

ОБРАЗОВАНИЕ ЯЧЕИСТЫХ СТРУКТУР В СЛОЯХ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА

Н. С. Шишкин

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	461
I. Ячейки Бенара в лабораторных условиях	462
II. Ячейки Бенара в природе	465
III. Причины возникновения ячеистых структур в природных условиях	473
IV. Количественная теория явления	481

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается возникновение конвективных движений в слое жидкости или газа при наличии неустойчивого состояния.

Такое состояние возникает, например, в жидкости, равномерно подогреваемой снизу и охлаждаемой сверху испарением (при нормальной зависимости плотности от температуры). Для воды равновесие будет неустойчивым также и в том случае, когда нижний уровень слоя имеет температуру 0°C , а верхний поддерживается при положительной температуре до $+4^{\circ}\text{C}$. В обоих случаях плотность жидкости возрастает с высотой.

При случайных нарушениях равновесия более лёгкая жидкость, находящаяся внизу, стремится подняться вверх в виде отдельных струй, а более тяжёлая жидкость стремится опуститься с верхних уровней вниз. Если аномальное распределение плотности поддерживается в течение достаточного времени, то постепенно в жидкости создаётся упорядоченное конвективное движение. Жидкость приобретает ячеистую структуру. В каждой из ячеек имеется замкнутая циркуляция жидкости.

Такие ячейки, названы ячейками Бенара¹, по имени французского учёного, детально исследовавшего их в 1900 г. в лабораторных условиях. Из более поздних лабораторных исследований ячеистой структуры жидкостей следует отметить опыты Мэла² с затвердевающим спермацетом, содержащим взвешенный алюминиевый порошок, и опыты Шмидта и Сондерса³ с водой.

В естественных условиях неустойчивое состояние жидкости, благоприятствующее образованию ячеек, возникает в Арктике и Субарк-

тике при весеннем оттаивании почв, содержащих большое количество влаги, а при наличии вечной мерзлоты, обеспечивающей температуру около 0°C на нижнем уровне жидкого слоя, и в летне-осенний период, если температура верхнего уровня положительна и близка к 4°C (см. статьи Лоу⁴ и Гриппа⁵).

В зонах, где нет зимнего промерзания почвы, ячейки Бенара могут возникать при засыхании разжиженной почвы благодаря тому, что верхний слой жидкости интенсивно охлаждается через испарение (описание поверхностных ячеек на солончаковых почвах в Иране приводится, например, в статье Штехе⁶).

В атмосферных условиях образование конвективных ячеек возможно, если потенциальная температура рассматриваемого слоя убывает с высотой (см. статью Брента⁷). Например, при сверхadiaбатическом градиенте температуры и ненасыщенном воздухе температура перегретого воздушного пакета, начавшего подъем, убывает по адиабатическому закону, и он будет оставаться теплее окружающего воздуха.

Следовательно, подъем будет продолжаться до тех пор, пока он не попадет в слой с меньшим градиентом температуры или в слой инверсии.

Подъем воздуха в одних местах вызовет компенсирующее опускание его в других местах, и, при наличии достаточной разности температур между нижним и верхним основанием в слое значительной горизонтальной протяженности (по сравнению с толщиной слоя), возникнет правильная конвективная циркуляция. Это является, в частности, причиной образования облаков ячейистой структуры.

В лабораторных условиях наблюдалось возникновение ячеек в слое дыма, впускавшегося в камеру Уокера, подогреваемую снизу и охлаждаемую сверху (см. статьи Чандра⁸ и Брента⁷).

Теоретически вопрос о возникновении ячейистой структуры исследован впервые Рэлеем⁹ в 1916 г. для наиболее простого случая ячеек, имеющих форму прямоугольной 4-гранной призмы. Им выведен критерий того, при каких условиях возникает конвективное движение. Дальнейшее развитие теории дано Джефрисом¹⁰ в ряде статей 1926—1928 гг. и особенно Пеллю и Саусвеллом¹¹ (в 1940 г.), исследовавшими вопрос для общего случая ячеек правильной симметричной формы.

Применение к атмосфере, с учетом явления турбулентного обмена, рассмотрено Лейле¹² в 1941 г.

1. ЯЧЕЙКИ БЕНАРА В ЛАБОРАТОРНЫХ УСЛОВИЯХ

Бенар¹ помещал тонкий слой жидкости толщиной до 1 мм на подогреваемую снизу металлическую пластинку, поддерживаемую при определенной температуре. Сверху жидкость охлаждалась благодаря испарению. Таким образом создавался слой жидкости с ростом плотности снизу вверх. В начальной стадии наблюдались многочисленные

беспорядочные струи, направленные снизу вверх, и компенсирующие их нисходящие потоки. Затем число струй уменьшалось и возникали ячейки неправильной формы, так что поверхность разбивалась на многоугольники с 4—7 сторонами.

