

К ТРИДЦАТИЛЕТИЮ СОВЕТСКОЙ ФИЗИКИ

НЕКОТОРЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ, ПРОВЕДЁННЫЕ В СССР, НАЧИНАЯ С 1935 г.

Н. Д. Папалекси, **А. А. Андронов**, **Г. С. Горелик**,
С. М. Рытов

За последние десять лет положение в области нелинейных колебаний существенно изменилось*). Если до того времени область нелинейных колебаний, несмотря на пионерские работы Б ван дер Поля, Эппльтона и других исследователей, была еще мало развита и известна, то в настоящее время можно смело сказать, что необходимость применения нелинейной теории и нелинейной трактовки для самых разнообразных колебательных задач, возникающих в различных областях современной техники, получила широкое признание не только в научных, но и в инженерных кругах. Наряду с радио и акустикой, теория нелинейных колебаний получила права гражданства в электротехнике, в авиатехнике и в технике автоматического регулирования, о которой речь будет идти особо.

Именно это расширение области применения теории нелинейных колебаний является наиболее яркой чертой исследований последних лет. Несомненно, что находящееся в нашем распоряжении теоретическое вооружение стало более совершенным и эффективным по сравнению с 1935 г., но принципиально новых идей оно не содержит.

Перечислим кратко основные элементы этого вооружения.

1. Качественная (топологическая) теория дифференциальных уравнений, созданная А Пуанкаре², и даваемые ею геометрические образы (в фазовом пространстве) различных типов движений динамических систем, как, например, предельный цикл, изображающий установившиеся колебания³. Исследование автоколебаний с помощью этой теории привело к новому математическому понятию «грубых систем»⁴.

2. Теория разложения в ряд по малому параметру, развитая в связи с проблемами небесной механики (Эйлер,

*) Обзор работ, выполненных до 1935 г., см. например, ¹.

Лагранж, Пуассон, Тиссеран, Линдштедт, Пуанкаре и др.), которая позволяет вычислять периодические движения, а также и метод медленно меняющихся коэффициентов (или метод ван дер Поля, который первый применил его к радиофизическим задачам).

Эти количественные методы применимы в самой простой их форме в наиболее важном для радиофизики случае почти синусоидальных колебаний.

3. Методы исследования устойчивости движения, основанные на работах Пуанкаре и Ляпунова^{6,7}.

4. Метод припасовывания, который заключается в том, что входящая в задачу нелинейная зависимость (характеристика лампы, сервомотора и т. п.) аппроксимируется рядом прямолинейных отрезков и задача сводится к «сшиванию», с помощью определенных условий непрерывности, решений различных систем линейных уравнений, справедливых в различных частях фазового пространства.

Этот метод оказался особенно эффективным для трактовки систем, движения которых нельзя считать приблизительно синусоидальными; такие системы представляют особый интерес для теории автоматического регулирования.

5. Наконец — и это является отнюдь не маловажным — новый физический язык, адекватный свойствам нелинейных систем и совершенно отличный от обычного линейного языка; новый нелинейный язык вырабатывался одновременно с тем, как физики овладевали только что перечисленными математическими методами и создавали соответствующие им наглядные представления.

СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Напомним прежде всего некоторые результаты, изложенные в докладе 1935 г.

Исходя из существования «периодических решений второго рода» Пуанкаре⁶, с периодом, кратным периоду действующей силы, Л. И. Мандельштам и один из нас (Н. Д. Папалекси) пришли к выводу о возможности возбуждения и поддержания в регенерированной системе, работающей в определенном режиме и находящейся под действием гармонической э. д. с., колебаний кратного периода, соответствующих решению второго рода. Теория этих явлений охватила собой не только собственно «резонанс второго рода», имеющий место в несамовозбужденной регенерированной системе, но и целый ряд явлений, наблюдающихся в самовозбужденной системе под действием одной или нескольких гармонических э. д. с.

Сюда относятся: синхронизация на оберitone⁷, явление тушения колебаний^{8,9}, автопараметрические или дробные резонансы¹⁰, комби-

национные резонансы ^{11,12}, а также явление так называемого «асинхронного возбуждения» ^{9, 3, 14, 5}.

Теми же авторами была развита теория параметрической генерации колебаний (посредством периодического изменения параметра — ёмкости или самоиндукции) в системах с малой глубиной модуляции и малой нелинейностью ¹⁶ и выяснены многие характерные явления, имеющие место при этом новом способе получения электрической энергии механическим путём.

С помощью сочетания указанных выше количественных и качественных методов были исследованы остававшиеся не выясненными вопросы, касающиеся поведения регенеративной системы как невозбуждённой, так и самовозбуждённой под действием внешней гармонической э. д. с., в частности, спорный вопрос о существовании при синхронизации порога для амплитуды внешней гармонической э. д. с.

Во всех перечисленных задачах метод возмущений или метод малого параметра, так же как и метод ван дер Поля, применимы в предположении, что в «нулевом приближении» рассматриваемые системы линейны и консервативны, т. е. что в их дифференциальных уравнениях нелинейные члены, линейные неконсервативные члены (затухание) и члены, содержащие периодические параметры, достаточно малы.

Рассмотрим в качестве примера колебательный контур с переменной ёмкостью, изменяющейся по закону

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0}(1 + m \cos 2\omega t),$$

и нелинейным сопротивлением $R = R_0(1 + \gamma q^2)$, настроенный приблизительно на частоту ω .

