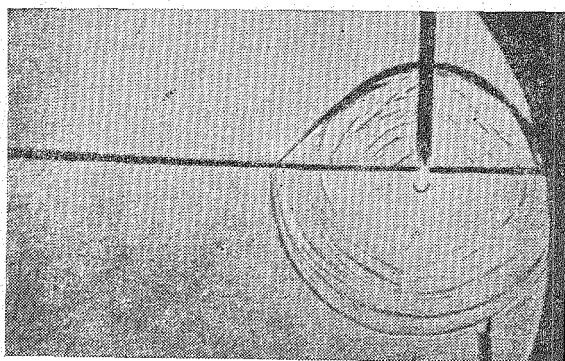


Рис. 11. Картина отражения сферической волны, полученная на опыте. Хорошо виден прямолинейный фронт боковой волны.

На снимке хорошо виден фронт боковой волны. Заметно также увеличение амплитуды этой волны вдоль фронта при удалении от границы раздела.

Аналогичным образом производится анализ интеграла по берегам разреза при $n > 1$ (скорость в нижней среде меньше). Получающееся аналитическое выражение для боковой волны будет совпадать с (63). Предположив в (63) $n > 1$, мы получаем волну с нормальным границе раздела фронтом, распространяющуюся вдоль неё со скоростью c_1 и экспоненциально затухающую в направлении z .

Возникновение боковой волны в этом случае объясняется при помощи таких же соображений, что и выше. Разница заключается только в том, что в этом случае волне, распространяющейся в нижней среде вдоль границы со скоростью c_1 , соответствует по закону преломления (7) в верхней среде не обычная волна с наклонным фронтом, а неоднородная волна. Этим и объясняется возникновение экспоненциального множителя, дающего затухание в направлении z .

Основную роль боковая волна играет в случае, когда излучатель и приёмник находятся в сильно поглощающей среде вблизи границы

со слабо поглощающей средой. Это имеет место, например, когда излучатель и приёмник радиоволн находятся в земле, вблизи её поверхности, на большом расстоянии друг от друга. В этом случае прямая и отражённая волны будут распространяться в земле и поэтому будут затухать. В результате остаётся боковая волна, которая проникает из земли в воздух, распространяется там и затем опять попадает в землю. Своим распространением сбоку от основной трассы, лежащей в земле, эта волна оправдывает своё название боковой.

Если под n понимать показатель преломления поглощающей среды по отношению к непоглощающей, то формула для вертикальной составляющей вектора Герца получится из (63) заменой n на $\frac{1}{n}$ и k на k_1 , так как верхняя и нижняя среды теперь поменялись ролями. При этом надо учесть, что $m = n^2$.

В результате получаем для вертикальной составляющей вектора Герца в этом случае

$$\psi = \frac{2in^2}{kx^2} \frac{e^{ik[x + \sqrt{n^2 - 1}(z + z_0)]}}{(n^2 - 1)(1 - \operatorname{ctg} \chi_0 \operatorname{tg} \chi)^{3/2}}, \quad (64)$$

где, как и выше, $\chi_0 = \operatorname{arccos} n$, однако теперь это комплексный угол, так как n комплексно.

Как мы видим, с расстоянием поле убывает пропорционально $\frac{1}{x^2}$, с углублением же излучателя и приёмника в поглощающую среду, как $e^{-x}(z + z_0)$, где $x = k \operatorname{Im} \sqrt{n^2 - 1}$.

Этот результат впервые, совершенно иным способом, был получен В. В. Владимирским и М. А. Леонтовичем.

В акустике аналогичное положение возникает, когда излучатель и приёмник звука высоких частот находятся в слое воды, содержащем воздушные пузырьки в достаточно большой концентрации. Здесь волны, распространяющиеся в самом слое, также быстро затухают. Выражение для звукового потенциала в этом случае получается из (64) заменой фактора $2in^2$ на $2i \frac{\rho_1}{\rho}$.