Наконец, по истечении определённого для данной жидкости и данной температуры подстилающей поверхности времени устанавливалось стационарное состояние, в котором все ячейки имели правильную гексагональную форму (рис. 1)*).

Время установления стационарного состояния при температуре металлической пластинки в 100°C составляло для алкоголя и бензина 1—2 сек., для парафина 10 сек., для вязких масел — несколько минут.

В центре каждой ячейки имелся восходящий поток жидкости, на периферии ячейки — нисходящее движение (рис. 2).

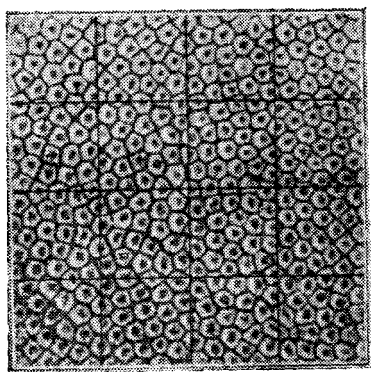


Рис. 1. Вид ячеек Бенара сперматета с графитом.

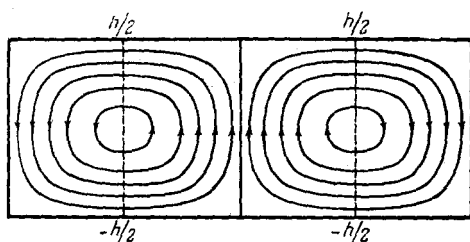


Рис. 2. Вертикальный разрез ячейки Бенара со схемой циркуляции.

Ширина каждой ячейки была примерно равна утроенной глубине слоя жидкости.

Мэл² в 1931 г. получил совершенно аналогичную картину для сперматета, смешанного с алюминиевым порошком. Далее он установил, что при увеличении разности температур между нижней и верхней границами жидкости горизонтальные размеры ячеек растут. Если дно сосуда наклонное, то с убыванием глубины слоя размеры ячеек убывают до некоторого предела (определяемого температурным режимом), за которым ячейки отсутствуют. При увеличении глубины слоя ячейки растут, но, начиная с некоторой определённой глубины, рост прекращается, и ячейки сохраняют свой размер (повидимому, циркуляция охватывает в этом случае не весь слой жидкости, а только ограниченную его часть).

Интересные явления наблюдались Мэлом при затвердевании сперматета и последующем плавлении его благодаря нагреванию снизу. Когда на поверхности оставалась лишь тонкая корка твёрдого вещества, то возникали правильные ячейки гексагональной формы, причём

*) Рисунки заимствованы из цитированных работ.

в середине ячеек образовывался светлый круг с тёмной «звездой» в центре (рис. 3).

«Звезда» образовывалась благодаря тому, что восходящий поток нагретого спермацета вызывал плавление корки в центре.

На периферии корка ломалась благодаря нисходящему потоку жидкости; круг представлял, таким образом, линию равных скоростей нисходящего потока. Теоретически это объяснено Пеллью и Саусвеллом (см. IV).

После расплавления всей верхней твёрдой плёнки восстанавливалась обычная картина ячеек.

Шмидт и Сондерс³ исследовали оптическим методом образование ячеистых структур в слое воды, пользуясь зависимостью коэффициента преломления от температуры. Отклонение лучей в вертикальном направлении, зависящее от вертикального градиента температуры, оказывалось более сильным для нижней части



Рис. 3. Ячейки в спермацете, подогреваемом снизу, при наличии тонкой твёрдой плёнки на поверхности. Снято в момент начала разрушения плёнки.

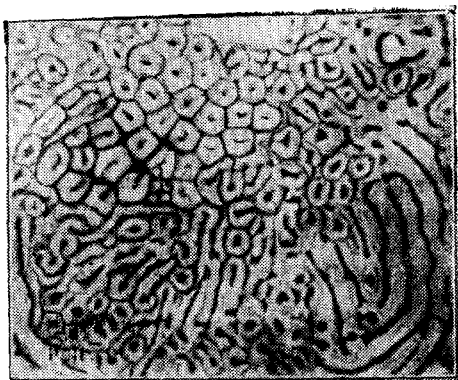


Рис. 4. Вид ячеек на поверхности дыма в камере Уокера.

части слоя отклонение лучей было незначительным, т. е. вертикальный градиент температуры мал. Конвекция, так же как и в опытах Бенара и Мэла, имела восходящие потоки в центре ячеек.

Аналогичные опыты они проделали для воздуха. Число ячеек в воздухе при тех же размерах исследованного слоя оказалось равным числу ячеек в воде.

Чандра^{6,7} выполнил ряд опытов с дымом, впускавшимися в камеру Уокера. Камера имела металлическое дно, подогреваемое снизу с помощью электрической печки, и стеклянную крышку, охлаждаемую водой или жидким воздухом.

Боковые стенки имели войлочную теплоизоляцию.