Мы можем тогда написать дифференциальное уравнение, описывающее эту систему, в виде

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = (\omega^2 - \omega_0^2) q - 2\delta_0 \left[\frac{dq}{dt} + \gamma \left(\frac{dq}{dt} \right)^3 \right] - m\omega^2 \cos 2\omega t \cdot q \quad (1)$$

или

$$\ddot{q} + q = -\mu \Delta q - 2\mu \delta_0 (\dot{q} + \gamma \dot{q}^3) - \mu \cos 2\tau \cdot q, \quad (2)$$

где

$$\mu \Delta = \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega^2}; \quad 2\mu \delta_0 = \frac{R_0}{L\omega}; \quad \mu = m, \text{ а } \tau = \omega t.$$

Мы считаем эти величины малыми — порядка малости μ . Тогда, согласно Пуанкаре ⁶, искомое периодическое решение уравнения (2) будет мало отличаться от одного из решений уравнения

$$\ddot{q} + q = 0, \quad (3)$$

и его можно будет представить в виде ряда по степеням μ , причём член с нулевым показателем μ будет одним из решений уравнения (3), которое мы поэтому называем «нулевым» или исходным решением.

Такая трактовка позволила обнаружить ряд новых свойств систем с периодически изменяющимися параметрами. Сюда относятся, например, явления в параметрически связанных системах, исследование которых привело к созданию нового типа мотора с плавной регулировкой числа оборотов¹⁷; второй параметрический резонанс для отношения частот 1:1¹⁸; явления параметрической регенерации^{19,20,21} и комбинационные параметрические резонансы, имеющие место в связанных системах²².

Однако для практически важных случаев параметрического генерирования переменных токов развитая теория оказалась в количественном отношении недостаточной. Дело в том, что величина мощности и к. п. д. параметрических генераторов растут с величиной глубины модуляции параметра и практически ни глубину модуляции параметра, ни затухание, ни расстройку $\omega^2 - \omega_0^2$ нельзя считать малыми и, следовательно, нельзя также рассматривать исходную систему как томсоновскую, т. е. брать в качестве исходного решения синусоиду для случая системы с одной степенью свободы или сумму синусоид для систем со многими степенями свободы.

Это привело несколько лет назад Л. И. Мандельштам к развитию применительно к этим случаям новой формы метода малого параметра, где—и это вполне естественно—исходным приближением является периодическое решение некоторого линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами.

Вернёмся к рассмотренному выше случаю колебательной системы с периодически изменяющейся ёмкостью. Уравнение системы (1) может быть представлено в таком виде:

$$\ddot{q} + 2\vartheta_1 \dot{q} + \frac{\omega_1^2}{\omega^2} (1 + m_1 \cos 2\tau) q = \\ = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega^2} q - 2(\vartheta - \vartheta_1) \dot{q} - 2\vartheta \gamma \dot{q}^3 + \left(\frac{\omega_1^2}{\omega^2} m_1 - m \right) \cos 2\tau \cdot q. \quad (4)$$

Если здесь, с одной стороны, выбрать ϑ_1 , m_1 и $\frac{\omega_1^2}{\omega^2}$ так, чтобы линейное уравнение

$$\ddot{q} + 2\vartheta_1 \dot{q} + \frac{\omega_1^2}{\omega^2} (1 + m_1 \cos 2\tau) q = 0 \quad (5)$$

имело периодическое решение и, с другой стороны, $\frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega^2} = -\mu\Delta$, $2(\vartheta - \vartheta_1) = \mu\vartheta_0$ и $m - m_1 = \mu$ были малыми величинами порядка μ ,

причём величина γ , определяющая нелинейность системы, тоже была бы мала, то тогда, следуя Пуанкаре, можно показать, что приближённое периодическое решение уравнения (4) будет лежать вблизи периодического решения уравнения (5).

В самое последнее время Л. И. Мандельштам развил основанную на только что изложенной идее теорию приближённого решения системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами для любой глубины модуляции и малой нелинейности²³.

Эта теория была затем применена к конкретным случаям параметрического генерирования переменных токов.

Упомянем также работы Г. С. Горелика²⁴ и С. М. Рытова²⁵ о нестационарных процессах в системах с периодически меняющимися параметрами, где распространён и обобщён в применении к таким системам метод медленно меняющихся коэффициентов (метод ван дер Поля).

Наряду со случаями, когда параметры меняются с периодом, сравнимым по порядку величины с (средними) собственными периодами системы, был глубоко проанализирован и тот случай, когда период изменения параметров очень велик. Этот специальный вид воздействия даёт начало колебаниям, которые обычно называют модулированными. Следуя релеевскому определению модулированного колебания (approximately simple) как колебания, медленно уклоняющегося от гармонического, С. М. Рытов дал общую трактовку ряда как кинематических, так и динамических вопросов модуляции²⁶.

В этом исследовании можно отметить два момента.

1. К вопросам модуляции последовательно применяется метод возмущений. Малый параметр μ вводится при этом как множитель при независимом переменном t . Модулированное колебание записывается в виде

$$s = A(\mu t) e^{i[\omega t + \varphi(\mu t)]}, \quad \mu \ll \omega.$$

Таким образом $\frac{dA}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt}$ имеют порядок μ , т. е. A и φ тем более близки к постоянству, чем меньше μ . Различного рода задачи о системах с модулированными параметрами приводятся к уравнениям, коэффициенты которых зависят от t через μt . Для решения таких задач развит метод медленных возмущений, в котором нулевым приближением является квазистационарное решение. Последнее представляет собой решение стационарной задачи ($\mu = 0$), но с заменой произвольных постоянных медленными функциями t . Вид этих функций определяется из анализа последующих приближений, причём способы, служащие для этой цели, различны в зависимости от характера задачи. Применительно к

нелинейным системам, близким к томсоновским, описанная процедура повторяет, конечно, метод ван дер Поля, но для линейных модулированных систем вид нулевого приближения устанавливается иначе (из условий ортогональности).