10. Поле в области, близкой к углу полного внутреннего отражения

Полученные в §§ 5, 9 результаты становятся несправедливыми, когда угол скольжения лежит достаточно близко к углу $\chi_0 = \operatorname{arccos} n$. Действительно, при $\chi = \chi_0$ амплитуда боковой волны (63) стремится к бесконечности, что лишено какого-либо физического смысла. Таким же образом, как нетрудно показать, ведёт себя и величина N в поправочном члене в (36); [из (38) этого не видно, так как в нём уже предположено $\chi \ll \chi_0$]. Объясняются эти особенности тем, что при χ , близком к χ_0 , пользование методом перевала становится

незаконным, так как подинтегральные функции в соответственных интегралах [например, в (21)] в этом случае не являются медленно меняющимися.

Расчёт боковой волны во всём интервале углов, где она существует, а также сферической отражённой волны при углах χ , близких к χ_0 , был произведён автором¹. Используя значение одного интеграла, вычисленное В. А. Фоком, выражения для обеих волн удалось найти через функции Вебера (функции параболического цилиндра). При этом требуется выполнение обычного условия $kR_1 \gg 1$. Получающиеся при этом выражения переходят в полученные выше выражения (36) и (63), если выполнено условие

$$kR_1 (\chi - \chi_0)^2 \gg 1, \quad (65)$$

т. е. если χ достаточно удалено от угла полного внутреннего отражения.

Не приводя общих, довольно громоздких выражений, укажем только, что в самой точке $\chi = \chi_0$ выражение для полного поля отражённой волны $\psi_r = \psi'_r + \psi''_r$, включая и боковую волну, фронт которой согласно рис. 9 здесь сливается с фронтом отражённой сферической волны, будет:

$$\psi_r = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} - \frac{2,32\pi e^{i(kR_1 + \frac{\pi}{8})}}{mR_1 (kR_1)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sin 2\chi_0}}. \quad (66)$$

При достаточно больших kR_1 вторым членом можно пренебречь. Оставшийся первый член, как и в (36), является полем, получающимся в приближении геометрической оптики (акустики), так как согласно (8) $V(\chi_0) = 1$. Однако даваемая вторым членом добавка к геометрической оптике убывает с расстоянием значительно медленнее, чем в (36), а именно, как $\frac{1}{(kR)^{\frac{1}{4}}}$, а не как $\frac{1}{kR_1}$.

Боковая волна ψ''_r при $\chi = \chi_0$ имеет конечное значение, равное половине второго члена в (66). Полные формулы, которых мы здесь не приводим, показывают, что при увеличении угла χ , начиная с $\chi = \chi_0$, отражённая волна имеет единый сферический фронт, что и видно на рис. 9; при уменьшении же χ , начиная от $\chi = \chi_0$, она делится на две части, одна из которых сохраняет сферический фронт, а другая часть, которую мы и называем боковой волной, имеет конический фронт, что опять же видно на рис. 9. При удалении χ от χ_0 амплитуда боковой волны непрерывно уменьшается. При достаточно больших $\chi - \chi_0$, когда выполняется условие (65), боковая волна даётся выражением (63). Если излучатель находится на границе раздела, то минимальный угол скольжения $\chi = 0$. Сравнивая получающееся при этом из формулы (63) значение с половиной второго

члена в (66), мы видим, что амплитуда боковой волны в этом случае у границы в

$$0,58 (kR_1)^{3/4} \frac{1-n^2}{n^2 \sqrt{\sin^2 \chi_0}} \quad (67)$$

(или по порядку величины в $(kR)^{3/4}$ раз меньше, чем при $\chi = \chi_0^*$).

II. ПРЕЛОМЛЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН

Поле преломлённых сферических электромагнитных и звуковых волн имеет практический интерес в ряде случаев, например, при вычислении поля радиоволн под землёй при излучающей антенне, находящейся в воздухе, при вычислении звукового поля под водой, создаваемого воздушным излучателем, и т. д. Поле преломлённых волн было исследовано в работах Крюгера⁴, Отта², Джерджоя²⁴ и автора¹⁵. Ниже результаты этих работ изложены в компактном виде, допускающем ясную физическую трактовку вопроса.

11. Поле преломлённой волны в приближении геометрической оптики

Через любую точку S в нижней среде проходит один из лучей, вышедших из излучателя O и преломившихся на границе по закону преломления геометрической оптики. На рис. 12 это — луч OTS . Он изображён для случая $n < 1$, т. е. $c_1 > c$. Углы скольжения χ и χ_1 , как мы знаем [см. (7)], связаны соотношением

$$n \cos \chi_1 = \cos \chi, \quad n = \frac{k_1}{k}. \quad (68)$$

Амплитуда волны в точке S в приближении геометрической оптики может быть подсчитана из условия сохранения энергии внутри лучевой трубки, а фаза — из оптической длины луча. Рассчитаем сначала фазу. Она равна

$$2\pi \left(\frac{OT}{\lambda} + \frac{TS}{\lambda_1} \right) = k \cdot OT + k_1 \cdot TS,$$

где k и k_1 — волновые числа, а OT и TS — длины отрезков, из которых состоит луч.

Для этих длин согласно рис. 12 мы имеем выражения

$$OT = \frac{z_0}{\sin \chi}, \quad TS = \frac{D}{\sin \chi_1},$$

где $D = -z$ — расстояние точки наблюдения S от границы раздела.

*) Здесь мы не останавливаемся на случае n , близких к 1, когда $\chi_0 \cong \sqrt{1-n^2}$ близко к нулю. Об этом см. в другом месте²³.

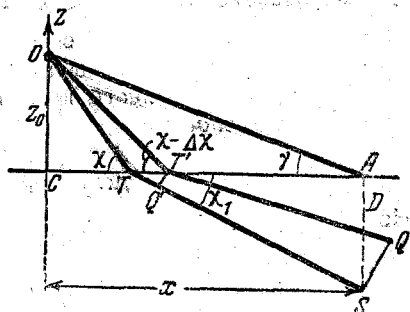


Рис. 12. Лучевая картина при преломлении сферической волны.

Учитывая закон преломления (68), получаем для набега фазы:

$$k \left(\frac{z_0}{\sin \chi} + \frac{n^2 D}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \chi}} \right). \quad (69)$$

Угол χ при заданном расположении излучателя и приёмника находится путём исключения χ_1 из уравнения (68) и уравнения

$$z_0 \operatorname{ctg} \chi + D \operatorname{ctg} \chi_1 = x, \quad (70)$$

геометрический смысл которого очевиден.

Для определения амплитуды волны в точке S построим луч $OT'Q$ (рис. 12), лежащий в плоскости OTS и падающий на границу под близким к χ углом скольжения $\chi - \Delta\chi$. Рассмотрим теперь лучи, заключённые между конусами, образованными вращением лучей OTS и $OT'Q$ вокруг оси z . Энергия, которую несут эти лучи, частично отражается на границе, частично проходит в нижнюю среду и распространяется там между TS и $T'Q$. Пусть амплитуда волны в точке T в нижней среде $A(T)$. Для определения $A(S)$ — амплитуды волны в S — необходимо установить зависимость между длиной отрезка SQ , который перпендикулярен к $T'Q$ в S , и длиной отрезка $T'Q'$, который перпендикулярен к той же линии в точке Q' . Поток энергии через оба кольца, образованных вращением $Q'T'$ и QS , одинаков. Следовательно, отношение амплитуд волны в точках T и S равно корню квадратному из обратного отношения площадей. Площадь кольца, образованного вращением $Q'T'$, равна $2\pi (CT)(Q'T')$, площадь же кольца, образованного вращением SQ , будет $2\pi x(SQ)$.