Циркуляция при высоте камеры 10 мм возникала, когда разность температур между дном и крышкой достигала $11,4^\circ$. На поверхности дыма образовывал многоугольники (рис. 4).

В тех местах, где были поступательные движения массы дыма, ячейки имели вытянутую форму.

Если верхнюю крышку перемещать в горизонтальном направлении с помощью электрического моторчика (крышка делалась длиной 3 фута), то сначала ячейки вытягивались вдоль направления движения крышки, как бы наползая друг на друга, а затем сливались, образуя дымовые «гряды».

При небольшой разности температур конвекция имела нисходящий поток в центре ячейки, а при увеличении её до некоторого критического значения за счёт нагревания снизу происходил переход к циркуляции с восходящим потоком в центре.

Интересно отметить, что при высоте камеры 6 мм оказалось невозможным получить движение первого типа при водяном охлаждении крышки, как ни нагревалось дно камеры, в то время как оно получалось, если крышка охлаждалась жидким воздухом.

В камере высотой 12 мм в тонком слое дыма, лежащем на дне камеры, удалось получить картину довольно правильно расположенных круглых просветов, связанных с нисходящими потоками воздуха в центре ячеек (рис. 5).

Таким образом, ряду авторов удалось установить экспериментально, что слой жидкости или газа, подогреваемый снизу и охлаждаемый сверху, разбивается на ячейки. Внутри каждой из ячеек возникает конвективное движение, продолжающееся до тех пор, пока поддерживается необходимая разность температур между верхним и нижним основаниями слоя.

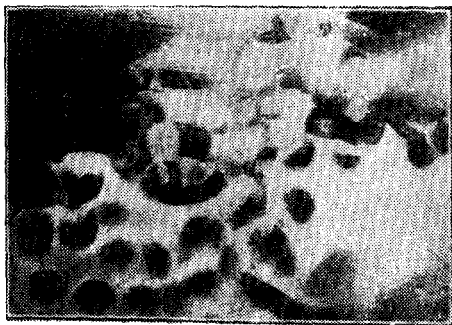


Рис. 5. Конвекция в тонком слое дыма, покрывающего дно камеры Уокера.

II. ЯЧЕЙКИ БЕНАРА В ПРИРОДЕ

Как уже указано во введении, ячеистые структуры встречаются в природе в двух основных формах:

- а) микроструктура облаков,
- б) микрорельеф земной поверхности при сильной увлажнённости поверхностного слоя.

§ 1. Описание ячеистых структур в атмосфере

Правильная микроструктура облаков наблюдается, главным образом, в облаках верхнего яруса, где возможно создание однородности условий в слое значительной горизонтальной протяжённости.

Основные виды ячеистой структуры облаков:

1) Системы мелких облачков круглой или неправильной формы (рис. 6) могут образовываться как путём расчленения сплошного слоистого облака, так и в безоблачном небе. В последнем случае они, постепенно разрастаясь, могут привести к созданию сплошной пелены.

2) Системы прямоугольных облаков (обычно значительного размера), разделённых узкими просветами, образующими взаимно перпендикулярные линии. Как и в предыдущем случае, прямоугольная



Рис. 6. Ячеистая структура облака при восходящем потоке в центре ячейки.

структура может образоваться как из сплошной слоистой облачности, так и в безоблачном небе. Соотношение между горизонтальными размерами облака и толщиной слоя должно равняться 4:1 при квадратной форме облаков (согласно теории Рэлея).

3) «Кружевная» структура с правильно расположенными круглыми или овальными просветами (рис. 7). Форма облака указывает на то, что в центре ячеек имеется нисходящее движение.

4) Системы гряд (strips), разделённые более или менее параллельными просветами (рис. 8). Расстояние между соседними грядами составляет, по данным Шпрунга и Зюринга (см. статью Мэла²⁾, в среднем 250 м при толщине слоя облачности в 70 м, т. е. отношение ширины ячейки к её высоте равно 3,5.

Гряды имеют большую протяжённость в длину, очертания их размытые и форма часто искривлённая.

Вытягивание ячеек в гряды происходит при наличии изменчивости ветра с высотой. Направление гряд совпадает с направлением отно-

сительного ветра для верхней и нижней границ того слоя, в котором создано неустойчивое состояние.

Гряды не следует путать с волнами Гельмгольца, которые имеют совершенно иную природу. Волны образуются на границе двух слоёв при устойчивой стратификации, благодаря возмущению равновесного состояния (подобно волнам на поверхности моря). Внешний вид волн Гельмгольца характеризуется более гладкими краями и большей правильностью структуры. Ориентировка их в пространстве также отлична от ориентировки гряд. Волны Гельмгольца располагаются перпендикулярно к относительному ветру, характеризующему оба воздушных слоя. Они образуются как в безоблачном небе в виде довольно длинных полос, так и из сплошных слоистых облаков — в виде небольшого числа коротких полос, обычно перпендикулярных к общей вытянутости облачной системы.