Метод медленных (но не обязательно малых) возмущений существенно дополняет обычный метод малых (α в остальном произвольных) возмущений.

2. Дается весьма естественное обобщение понятия модуляции, т. е. медленного отклонения от синусоидальности, на пространственные и пространственно-временные (волновые) задачи. Этим задачам соответствуют дифференциальные уравнения в частных производных, у которых коэффициенты или граничные условия содержат параметры, зависящие от μx , μy , μz и μt . Возможны, конечно, и различные порядки малости по одной или нескольким координатам.

По отношению к волновому уравнению эта постановка вопроса охватывает и обычный переход к приближению геометрической оптики (если пространственно модулирован коэффициент в самом уравнении, т. е. скорость распространения), и дифракцию на достаточно плавных структурах (если пространственно модулированы граничные условия). Применение метода медленных возмущений к уравнениям Максвелла в случае неоднородной среды позволило получить в приближении геометрической оптики, наряду с законом сохранения светового потока, закон изменения поляризации вдоль луча, а именно:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T},$$

где φ —угол между электрическим вектором и главной нормалью к лучу, s —длина дуги, отсчитанная вдоль луча, и T —радиус кривизны луча.

Перейдем теперь к другой группе теоретических исследований, относящихся к методу малого параметра.

В последнее время оказалось возможным расширить круг проблем, решаемых этим методом, введением при математической формулировке некоторых задач не только «больших» величин нулевого порядка ($\mu^0=1$) и «малых» величин положительных порядков, но и «очень больших» величин отрицательных порядков ($1/\mu$, $1/\mu^2$ и т. д.). С формальной стороны это не меняет метода малого параметра, но с физической точки зрения оперирование «очень большими» величинами не тривиально и в ряде случаев оказывается полезным.

Дело в том, что физические соображения большей частью подсказывают нам соотношения порядков величин. Вопрос же о том, какие именно величины считать неизменными при $\mu \rightarrow 0$, т. е. принять за величины нулевого порядка, является делом произволь-

ного соглашения. Каждое из возможных соглашений такого рода равносильно определённому выбору вида рассматриваемой системы в нулевом приближении ($\mu=0$). Поэтому все подобные выборы, будучи формально эквивалентны друг другу, не равноценны в отношении обсуждаемой физической модели¹⁷.

Именно на этом пути удалось поставить и разрешить задачу о стабилизации частоты лампового генератора с помощью стабилизаторов (кварца, камертона, объёмного резонатора).

Ламповый генератор, связанный с кварцем, ведёт себя существенно иначе, чем генератор с двумя обычными контурами, как при сильной, так и при слабой связи. Таким образом уже при самой постановке задачи о стабилизации частоты в методе малого параметра необходимо с самого начала отразить характерные особенности кварца (контур 2-й), отличающие его от обычного контура (1-го). Такой особенностью стабилизатора является чрезвычайно большое значение $\sqrt{L_2/C_2}$. Если принять $\sqrt{L_2/C_2} \sim \mu^{-1}$, то ввиду $\sqrt{L_2 C_2} \sim 1$ получается: $L_2 \sim \mu^{-1}$, $C_2 \sim \mu$, т. е. индуктивность кварца оказывается «очень большой» величиной. Благодаря этому уравнения для токов I_1 и I_2 (соответственно в контуре генератора и в эквивалентном контуре кварца) принимают вид *)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{I}_1 + I_1 &= -\mu\theta_1 \dot{I}_1 - \mu\chi_1 \ddot{I}_2 + \mu I_a - \mu\Delta I_1, \\ \ddot{I}_2 + I_2 &= -\mu^2\theta_2 \dot{I}_1 - \mu^2\chi_2 \ddot{I}_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Характерной особенностью уравнений (6), обусловленной введением $L_2 = 1/\mu$, является асимметрия порядков малости не только декрементов, но и коэффициентов связи. Это обстоятельство и даёт возможность построить с помощью метода малого параметра строгую нелинейную теорию стабилизации частоты^{**}). Кроме того, получается некоторая наглядная картина процессов при стабилизации. А именно, если учитывать члены уравнений (6), не содержащие μ (нулевое приближение), то мы получаем два независимых линейных консервативных осциллятора, колеблющихся с одинаковой частотой. При учёте членов с μ (первое приближение) мы имеем самовозбуждённый генератор, на который почти в резонанс (расстройка $\mu\Delta$) действует сила $-\mu\chi_1 \ddot{I}_2$, т. е. получается задача о захватывании. Источником

¹⁷) Здесь также введено безразмерное время $\tau = \omega t$, причём $\omega = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ есть частота кварца. Декременты $\mu\theta_1$, $\mu^2\theta_2$ и коэффициенты связи $\mu\chi_1 = \mu/L_1$, $\mu^2\chi_2 = M/L_2$ имеют разные порядки, так как сопротивления R_1, R_2 порядка μ , а коэффициент взаимной индукции $M \sim \mu$ ($L_1 \sim 1$, $L_2 \sim 1/\mu$).

^{**}) Эта теория развита и количественно подтверждена на опыте для основных схем стабилизации (затягивания и осцилляторной) в²⁸. Кроме того, в²⁹ метод малого параметра развит в общем виде для систем с двумя степенями свободы, уравнения которых содержат члены различных порядков малости.

«силы является второй осциллятор, попрежнему независимый и консервативный. Наконец, при учёте членов второго порядка одновременно входят в игру затухание кварца и поддерживающее колебания в кварце воздействие со стороны генератора. Таким образом взаимодействие асимметрично: генератор действует на кварц очень слабо ($\sim \mu^2$) в соответствии с очень малым декрементом кварца, а кварц действует на генератор просто слабо ($\sim \mu$) и поэтому может захватывать его вблизи резонанса.