Следовательно,

$$\frac{A(S)}{A(T)} = \sqrt{\frac{(CT)(Q'T')}{x(SQ)}}. \quad (71)$$

Но

$$CT = z_0 \operatorname{ctg} \chi,$$

$$TT' = z_0 \frac{d\chi}{\sin^2 \chi},$$

$$Q'T' = TT' \sin \chi_1 = \frac{z_0 \sin \chi_1 d\chi}{\sin^2 \chi}. \quad (72)$$

SQ равно длине перпендикуляра $Q'T'$ у границы плюс добавочное расстояние, получающееся из-за вращення луча в плоскости падения:

$$SQ = Q'T' + TS d\chi_1 = Q'T' + D \frac{d\chi_1}{\sin \chi_1}. \quad (73)$$

$d\chi_1$ найдётся из уравнения (68), которое, будучи продифференцированным, даёт:

$$\sin \chi d\chi = n \sin \chi_1 d\chi_1.$$

Поле ψ_1 в точке T ниже границы раздела связано с полем ψ над границей граничным условием [см. (6)]

$$\psi_1 = \frac{1}{m} \psi.$$

Но над границей раздела амплитуда волны будет:

$$|\psi| = \frac{1}{R} [1 + V(\chi)]. \quad (74)$$

Подставляя это в предыдущую формулу и пользуясь (71), мы получим амплитуду волны в точке S . Учтя затем набег фазы, даваемый формулой (69), мы получаем после некоторых преобразований полное значение вертикальной составляющей вектора Герца или звукового потенциала в приближении геометрической оптики:

$$\psi_1(S) = \frac{2\sqrt{\cos \chi} e^{ik \left[\frac{z_0}{\sin \chi} + \frac{nD}{\sin \chi_1} \right]}}{\sqrt{x \left(z_0 \sin^{-3} \chi - \frac{1}{n} D \sin^{-3} \chi_1 \right) (m \sin \chi + n \sin \chi_1)}}, \quad (75)$$

где согласно (7)

$$\sin \chi_1 = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \cos^2 \chi},$$

а угол χ находится из уравнений (70) и (68).

Выражение (75) справедливо, если расстояния излучателя и приёмника от границы раздела достаточно велики по сравнению с длиной волны, что будет видно из более точного решения, приведённого в следующем параграфе.

12. Поправки к геометрической оптике для преломлённых волн

Более точное определение поля преломлённой волны можно провести, исследовав интеграл (21') методом перевала, аналогично тому, как это было сделано в § 5 для отражённой волны.

Для выяснения физического смысла получающихся при этом уточнений рассмотрим рис. 13, где изображены два случая преломления волн: для $n > 1$ и $n < 1$. В обоих случаях OTS представляет собой луч, построенный по законам геометрической оптики. Соответствующее ему выражение для вектора Герца или звукового потенциала даётся формулой (75).

Как и в случае отражённой волны, уточнение геометрической оптики идёт по двум линиям:

1. Учёт второго приближения в методе перевала, благодаря чему к выражению (75) прибавляется ещё один член следующего порядка малости по отношению к малым $\frac{1}{kR}$.

2. Появление волны нового типа, получающейся от интегрирования по берегам разреза и аналогичной боковой волне в случае отраженных волн. Перенос энергии от излучателя к приемнику этой волной производится путем существенно иным, чем в геометрической оптике. На рис. 13 это пути OMS . В случае (б) смысл этой волны особенно прост. Здесь она представляет собой хорошо известную, экспоненциально затухающую при углублении в нижнюю среду волну, получающуюся при отражении луча OM , падающего на границу раздела под углом, более скольльзящим, чем угол полного внутреннего отражения ($\cos \beta > n$). В случае (а) она получается вследствие того, что неоднородные, экспоненциально затухающие по z