Рис. 7. Ячеистая структура облака при нисходящем потоке в центре ячейки.

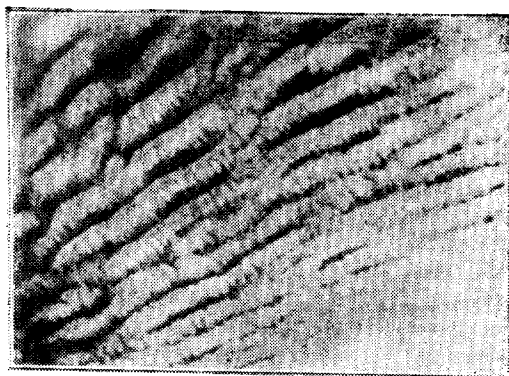


Рис. 8. Облачные гряды (strips).

ности слоистого облака, видимая с самолёта, указывает на установившуюся циркуляцию. Особенно это замечание относится к нижнему ярусу облаков, где сильно влияние приземного слоя и отдельные струи могут проникать в слой инверсии, создавая неровности верхней поверхности.

Кроме рассмотренных выше случаев, когда расчленение на ячейки охватывает всю толщу облака, наблюдается и образование ячеек на верхней или нижней поверхности облака.

В первом случае верхний уровень облака напоминает всхолмлённую поверхность с более или менее правильным строением (рис. 9). Однако отнюдь не всегда всхолмлённость верхней поверх-

Неравновесное состояние у нижней поверхности облаков приводит к образованию *mammatus simulus* (рис. 10). Это — вымеобразные полушаровидные облака, свешивающиеся вниз. При наличии относительной скорости движения нижележащего слоя воздуха эти полушария могут вытягиваться в полосы (подобно грядам), резко заметные на фоне облака.

Укажем ещё, что нередко облака обнаруживают ячеистую структуру нескольких порядков, когда внутри больших ячеек возникают ячейки меньшего размера. Например, в случае прямоугольных облаков несколько прямоугольных шашек как бы объединяются в одну



Рис. 9. Вид поверхности слоистого облака с самолёта.

группу, отделённую от соседних более широкими просветами. Такое же явление можно наблюдать в случае гряд.

Что касается кучевых облаков, то они возникают в условиях, когда влияние земной поверхности сказывается ещё достаточно сильно. Поэтому однородность условий на верхней и нижней границах слоя большой горизонтальной протяжённости, необходимая для установления правильной структуры, фактически никогда не достигается. Повидимому, явление ограничивается фазой отдельных неупорядоченных струй.

Интересно также отметить, что схема воздушных течений, предложенная Пальменом¹³ для объяснения воронок и гор тропопавзы, весьма напоминает циркуляцию в ячейках, соответствующую антисимметричному решению задачи (см. рис. 22).

Однако, следует иметь в виду, что теория устойчивой конвективной циркуляции к циклонам и антициклонам неприменима, так как возникновение однородных граничных условий, требующихся для её установления, над значительными площадями земной поверхности, с линейными размерами в тысячи километров, невозможно.

Скорее можно сказать, что, как и в случае кучевых облаков, процесс развивается лишь в своей первой фазе — фазе отдельных струй в тех местах, где возникло возмущение. Над циклоном имеет место восходящий поток в тропосфере. Развитие завихрений вокруг вертикальной оси вызывает образование воронок тропопаузы с понижением её уровня в отдельных случаях на 4—5 км.

В стратосфере, таким образом, возникает нисходящий поток. На периферии циклона происходят компенсирующие движения воздуха. Над антициклоном направление воздушных потоков обратное.

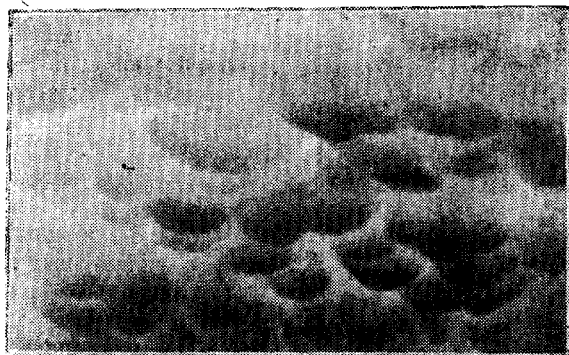


Рис. 10. Mammato cumulus.

Вряд ли можно допустить, что эти потоки замыкаются в правильную циркуляцию, тем более, что тогда соотношение между горизонтальными и вертикальными размерами ячеек было бы чрезмерно большим, порядка 100:1 (расстояние между циклоном и антициклоном порядка 1—2 тыс. км, а высота тропопаузы, т. е. половина высоты ячейки, порядка 10 км).