Чёткий смысл на языке малого параметра приобретает и само понятие режима со стабилизацией частоты, а именно: это такой автоколебательный режим, при котором, в результате расстройки контура в порядке μ , частота уклоняется от постоянного значения не сильнее, чем в порядке μ^2 .

Кратко описанное здесь расширение метода малого параметра оказалось полезным не только в задаче о стабилизации частоты. В качестве примера можно указать на теорию генераторов переменного тока, где допущение «очень большой» индуктивности статора также позволяет довести весь расчёт до конца, сохранив при этом все представляющие интерес черты рассматриваемого явления.

Метод малго параметра был также применён для решения некоторых задач, касающихся систем с распределёнными параметрами (нелинейные задачи в частных производных), которые приобрели особое значение в связи с успехами, достигнутыми в области техники очень высоких частот^{30, 31, 32}.

СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Одна из основных тенденций развития излагаемых здесь исследований состояла в том, что, начав с вопросов радиофизики, они распространились в область, которая, на первый взгляд, кажется весьма от неё далёкой — в область теории автоматического регулирования. Эта теория представляет широкое поле для применения и развития физических идей и математических методов, ставших обычными для радиофизиков, занимающихся исследованием автоколебаний. Несмотря на большое значение, которое приобрели релаксационные колебания, радиофизика, по совершенно очевидным причинам, больше интересуется почти синусоидальными колебаниями, генерируемыми слабо нелинейными системами. Как уже было сказано выше, теория автоматического регулирования большей частью имеет дело с сильно нелинейными системами, в которых автоколебания, если они существуют, существенно несинусоидальны.

Напомним сначала на простом примере, взятом из области радиофизики³³, метод «сшивания» траекторий в фазовом пространстве, о котором мы уже упоминали во введении. После этого мы сможем кратко рассмотреть некоторые последние работы, относящиеся к нелинейным задачам автоматического регулирования.

Для того чтобы не извращать исторической перспективы, необходимо сделать предварительно следующее замечание. За десять лет до возникновения радио французский инженер Леотэ³⁴, изучая автоколебания в некотором устройстве автоматического регулирования, исследовал фазовое пространство этого устройства и вычертил для него интегральные кривые и предельные циклы (не давая им этого названия: он, повидимому, не был знаком с опубликованной несколько раньше работой Пуанкаре, в которой предельные циклы впервые появились в математике). По причинам, о которых мы здесь не будем говорить, замечательные работы Леотэ были почти полностью забыты. Исследования, о которых здесь будет идти речь, представляя собой новые применения методов, используемых в радиофизике, являются вместе с тем продолжением работ Леотэ.

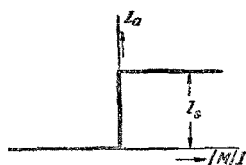


Рис. 1.

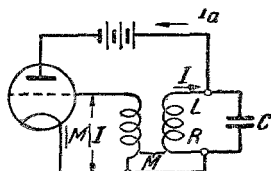


Рис. 2.

Если идеализировать характеристику лампы так, как это указано на рис. 1, то дифференциальное уравнение системы, схема которой приведена на рис. 2, будет иметь вид

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = \begin{cases} I_s/C, & \text{если } \dot{I} > 0, \\ 0, & \text{если } \dot{I} < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Фазовое пространство представляет собой плоскость $I, \dot{I}$. Полуплоскость $\dot{I} > 0$ заполнена отрезками траекторий, представляющих колебания, затухающие вокруг положения равновесия $I = I_s, \dot{I} = 0$; полуплоскость $\dot{I} < 0$ содержит отрезки траекторий, соответствующих колебаниям, затухающим вокруг положения равновесия $I = 0, \dot{I} = 0$. Отрезки траекторий должны соединяться на оси $I = 0$ так, чтобы I и $\dot{I}$ оставались непрерывными.

Пусть I_n будет абсцисса n -го пересечения траектории с полупрямой $D (\dot{I} = 0, I > 0)$. Абсциссой $(n + 1)$ -го её пересечения с той же полупрямой будет

$$I_{n+1} = I_n e^{-hT} + I_s \left(e^{-\frac{hT}{2}} + 1 \right); \quad h = \frac{R}{2L}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \quad (8)$$

Уравнение (8) может быть продискутировано методом Леотэ (рис. 3). Это уравнение выражает точечное преобразование прямой в самой себя. Жирная прямая соответствует уравнению (8), а тонкая составляет угол 45° с осями координат. Легко видеть, что при любом I_0 и $n \rightarrow \infty$, I_n стремится к конечному пределу:

$$I^* = \frac{I_s}{1 - e^{-nT/2}}.$$

Такова «амплитуда» предельного цикла, изображающего на фазовой плоскости установившиеся колебания *).

Автоколебания, возникающие во многих устройствах автоматического регулирования, могут быть изучены аналогичным образом. Мы

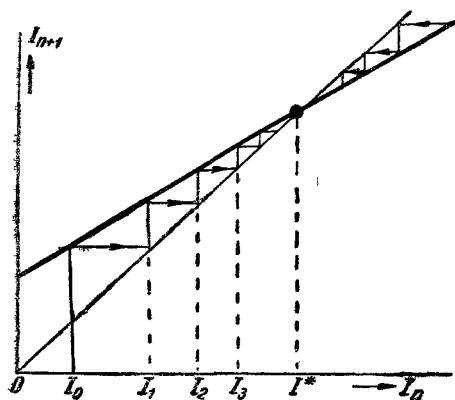


Рис. 3.