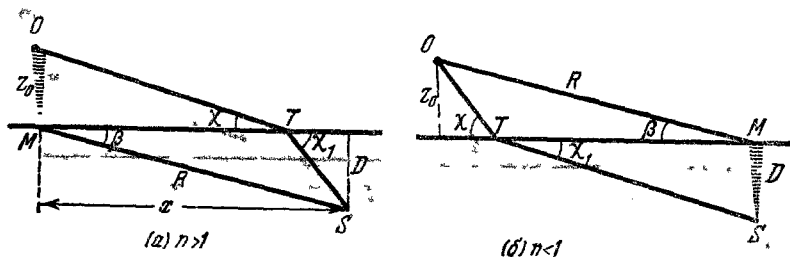


Рис. 13. Два пути, которыми энергия излучения попадает от излучателя O в точку S нижней среды: Путь OTS соответствует обычному лучу, построенному по законам геометрической оптики; путь OMS чужд геометрической оптике. Системой горизонтальных черточек изображается неоднородная волна.

плоские волны, присутствующие в разложении исходящей из O сферической волны (на рис. 13 они изображены системой горизонтальных черточек), падая на границу, возбуждают в нижней среде обычные плоские волны, распространяющиеся под всеми углами скольжения β , удовлетворяющими условию $\cos \beta > \frac{1}{n}$.

Заметим, что случай (а) получится из (б), если в последнем поменять местами излучатель и приемник.

Не приводя подробного исследования в комплексной плоскости, которое имеет совершенно такой же вид, как и в случае отраженных волн, выпишем окончательные результаты для вертикальной составляющей вектора Герца и звукового потенциала.

Случай $n > 1$. Выражение (75) в уточненном виде записывается:

$$\psi_1(S) = \frac{2}{x} e^{ik(x + D \sqrt{n^2 - \cos^2 \chi})} \left(\sqrt{\frac{x}{z_0}} \frac{\sin^{1/2} \gamma}{m \sin \chi + \sqrt{n^2 - \cos^2 \chi}} + \frac{im}{(n^2 - 1)kx} \right), \quad (76)$$

где предположено, что $\chi \ll 1$, $m\chi \ll \sqrt{n^2 - 1}$. Если учесть эти предположения также и в равенствах (68) и (70), то получаем:

$$\chi \simeq \frac{z_0}{x - \frac{D}{\sqrt{n^2 - 1}}}. \quad (77)$$

В тех случаях, когда есть смысл уточнять результат геометрической оптики, предположение о малости χ всегда выполняется.

Если в выражении (75) пренебречь $D \sin^{-3} \chi_1$ по сравнению с $z_0 \sin^{-3} \chi$ и преобразовать несложным образом экспоненту, то оно переходит в (76) при отброшенном втором члене в скобках, что и должно быть, так как этот член даёт поправку к геометрической оптике. При $\chi \rightarrow 0$, когда первый член, соответствующий геометрической оптике, исчезает, второй (поправочный) член становится основным.

К выражению (76) нужно добавить также ещё волну типа боковой волны, получающуюся от интегрирования по берегам разреза в комплексной плоскости. Она имеет место только при достаточно малых углах β (рис. 13), удовлетворяющих условию $\cos \beta > \frac{1}{n}$.

Её аналитическое выражение имеет вид

$$\frac{2n}{R} e^{ik_1 R - kz_0 \sqrt{n^2 \cos^2 \beta - 1}} \left[\frac{\sin \beta}{n \sin \beta + im \sqrt{n^2 \cos^2 \beta - 1}} + \frac{i}{m(1 - n^2)kR} \right], \quad (78)$$

где $R = \sqrt{x^2 + D^2}$.

Как мы видим, амплитуда этой волны экспоненциально убывает при удалении излучателя от границы раздела.