§ 2 Описание ячеистых структур микрорельефа земной поверхности

Перейдём к краткому описанию некоторых ячеистых форм микрорельефа, встречающихся на участках со значительным увлажнением верхнего слоя почвы, характерных, главным образом, для арктической и субарктической зон.

Можно указать три основные формы микрорельефа ячеистого строения:

1) Бугристый микрорельеф^{6,14} возникает на ровной заболоченной местности. Бугры расположены довольно равномерно по всему участку (рис. 11).

Площадь между буграми часто представляет топкие «мочажины». Высота бугров обычно не превышает 0,4—0,5 м, но встречаются и бугры высотой до нескольких метров («булгуньяхи»). Отмечаются случаи¹⁵, когда бугры не достигают дна болота, а плавают в жидкой плавунной массе.



Рис. 11. Мелкобугристый микрорельеф в Исландии.

Характерно, что высота бугров обычно тем больше, чем глубже залегает слой вечной мерзлоты.

2) Гряды⁶ образуются обычно на склонах крутизной свыше 2° и тянутся вниз по склону, напоминая огородные грядки (рис. 12).

3) Трещинные полигоны^{14,16,17} характерны для участков с однородными мелкозернистыми почвами. Трещины правильной формы образуют

на поверхности либо шестиугольники, либо четырёхугольники. При малых их размерах, площади шестиугольников обычно выпуклые в середине (рис. 13).



Рис. 12. Гряды, вытянутые вдоль склона, в Рейкьявике.

Но встречаются гексагональные полигоны и больших размеров (до 40 м), так называемые таймырские полигоны (рис. 14).

Прекрасная фотография таймырских полигонов, сделанная с борта дирижабля «Граф Цеппелин» во время его полёта над Арктикой в 1932 г., приведена в статье А. И. Гусева¹⁶.

Ортогональные системы трещин (рис. 15) часто имеют приподнятые края, что объясняется выпиранием их при замерзании воды в трещинах. Поля четырёхугольников обычно ровные, заболоченные, иногда с озерком посредине.

При неоднородности материала, покрывающего поверхность, также образуются формы микрорельефа ячеистого строения.

Так, Лоу⁴ описывает грязевые пятна, образующиеся на поверхности ровной морены при весеннем оттаивании грунта (рис. 16). Грязевые пятна имеют форму, близкую к круглой, и окружены чистыми камнями. Расстояние между центрами пятен составляет 3—4 м, что хорошо соответствует лабораторным данным Бенара для соотношения между горизонтальными и вертикальными размерами ячеек, если предположить, что грунт оттаивает на глубину до 1 м.

Повидимому, более развитую форму представляют так называемые «каменные кольца» и «каменные многоугольники»^{18,19}, возникающие при значительном количестве мелкозёма в составе грунта.

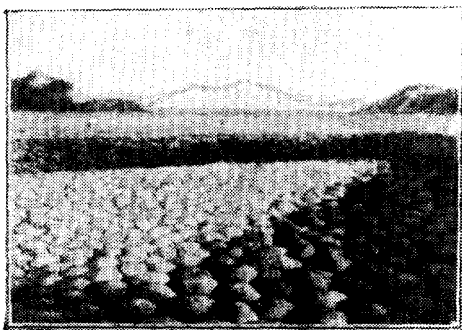


Рис. 13. Гексагональные полигоны на Шпицбергене.



Рис. 14. «Таймырские полигоны» на Шпицбергене.

Они состоят из мелкозернистого материала в центре, образующего выпуклый круг или многоугольник, и каменного бордюра вокруг него. Бордюры представляют собой либо изолированные каменные кольца, либо каменную сеть.

Скопления мелкозёма имеют вид конуса, обращённого вершиной вниз (см. статью А. А. Григорьева¹⁸). Поверхность мелкоземного



Рис. 15. Прямоугольные полигоны на второй террасе р. Бедер-анара (приток р. Лены).

ядра выпуклая; ширина его достигает 1—1,5 м; вершина ядра возвышается на 20—25 см над краем. Высота каменного бордюра над тем же уровнем около 30 см, а ширина бордюра 30—50 см. Дифференциация материалов наблюдается до глубины 50—60 см.

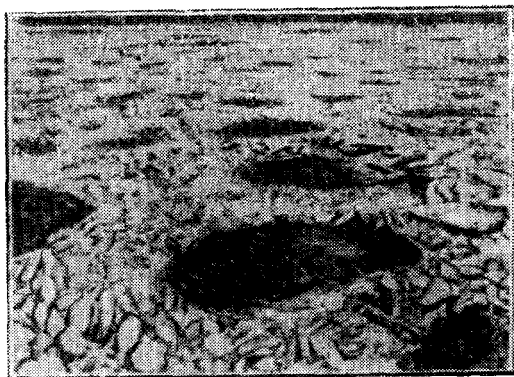


Рис. 16. Грязевые пятна, образующиеся во время оттаивания почвы на Шпицбергене.