рассмотрим в качестве примера работу Андронова, Баутина и Горелика³⁵, касающуюся, хотя и сильно упрощенной, но вполне современной задачи, мало отличающейся от задачи Леотэ. Дело идет о винте с автоматически регулируемым переменным шагом.

Мотор вращается с угловой скоростью ω согласно уравнению

$$I\dot{\omega} = P(\omega, \lambda) - Q(\omega, \varphi); \quad (9)$$

здесь I — момент инерции, P — движущий момент, Q — момент сопротивлений, λ — параметр, характеризующий подачу газа, φ — угол поворота лопастей

винта, в то время как сервомотор, управляемый центробежным тахометром, меняет шаг винта по закону

$$\dot{\varphi} = F(\xi), \quad (10)$$

где ξ — смещение муфты тахометра. Идеалом было бы сделать ξ однозначной функцией ω , а $F(\xi)$ такой, чтобы она равнялась нулю только при $\omega = \omega_N$, где ω_N — требуемое значение угловой скорости, которое должно оставаться постоянным. В таком случае мы имели

*) Периодические решения уравнения $L\ddot{I} + I/C = 0$ являются очень «делikatными» образованиями: они исчезают, как только мы вводим, например, член $R\dot{I}$, как бы мало ни было R . Напротив, периодическое решение (7) продолжает существовать при (не слишком больших) изменениях дифференциального уравнения. Понятие «грубой системы» (см. введение) обобщает это свойство, которое может служить основанием для математического определения автоколебаний.

бы при стационарном режиме ($\dot{\omega}=0, \dot{\varphi}=0$) в силу (10) $F(\xi)=0$ для $\omega=\omega_N$, в то время как в силу (9) φ (а следовательно, и сила тяги) становится функцией от λ . Соответствующий выбор значений параметров гарантирует в этом случае устойчивость этого стационарного режима.

Этот идеал никогда не осуществляется. Тахометр обладает инерцией и трением. Сервомотор обладает зоной нечувствительности. Функция $F(\xi)$ может иметь, например, вид, указанный на рис. 4. Эти обстоятельства могут полностью изменить свойства системы. Её поведение подверглось исследованию в рассматриваемой работе при следующем предположении: можно пренебречь инерцией, но не трением тахометра.

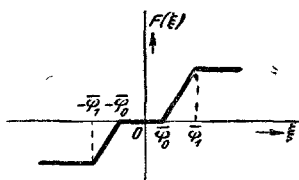


Рис. 4.

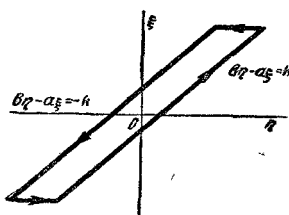


Рис. 5.

Опишем прежде всего динамику тахометра, считая, что трение в нём следует закону Кулона. Так как, по предположению, тахометр не имеет инерции, существует равновесие между силой трения и равнодействующей R центробежной и восстанавливающей сил:

$$R + F(\xi) = \begin{cases} F = -k, & \text{если } \dot{\xi} > 0, \\ 0 < |F| < k, & \text{если } \dot{\xi} = 0 \quad (k > 0), \\ F = +k, & \text{если } \dot{\xi} < 0. \end{cases}$$

Предполагая, что рассматриваемые движения столь малы, что R может быть линеаризовано ($R = b\eta - a\xi$; $\eta = \omega - \omega_N$; $a > 0, b > 0$), мы получаем:

$$\begin{aligned} b\eta - a\xi &= k, & \dot{\xi} &= \dot{\eta}, & \text{если } \dot{\xi} &> 0, \\ |b\eta - a\xi| &< k, & & & \text{если } \dot{\xi} &= 0, \\ b\eta - a\xi &= -k, & \dot{\xi} &= \dot{\eta}, & \text{если } \dot{\xi} &< 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Когда угловая скорость совершает колебание, изображающая точка описывает на плоскости ξ, η цикл, показанный на рис. 5. «Сдвиг фазы» между ξ и η можно рассматривать как физическую причину возникновения автоколебаний.

Линеаризуя (9), получаем:

$$\ddot{\eta} = -M\eta - N\varphi \quad (M > 0, N > 0).$$

Уравнение (10) может быть, согласно рис. 4, записано в виде

$$F(\xi) = -F(-\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\xi| < \bar{\psi}_0, \\ \alpha(\xi - \bar{\psi}_0), & \text{если } \bar{\psi}_0 < \xi < \bar{\psi}_1, \\ +\bar{A}, & \text{если } \xi > \bar{\psi}_1. \end{cases}$$

Положим:

$$\frac{a\xi}{2k} = x, \quad \frac{b\eta}{2k} = y, \quad \frac{-b}{2k} \left(\eta + \frac{N}{M} \right) = z, \quad Mt = \tau, \\ \frac{a\bar{\psi}_0}{2k} = \bar{\psi}_0; \quad \frac{a\bar{\psi}_1}{2k} = \bar{\psi}_1, \quad \frac{Nb}{2kM^2} \bar{A} = A \quad \left(\alpha = \frac{A}{\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_0} \right).$$

Мы можем теперь написать дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{a\tau} = f(x, y, z); \quad \frac{dy}{a\tau} = z; \quad \frac{dz}{d\tau} + z = g(x), \quad (I)$$

где функции f и g определены следующим образом в трёхмерном «вырожденном» фазовом пространстве, образованном полуплоскостями

$H(x - y = \frac{1}{2}, z < 0)$ и $H'(x - y = \frac{1}{2}, z > 0)$ и слоем $G(|x - y| < \frac{1}{2})$:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} z & \text{в } H \text{ и } H', \\ 0 & \text{в } G, \end{cases} \quad (II)$$

$$g(x) = -g(-x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| < \psi_0, \\ \alpha(x - \psi_0), & \text{если } \psi_0 < x < \psi_1, \\ A, & \text{если } x > \psi_1. \end{cases}$$

В силу (II) нелинейная система (I) приводится к шести системам линейных уравнений, которые действительны в различных областях фазового пространства. Система (I) и условие непрерывности x, y, z на границах этих областей полностью определяют движение изображающей точки.