В случае $n < 1$ соответственные формулы будут:

$$\psi_1(S) = \frac{2n}{x} e^{ik_1 x + ik z_0 \sin \chi} \left[\sqrt{\frac{x}{z}} \frac{\sin^{3/2} \chi_1}{n \sin \chi_1 + m \sqrt{1 - n^2 \cos^2 \chi_1}} + \frac{i}{m^2(1 - n^2)kx} \right]. \quad (79)$$

При этом предполагается, что $\chi_1 \ll 1$ и $n\chi_1 \ll m\sqrt{1 - n^2}$. Из уравнений (68) и (70) имеем:

$$\chi_1 \simeq \frac{D}{x - \frac{nz_0}{\sqrt{1 - n^2}}}. \quad (80)$$

Добавочная волна типа боковой волны, имеющая место при $\cos \beta > n$, будет:

$$\frac{2}{R} e^{ikR - kD} \sqrt{\cos^2 \beta - n^2} \left[\frac{\sin \beta}{m \sin \beta + i \sqrt{\cos^2 \beta - n^2}} + \frac{im}{kR(n^2 - 1)} \right], \quad (81)$$

где $R = \sqrt{x^2 + z_0^2}$.

При этом предположено, что $m\beta \ll \sqrt{1 - n^2}$. Если, наоборот, $m\beta \gg \sqrt{1 - n^2}$, то для второго члена в скобках получилось бы $2/kRm^2\sqrt{1 - n^2} \sin^3 \beta$.

Из рис. 13 видно, что один случай переходит в другой при замене $z_0 \rightleftharpoons D$, $n \rightarrow \frac{1}{n}$, $m \rightarrow \frac{1}{m}$, $\chi \rightleftharpoons \chi_1$. Отсюда следует, что при такой замене формулы (76) и (78) должны переходить соответственно в формулы (79) и (81) и обратно. Это действительно имеет место, в чём нетрудно убедиться. При этом надо ещё учесть необходимость деления на m каждой из формул при такой замене, что вытекает, например в акустике, из того, что здесь мы основываемся на принципе взаимности, справедливом для звукового давления, в то время как ϕ у нас означает звуковой потенциал, отличающийся от давления множителем ρ в верхней среде и ρ_1 — в нижней.

Получив более точные выражения для вектора Герца и звукового потенциала, мы можем из них определить границы применимости приближения геометрической оптики.

В случае $n > 1$ из условия пренебрежимости вторым членом в скобках в (76), как и в § 7, получаем:

$$kz_0 \gg \frac{m}{\sqrt{n^2 - 1}}. \quad (82)$$

Таким образом, для применимости геометрической оптики необходимо, чтобы возвышение излучателя над границей раздела было достаточно велико по сравнению с длиной волны. Заметим, что при увеличении z_0 стремится к нулю также амплитуда волны (78), что и должно быть, так как в геометрической оптике эта волна не имеет места.

Аналогично, в случае $n < 1$ условие малости второго члена в (79) по сравнению с первым даёт:

$$kz \gg \frac{1}{m \sqrt{1 - n^2}}. \quad (83)$$

Это и является условием применимости геометрической оптики для этого случая.

Таким образом, для применимости геометрической оптики при $n > 1$ необходимо, чтобы излучатель был достаточно далеко удалён от границы, положение же приёмника существенной роли не играет (однако напоминаем, что рассматривается случай $z \ll x$, $z_0 \ll x$). При $n < 1$, наоборот, необходимо, чтобы достаточно далеко от границы был удалён приёмник.

13. Случай, когда одна из сред обладает заметным поглощением

Рассмотрим случай, когда приёмник находится в поглощающей, а излучатель в непоглощающей средах. В электродинамике этот случай реализуется при расположении приёмной антенны в земле или морской воде. В гидракустике положение, аналогичное этому, возникает, если приёмник расположен в воде, насыщенной пузырьками.

При достаточно большом удалении излучателя и приёмника от границы раздела задача решается элементарно при помощи геометрической оптики (см. формулу (75), в которой n нужно считать комплексной величиной, что, как известно, и соответствует наличию поглощения). Мы будем рассматривать случай, когда эти удаления невелики по сравнению с длиной волны.