Подобные же полигоны, но меньшего размера (диаметр до 50 см) встречаются на ледниках, покрытых мелкозёмом¹⁹.

В районах бореальной зоны аналогичное мелкобугристому микрорельефу субарктики образование представляет кочкарник.

Весьма возможно, что ячеистые структуры образуются и в жидком металлическом ядре земного шара, где температура растёт к центру земли, а плотность практически не изменяется с давлением. Из наличия таких структур исходит Я. И. Френкель²⁰ в своей теории земного магнетизма.

III. ПРИЧИНЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЯЧЕИСТЫХ СТРУКТУР В ПРИРОДНЫХ УСЛОВИЯХ

(Качественная теория)

После того как мы дали краткий обзор ячеистых структур, возникающих в слоях газа или жидкости в природных условиях, перейдём к выяснению причин, обуславливающих конкретные формы этих образований.

§ 1. Ячеистые структуры в атмосфере

Как уже указано во введении, условие неустойчивости для слоя воздуха состоит в том, что в этом слое потенциальная температура убывает с высотой, т. е. температура убывает с высотой быстрее, чем по адиабатическому закону. При выполнении этого условия в слое могут возникать конвективные движения, а следовательно, и ячеистые структуры, особенно ясно обнаруживающиеся в строении облаков.

Для вертикального градиента температуры в слоистых облаках, расчленённых на мелкие облачка или на гряды, Мэл² приводит следующие данные, полученные во время самолётных подъёмов:

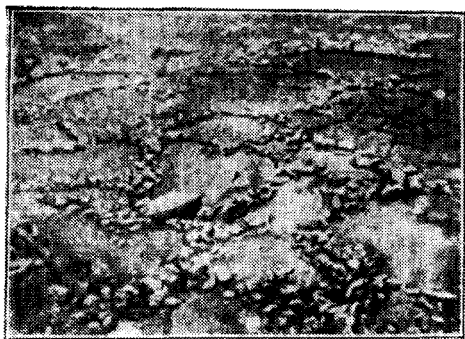


Рис. 17. Каменные многоугольники на Шпицбергене.

Дата	Максим. градиент температуры (в градусах на 100 м высоты)	Толщина слоя, в котором наблюдается данный градиент температуры (в м).
1/IX 1928	1,40	65
13/IX 1928	1,10	88
14/IX 1928	1,23	171
15/IX 1928	1,11	144
24/X 1928	1,02	98
5/XI 1928	1,10	75
7/IX 1929	2,30	56
16/IX 1929	1,00	103

Среднее из максимальных градиентов температуры по данным 8 наблюдений равно 1,28. Данные эти не вполне надёжны, так как, во-первых, самолёт поднимался по наклонной кривой и мог попадать в разные температурные условия, не совпадающие с вертикальным

распределением температуры, а во-вторых, сами измерения температуры самолётными приборами могли давать значительные ошибки.

Однако, безусловным является то, что в случае облаков ячеистой структуры градиенты температуры достигают значительно больших значений, чем в обычных слоистых облаках.

Благоприятные условия для образования ячеистых структур в облачных слоях могут возникать двумя путями (см. статью Брента⁷⁾:

1) За счёт поглощения и излучения длинноволновой радиации слоистыми облаками. Вертикальный градиент температуры может достигать больших значений, если нижняя часть облака нагревается благодаря поглощению радиации, идущей снизу, а верхняя охлаждается путём излучения длинноволновой радиации вверх. Коротковолновая радиация, как указывает Брент, скорее отражается облаками типа *St* и *As*, чем поглощается, и не может существенно влиять на их температурный режим.

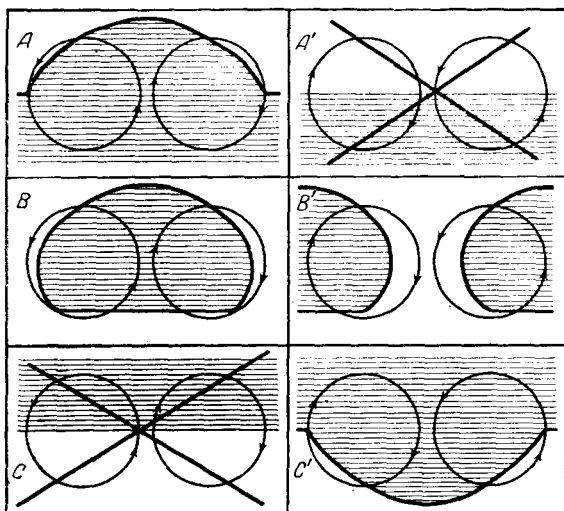


Рис. 18. Схема циркуляции в облачных слоях при наличии неустойчивого состояния.