На рис. 6 тонкой линией показан отрезок типичной траектории. Она имеет вид спирали; мы имеем здесь колебательное движение. Пока тахометр смещается, изображающая точка находится на H или H' ; при остановке сервомотора она движется по прямой линии, а когда сервомотор находится в действии, то по кривой. Когда угловое ускорение меняет знак, тахометр из-за трения на мгновение останавливается, изображающая точка вторгается в слой G и описывает дугу в плоскости $x = \text{const}$. Затем тахометр снова приходит в действие, и изображающая точка снова движется по H' или H .

Необходимо знать, сворачивается ли спираль или разворачивается и существуют ли предельные циклы.

Этот вопрос решается с помощью расчётов, аналогичных тем, какие нами были сделаны для лампового генератора. Хотя здесь

фазовое пространство — трёхмерное, но оно настолько вырождено, что все траектории пересекают надлежащим образом выбранную полупрямую в плоскости H или H' , например, полупрямую $L \left(x - y = \frac{1}{2}, z = 0, x < -\psi_0 \right)$. Таким образом, достаточно исследовать точечное преобразование этой полупрямой в неё самой, определённое (I) и (II) и условиями «сшивания» траекторий.

Расчёт показывает, что либо колебания затухают при любых начальных условиях, либо (рис. 6) существуют два предельных цикла — один устойчивый и второй, меньшего размера, неустойчивый (они показаны толстыми линиями). Во втором случае затухают лишь достаточно слабые возмущения. На рис. 7 показана в пространстве параметров (α, ψ_0, A) граница области, в которой возможны автоколебания. Она заключена между плоскостью $\psi_0 = 0$, цилиндрической поверхностью $[A]$, образующие которой параллельны оси A , и поверхностью $[\alpha]$, содержащей ось A . Всегда можно избавиться от автоколебаний либо уменьшением k или N , либо увеличением зоны нечувствительности.

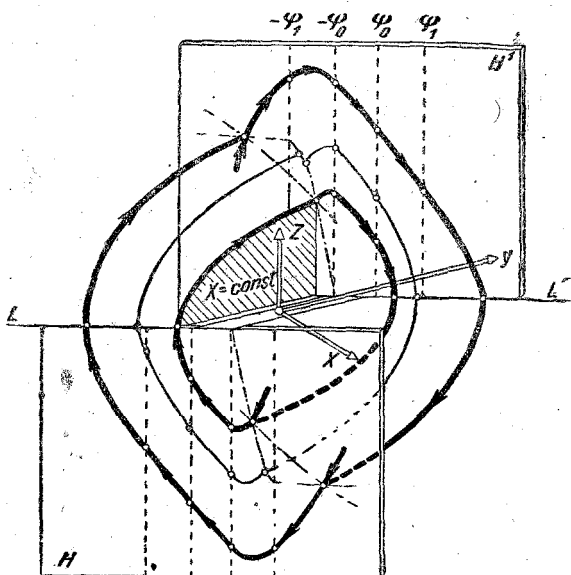


Рис. 6.

В другой работе Андропова, Баутина и Горелика³⁶ разбирается задача, относящаяся к большому классу устройств автоматического регулирования и обобщающая только что рассмотренный случай. Дело идёт о системах, в которых скорость сервомотора управляется не только прибором, измеряющим регулируемую величину (например, тахометром), но, как это было впервые предложено другим французским инженером Фарко, линейной комбинацией смещения измерительного прибора и самого сервомотора, что позволяет более эффективно браться с причинами неустойчивости. Исследованию подверглись два случая, для которых сказалось возможным нанести в пространстве параметров границы между областями устойчивости стационарного режима, с одной стороны, и областями, в которых возможны автоколебания, с другой: случай сервомотора с линейной характе-

ристикой и случай сервомотора, обладающего постоянной по абсолютной величине скоростью и зоной нечувствительности.

До сих пор речь шла о проблемах, в которых фазовое пространство, хотя и трёхмерное, имело настолько простой вид, что исследование его сводилось к точечному преобразованию линии в линию. Однако большое число очень важных задач приводит к «полным» трёхмерным фазовым пространствам, и для того, чтобы разобратся в ходе интегральных кривых, необходимо подвергнуть

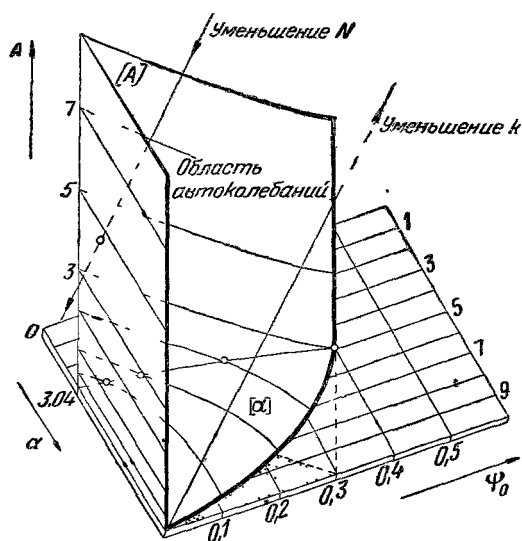


Рис. 7.