При наличии поглощения в нижней среде из двух рассмотренных выше волн заметной амплитудой в точке приёма будет обладать только та волна, которая основную часть своего пути идёт в верхней, непоглощающей среде. Это будет волна OTS в случае (а) и волна OMS в случае (б) (рис. 13).

Таким образом, в этих двух случаях вектор Герца, или звуковой потенциал, будет даваться соответственно формулами (76) и (81). Последние разнятся друг от друга только тем, что в одну входит угол χ , а в другую β . Однако если в формуле (77) для χ пренебречь z по сравнению с x , то получим $\chi \cong \frac{z_0}{x} \cong \beta$.

Таким образом, для нашего случая

$$m\psi_1(x, D) = \frac{2}{R} e^{ikR + ikD\sqrt{n^2 - \cos^2 \chi}} \left[\frac{\sin \chi}{m \sin \chi + \sqrt{n^2 - \cos^2 \chi}} + \frac{im}{(n^2 - 1)kR} \right], \quad (84)$$

где $\sin \chi \cong \frac{z_0}{x}$.

Вид формулы (84) позволяет сделать относительно поля в поглощающей среде одно важное замечание. Воспользуемся формулами (15), (36) и (38) и вычислим поле $\phi(x, 0)$ в верхней среде около самой границы раздела ($z=0$). Сделав соответствующие пренебрежения и сравнив полученный результат с выражением (84), мы получаем:

$$m\psi_1(x, D) = \phi(x, 0) e^{-kD\sqrt{\cos^2 \chi - n^2}}.$$

Эта формула простым образом связывает поле в нижней среде в точке S (рис. 12) с полем в верхней среде, взятым на самой границе раздела (точка A). Она показывает, что углубление приёмника сказывается только на множителе $e^{-kD \sqrt{\cos^2 \chi - n^2}}$. Взяв модуль от обеих частей последней формулы, получаем такой закон спадания амплитуды волны при углублении

$$m|\phi_1(x, D)| = |\phi(x, 0)| e^{-\kappa D}, \quad (85)$$

где

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{Re} \sqrt{\cos^2 \chi - n^2}.$$

Эту формулу впервые получили М. А. Леонтович и В. В. Владимирский.

В акустике формула (85), согласно (3) может быть переписана непосредственно для звукового давления:

$$|p_1(x, D)| = |p(x, 0)| e^{-\kappa D}. \quad (86)$$

Аналогично, в электродинамике вместо формулы (85) можно пользоваться непосредственно формулами для компонент поля, которые имеют вид¹⁵

$$|n|^2 |E_{1z}(x, D)| = |E_z(x, 0)| e^{-\kappa D}, \quad (87)$$

$$|E_{1x}(x, D)| = |E_x(x, 0)| e^{-\kappa D}, \quad (88)$$

и аналогичная (88) формула для H .

Заметим, что результаты, которыми мы здесь пользовались [в частности, соотношение (36)], справедливы только при условии, что полюс не лежит слишком близко к точке перевала (см. § 6). Это означает, что при заданных параметрах сред длина волны не должна быть слишком велика. Однако при помощи модифицированного метода перевала, изложенного в § 6, можно показать¹⁵, что формулы (85), (87) и (88) справедливы в любом случае.

14. Звуковое поле в воде от излучателя, находящегося в воздухе

Звуковое поле в воде, создаваемое излучателем, находящимся в воздухе, может быть вычислено по формулам (79) и (81), причём для этого частного случая $m \cong 800$, $n \cong \frac{2}{9}$. Так как m очень велико, то вторыми членами в скобках в (79) и (81) можно пренебречь [см. сказанное после формулы (81)].