слои, так и слой сухого воздуха. При этом температура сухого воздуха изменяется на 1°C при изменении высоты на 100 м, а температура влажного воздуха — на $0,5^{\circ}\text{C}$. В результате, при общем поднятии облачный слой оказывается теплее смежных слоёв сухого воздуха, и возникает неустойчивое состояние по отношению к вышележащему слою. При опускании влажный воздух становится холоднее сухого воздуха, и возникает неустойчивость облачной массы по отношению к нижележащему слою. Общее поднятие осуществляется, например, при движении вдоль фронтальной поверхности, а опускание массы воздуха наблюдается в тылу гроз.

Для выяснения возможных форм облаков ячеистого строения мы предлагаем следующую схему (рис. 18).

а) Неустойчивое состояние у верхней границы облака. (Клетки верхнего ряда.) Облако имеет более высокую температуру, чем вышележащий сухой воздух, например, благодаря общему

поглощению радиации, идущей снизу, а верхняя охлаждается путём излучения длинноволновой радиации вверх. Коротковолновая радиация, как указывает Брент, скорее отражается облаками типа *St* и *As*, чем поглощается, и не может существенно влиять на их температурный режим.

2) За счёт поднятия или опускания всей массы воздуха, содержащей как облачные

поднятию воздушной массы. В случае *A* при поднятии струи влажного воздуха в слой с более низкой температурой происходит дополнительная конденсация водяного пара, сопровождающаяся выделением тепла. Это в свою очередь будет способствовать дальнейшему поднятию. Восходящая струя активна, является, так сказать, струей-лидером. Одновременно происходит компенсирующее, более медленное движение в окружающем струю пространстве. Развивается циркуляция с восходящим потоком в центре ячейки. Поверхность облака примет при этом всхолмленный вид, как на рис. 9. Обратная циркуляция (случай *A'*) не может развиваться, так как струя холодного сухого воздуха, направленная вниз, при перемешивании с облачной массой создаст понижение влажности, и часть капель будет испаряться, вызывая охлаждение облака. Разница температур между облаком и вышележащим слоем сухого воздуха станет падать, и процесс затухает.

б) Неустойчивое состояние внутри облачного слоя. (Клетки среднего ряда.) Оно может возникать за счёт охлаждения верхних его слоёв через излучение, направленное вверх, и нагревания нижних слоёв благодаря поглощению излучения, идущего снизу. При градиенте температуры в облаке, большем, чем влажно-адиабатический, поднимающийся пакет влажного воздуха остаётся всё время теплее окружающего облака, а опускающийся пакет — всё время холоднее его. Вне струи возникают компенсирующие потоки. В результате создаётся конвективное движение, охватывающее и примыкающие к облаку слои воздуха. Направление циркуляции должно зависеть от дополнительных причин, так как оба направления движения являются активными. Такими причинами могут быть: 1) распределение температуры, 2) распределение влажности.

Так как конвективную ячейку можно рассматривать как термодинамическую машину, для которой подстилающий слой является нагревателем, а вышележащий слой холодильником, то температура воздуха под облаком должна быть во всяком случае не ниже температуры нижнего основания облака, а температура воздуха над облаком — не выше температуры верхнего основания облака.

Существенной может оказаться величина градиента температуры в верхней и нижней части неравновесного слоя. Высокий градиент температуры в нижней части слоя должен способствовать возникновению восходящих струй, увеличивающих перенос тепла вверх. Точно так же высокий градиент температуры в верхней части слоя должен вызывать появление нисходящих струй. Этот вывод согласуется с результатами описанных выше лабораторных опытов Шмидта и Сондерса для воды и воздуха и опытов Чандра для дыма.

Влияние влажности воздуха под облаком также может быть существенным для установления того или иного типа циркуляции. Если влажность велика, то поднимающиеся струи вызывают конвекцию на уровне основания облака и, следовательно, дополнительное выделение

тепла, активизирующее восходящий поток. Нисходящий поток не активен. При сухом воздухе под облаком, наоборот, вынос вниз облачной массы вызывает испарение капель, а следовательно, охлаждение окружающего воздуха, активизирующее нисходящий поток. Восходящий поток в этом случае тормозится.

Таким образом при наличии неравновесного состояния внутри облака можно ожидать размывания слонстого облака на отдельные мелкие облачка (рис. 6) в случае конвекции с восходящим потоком в центре ячейки (случай *B*) и размывания на кружевную структуру с правильно расположенными круглыми просветами (рис. 7) при конвекции с нисходящим потоком в центре ячейки (случай *B'*).

в) Неравновесное состояние у нижнего основания облака. (Клетки нижнего ряда). Возникает либо при опускании всей воздушной массы, содержащей как влажный, так и сухой воздух, либо за счёт прогрева слоя воздуха под облаком благодаря турбулентному притоку воздуха снизу, от земной поверхности. В первом случае относительная влажность воздуха под облаком, как правило, мала. Восходящий поток тёплого сухого воздуха, проникающий в облако, вызывает испарение некоторого количества капель (а значит, охлаждение окружающей воздушной массы) и тормозится. Наоборот, нисходящий поток влажного воздуха в слой сухого воздуха является активным. При достаточной мощности облака, вниз будут выноситься всё новые и новые облачные массы, влажность воздуха увеличится и испарение ослабит. Возникает облако вида *mammato cumulus* (см. рис. 10). При значительном охлаждении всей массы нижележащего слоя сухого воздуха причина неустойчивости исчезает и *mammato* рассасываются. Особенно быстро этот процесс идёт, если из облака начинает идти дождь.