исследованию точечное преобразование поверхности в поверхность. Такова, например, классическая задача Вышнеградского, который вместе с Максвеллом является основателем динамической теории автоматического регулирования. Здесь необходимо сделать ещё одно короткое историческое отступление.

Еще в 1841 г. знаменитый астроном Эйри изучил автоколебания, которым был подвержен часовой механизм, предназначенный для поддержания равномерного вращения экваториала. Однако он не смог дать удовлетворительной теории этого явления. Максвелл в своём знаменитом мемуаре «On Governors», опубликованном в 1868 г.³⁷, исследовал корни характеристического уравнения линеаризованных уравнений движения системы прямого регулирования*) и впервые

*) Т. е. без сервомотора: измерительный прибор действует непосредственно на регулирующий орган.

сформулировал то, что мы теперь называем условиями самовозбуждения колебаний. Существует непосредственная преемственность между исследованиями Максвелла об условиях самовозбуждения автоколебаний и более поздними широко известными исследованиями Раутса³⁸ об устойчивости движения.

Вышнеградский интересовался задачами регулирования не только как учёный, но и как инженер. В отличие от Максвелла, мемуар которого не был знаком Вышнеградскому³⁹, последний поставил в 1886 г. задачу прямого регулирования в том виде, какой единственно интересовал в то время технику. Задача Вышнеградского остаётся и по сей день одной из основных задач теории регулирования.

Рассмотрим машину, например паровую, у которой движущий момент P зависит от положения у регулирующего органа, а момент сопротивлений Q постоянен:

$$I\ddot{\varphi} = P(y) - Q. \quad (12)$$

Регулирующий орган управляется тахометром, инерцией и трением которого нельзя пренебречь:

$$\begin{aligned} y &= ax, \\ m\ddot{x} + kx + f(x) &= \beta(\omega - \omega_N). \end{aligned} \quad (13)$$

Трение $f(x)$ складывается из вязкого трения и трения, следующего закону Кулона.

Стационарный режим ($\dot{\omega} = 0$, $\dot{x} = 0$) может быть устойчивым или неустойчивым. Он неустойчив, в частности, тогда, когда колебания, обусловленные инерцией и упругостью тахометра, возрастают вопреки трению вследствие взаимодействия между тахометром и машиной. Требуется найти условия устойчивости. Такова задача Вышнеградского. Задача эта нелинейная.

Сам Вышнеградский в своём знаменитом мемуаре дал решение для линейного случая, когда $f(x) = \gamma x$. Для частного случая, когда отсутствует вязкое трение, ряд результатов был получен Лекорню⁴, Жуковским⁴¹ и Мизесом⁴². Мы называем этот случай задачей Мизеса. Что же касается задачи Вышнеградского, то она оставалась нерешённой.

Приведя исследование трёхмерного фазового пространства к исследованию точечного преобразования плоскости в плоскость, Андронов и Майер недавно не только получили возможность дать решение задачи Мизеса⁴³, но и полностью решить задачу Вышнеградского⁴⁴.

Пространство параметров, которое при надлежащем выборе последних может быть приведено к двумерному, разбивается на три области, границы которых удалось вычислить: 1) область, в которой система стремится к стационарному режиму при любых начальных

условиях; 2) область, в которой система безгранично удаляется от стационарного режима при любых начальных условиях; 3) область, в которой, в зависимости от начальных условий, система либо приближается к стационарному режиму, либо от него удаляется. Оказалось также возможным вычислить для каждого принадлежащего к этой области значения параметров максимальное возмущение, с которым ещё может справиться устройство автоматического регулирования.

Укажем ещё одну трёхмерную нелинейную задачу, исследованную методом преобразования плоскости в плоскость: задачу о стабилизации курса самолёта автопилотом⁴⁵.

Пусть углы, характеризующие положение самолёта и его руля, будут φ и η , тогда мы можем написать уравнения в виде

$$\ddot{\varphi} + M\dot{\varphi} = -N\eta; \quad \dot{\eta} = F(\psi),$$

где M и N — положительные константы и $F(\psi)$ — характеристика сервомотора. Предполагается, что этот последний управляется линейной комбинацией:

$$\psi = \varphi - \alpha\eta + \beta\dot{\varphi}$$

(α , β — положительные константы). Сервомотор отличается постоянством скорости и зоной нечувствительности. Решение задачи показало, что пространство параметров делится на область, в которой отсутствуют автоколебания самолёта вокруг его курса, вторую область со слабыми автоколебаниями и третью с сильными автоколебаниями.

Приведём ещё другие аналогичные работы, относящиеся к задаче автоматического регулирования^{46, 47}.

Исследование итерированных преобразований вида

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3...),$$

играющих такую большую роль в этой части нашего обзора, позволило исследовать другие задачи о нелинейных колебаниях⁴⁸⁻⁵², в частности, об автоколебаниях систем с распределёнными постоянными, например, скрипичной струны, возбуждаемой смычком, или лехеровской системы, возбуждаемой электронной лампой⁵¹. (Задача сводится к исследованию последовательных преобразований значений некоторой функции, удовлетворяющей волновому уравнению, причём это преобразование задаётся некоторыми нелинейными граничными условиями). К аналогичной задаче приводят исследованные Бовшеверовым⁵³ системы с так называемой «запаздывающей обратной связью», примером которых могут служить: эхо-лот Жакэ-Бодена⁵⁴ и схема Куликова-Шиловского для измерения расстояний с помощью радиоволн⁵⁵.