В результате звуковой потенциал оказывается состоящим из двух частей. Первая соответствует геометрической акустике и имеет, согласно формуле (79) при учёте также формулы (80), следующую амплитуду:

$$|\psi_1(x, D)| = \frac{2nD}{m \sqrt{x(1-n^2)} \left(x - \frac{nz_0}{\sqrt{1-n^2}}\right)^{3/2}} \quad (89)$$

Вторая часть звукового потенциала отлична от нуля только при выполнении условия

$$\cos \beta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z_0^2}} > n, \text{ т. е. } \beta < 77^\circ.$$

Из (81), предполагая, что $m\beta \gg 1$, получаем для амплитуды этой части поля:

$$\frac{2e^{-kD \sqrt{\cos^2 \beta - n^2}}}{m \sqrt{x^2 + z_0^2}} \quad (90)$$

Мы видим, что эта часть звукового потенциала при углублении в воду экспоненциально затухает. Однако при малых D амплитуда этой волны может во много раз превышать амплитуду волны (89), соответствующей геометрической оптике.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Бреховских, Отражение сферических волн от плоской границы раздела двух сред, ЖТФ 18, 455 (1948).
2. H. Ott, Reflexion und Brechung von Kugelwellen; Effecte 2. Ordnung. Ann. der Physik 41, 443 (1942).
3. H. Ott, Die Sattelpunktmethode in der Umgebung eines Pols. Ann. der Physik 43, 393 (1943).
4. M. Krüger, Die Theorie der in endlicher Entfernung von der Trennungsebene Zweier Medien erregten Kugelwellen, Zeits. f. Physik, 121, 377 (1943).
5. Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937, гл. XXIII, отредактированная В. А. Фоком.
6. М. А. Леонтович, Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли, Изв. АН СССР, сер. физ. 7, 16 (1944).
7. H. Weil, Ausbreitung electromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter, Ann. d. Physik 60, 481 (1919).
8. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, стр. 487, Гостехиздат, 1946.
9. В. А. Фок, Законы отражения Френеля и законы дифракции, УФН 36, 308 (1948).
10. Б. А. Введенский, Основы теории распространения радиоволн, ОНТИ, 1934.

11. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1, стр. 501, ГТТИ, 1933.
 12. М. А. Леонтович, Статистическая физика, стр. 212.
 13. В. И. Смирнов, Курс высшей математики для физиков и техников, т. III, ОНТИ, 1934.
 14. В. А. Фок, Диффракция радиоволн вокруг земной поверхности, Изд. АН СССР, М.—Л., 1946.
 15. Л. М. Бреховских, Поле преломлённых электромагнитных волн в задаче о точечном излучателе, Изв. АН СССР, сер. физ. 12, 322 (1948).
 16. Л. Бреховских, Пределы применимости некоторых приближённых методов, употребляемых в архитектурной акустике, УФН 32, 464 (1947).
 17. Б. А. Введенский и А. Г. Аренберг, Вопросы распространения ультракоротких волн, Советское радио, М., 1947.
 18. К. А. Нортон и А. С. Омберг, Максимальная дальность действия радиолокационной станции, Советское радио, М., 1947.
 19. Е. Л. Фейнберг, Об «эффективной трассе» земного луча радиоволн, Изв. АН СССР, сер. физ. 8, 133 (1944).
 20. H. Hörschelmann, Jharb. der dr. Telegr. 5, 14 (1911).
 21. K. F. Niessen, Über die entfernten Raumwellen eines vertikalen Dipol-senders, Ann. d. Physik 18, 893 (1933).
 22. O. Schmidt, Über Knallwellenausbreitung in Flüssigkeiten und festen Körpern, Phys. Zeits. 39, 868 (1938).
 23. Л. Бреховских, Отражение сферических волн от «слабых» границ раздела, ЖФТ 18, 473 (1948).
 24. F. Gerjuoy, Refraction of waves from a Point Source into a medium of a higher Velocity, Phys. Rev. 73, 1442 (1948).
 25. М. В. Шулейкин, Курс радиотехники. М. 1923 (литогр.) См. также М. И. Пономарёв, Изв. А. Н. СССР, сер. техн. наук, № 9, 1191 (1947).
-