Недавно аналогичным методом Андроновым и Гореликом была рассмотрена нелинейная задача о резонансе релятивистской частицы, движущейся в циклотроне⁵⁶. Здесь нелинейность обусловлена зави-

симостью массы от скорости. Несомненно, что методам теории нелинейных колебаний суждено найти широкое применение в исследовании движений электронов и ионов в ускорителях, играющих такую важную роль в современной технике физического эксперимента, а также движений электронов в приборах, предназначенных для генерации сверхвысоких частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Мандельштам, Н. Папалекси, А. Андронов, С. Хайкин, А. Витт, Новые исследования нелинейных колебаний, Радиоиздат, Москва, 1936.
2. H. Poincaré, *Sur les courbes définies par une équation différentielle. Oeuvres*, v. 1, 1920.
3. А. Андронов, С. Р., **189**, 559 (1929).
4. А. Андронов и Л. Понтрягин, ДАН СССР, **4**, 247 (1937).
5. B. van der Pol, *Phil. Mag.* (7), **3**, 65 (1927).
6. H. Poincaré, *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 1892.
7. А. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 2-е изд., ОНТИ, М. — Л., 1935.
8. L. Mandelstam und N. Papalex, *Zeits. für Physik*, **72**, 273 (1931).
9. Л. Мандельштам и Н. Папалекси, ЖТФ, **2**, 775 (1932).
10. V. Migulin, *Techn. Phys. USSR*, **3**, 841 (1937).
11. Ю. Кобзарев, ЖТФ, **5**, 627 (1935).
12. V. Migulin, *Techn. Phys. USSR*, **4**, 850 (1937).
13. Ю. Кобзарев, ЖТФ, **3**, 138 (1933).
14. Л. Мандельштам и Н. Папалекси, ЖТФ, **4**, 198 (1934),
15. А. Витт, ЖТФ, **4**, 109 (1934).
16. Л. Мандельштам и Н. Папалекси, ЖТФ, **4**, 5 (1934).
17. N. Papalex, *Journ. of Phys. (USSR)*, **1**, 373 (1939).
18. Н. Папалекси и А. Мартынов, ДАН СССР, № 1, 25 (1946).
19. Л. Мандельштам и Н. Папалекси, Изв. Электропром. слабого тока, № 7, 1 (1935).
20. Э. Рубчинский, Изв. Электропром. слабого тока, № 7, 9 (1935).
21. М. Дивильковский и С. Рытов, ЖТФ, **6**, 474 (1936).
22. В. Лазарев, ЖТФ, **10**, 918 (1940).
23. Л. Мандельштам, ЖЭТФ, **15**, 605 (1945).
24. G. Gorelik, *Techn. Phys. USSR*, **5**, 320 (1938).
25. S. Rytow, *Techn. Phys. USSR*, **2**, 215 (1935).
26. С. Рытов, Труды Физ. ин-та АН СССР, **2**, 41 (1938).
27. С. Рытов, ДАН СССР, **47**, 181 (1945).
28. С. Рытов, М. Жаботинский, А. Прохоров, ЖЭТФ, **15**, 557 и 613 (1945).
29. М. Жаботинский, ЖЭТФ, **15**, 573 (1945).
30. S. Streikov, *Techn. Phys. USSR*, **2**, 235 (1935).
31. A. Witt, *Techn. Phys. USSR*, **4**, 261 (1937).
32. G. Gorelik, *Journ. of Phys. (USSR)*, **1**, 465 (1939).
33. А. Андронов и С. Хайкин, Теория колебаний, § 3, М. (1937).
34. H. Léauté, *J. de l'Ecole Polytechnique*, **55**, 1 (1885).
35. A. Andronov, N. Bautin, G. Gorelik, *C. R. Ac. Sci. USSR*, **47**, 263 (1945).
36. А. Андронов, Н. Баўтин и Г. Горелик, Журн. автом. и телемех., т. VII, № 1, 15 (1946).
37. J. Maxwell, *Proc. Roy. Soc.*, No. 100 (1868).
38. E. Routh, *A treatise on the stability of a given state of motion* (1877)
39. I. Wischnegradski, *C. R.*, **83**, (1876).

40. L. Lescornu, Regularisation du mouvement dans les machines, Paris, 1897.
 41. Н. Жуковский, Теория регулирования машин, М., 1909.
 42. R. von Mises, E. u. M., 26, 783 (1908), Enzykl. d. math. Wiss., 4, T. 2 (1908).
 43. А. Андронов и А. Майер, ДАН, 43, 54 (1944).
 44. А. Андронов и А. Майер, ДАН, 47, 340 (1945).
 45. А. Андронов и Н. Баутин, ДАН, 46, 143' (1945).
 46. А. Андронов и Н. Баутин, ДАН, 43, 189 (1944).
 47. А. Андронов и Н. Баутин, ДАН, 46, 277 (1945).
 48. Л. Холоденко, ЖТФ, 10, 112 (1940).
 49. Л. Холоденко, ЖТФ, 11, 276 (1941).
 50. V. Guljaiev, Journ. of Phys. (USSR), 9, 21 (1940).
 51. В. Виткевич, ЖТФ, 14, 70 (1944); 15, 33, 777 и 793 (1945).
 52. К. Theodorczyk, Journ. of Phys. (USSR), 9, 139 (1945).
 53. V. Bouscheverov, Sow. Phys., 9, 529 (1936).
 54. Jacquet Bodin, L'Aeronautique, No. 170 (1933).
 55. A. Koulikoff and C. Chilowsky, Brit. Pat. No. 288233, April. 6, (1927).
 56. А. Андронов и Г. Горелик, ДАН, 49, 64 (1945); С. R. (Paris), 221, 696 (1945).
-