Если воздух под слонстым облаком влажный, то восходящий поток развивается так же, как в кучевом облаке, и, как указано выше, правильная циркуляция не может установиться. Возникает облако типа *Castellatus*. Нисходящие потоки, сопровождающиеся медленным испарением, приводят к постепенному охлаждению нижележащего слоя и, следовательно, несут в самих себе причину своего затухания.

Рассмотренная выше ячеистая структура облаков имеет место в том случае, если в облачном слое и на его границах нет изменения горизонтальной скорости ветра с высотой. При наличии относительного ветра наблюдается, подобно картине дыма в камере Уокера, вытягивание ячеек и превращение их при соответствующих условиях в облачные гряды (см. рис. 8). Именно, незначительный относительный ветер вызывает деформацию линий тока, а следовательно, асимметрию циркуляции. Если снос относительным ветром за один цикл такого же порядка величины, как горизонтальный размер обычной ячейки, то видимые границы между соседними облачными ячейками в направлении относительного ветра стираются, и группа ячеек сливается в гряду.

§ 2. Ячеистые структуры микрорельефа земной поверхности

На роль конвективной циркуляции в образовании ячеистых структур микрорельефа Арктики и Субарктики уже указывали Лоу⁴, Грипп⁹ и ряд других авторов. Однако их идеи встретили многочисленные возражения. Важнейшие из них следующие (см., например, статью Гладчина¹⁹):

1) Температура поверхности грунта испытывает значительные колебания и состояние, при котором даже в течение нескольких часов поддерживается определённая разность температур в некотором слое (около 4°С наверху и 0°С в глубине), осуществляется редко. В то же время конвективные движения при большой вязкости являются медленными.

2) Влажность почв во многих ячеистых структурах микрорельефа недостаточна для выполнения критерия Релея; по вычислениям Штехе⁶ необходимая влажность порядка 60%, т. е. находится на пределе насыщения почв.

3) Механические силы, развиваемые при конвективной циркуляции, недостаточны для перемещения камней и, следовательно, с её помощью нельзя объяснить образования каменных колец, каменных многоугольников и каменных полос.

Эти возражения базируются главным образом на подсчёте Штехе, который основан на недоразумении. Во-первых, Штехе принял для коэффициента температуропроводности λ разжиженных грунтов значение 0,2, тогда как в действительности среднее значение порядка 0,005 см²/сек²³; во-вторых, для случая разжиженных почв, расположенных на вечной мерзлоте или плотном грунте, нужно применять критерий $K \geq 1100,65$ (см. IV, § 3), а не критерий Релея (23).

Внесение этих исправлений приводит к заключениям, что: а) циркуляция может возникать при гораздо меньшей влажности грунта, чем полученная Штехе, б) колебания температуры верхней поверхности на несколько градусов не будут нарушать критерия неустойчивости при достаточной толщине слоя.

Для выяснения возможной роли конвективных движений обратимся к конкретным формам микрорельефа.

1. Бугристый микрорельеф. Рассмотрим для примера описание бугров в районе Щучьего озера на Кольском полуострове, данное М. И. Сумгиным¹⁵. Бугры образовались на болоте, представляющем собой жидкую плавунную массу глубиной до 2 м, покрытую плавающим сверху слоем торфяника. Средняя высота бугров — около 1 м. Прорывание шурфов в буграх показало, что они состоят из верхнего торфяного слоя и мёрзлого минерального ядра, содержащего супесь и илесто-глинистую массу. При оттаивании эта масса превращается в плавун. Мёрзлое ядро зачастую не достигает дна,

а плавает в жидкой массе болота. В промежутках между буграми торфяной слой оттаивает полностью.

Посетив тот же район через 4 года, М. И. Сумгин²¹ обнаружил, что исследовавшиеся им бугры сели на твёрдый грунт, образующий дно болота, и стали ниже.

Летние замеры температуры плавунной массы болота показали, что на дне его температура равна 2°C , а непосредственно под торфяным слоем $3,6^{\circ}\text{C}$.

Таким образом условия для возникновения конвективного движения в жидком слое налицо. Имеется необходимая инверсия в распределении плотности с высотой. Низкая теплопроводность плавающего торфяного слоя обеспечивает значительную устойчивость температуры на верхнем уровне плавбуна. Восходящие потоки циркуляции приносят вверх частицы почвы, которые удерживаются в слое торфяника. Обеспечиваются условия некоторого поднятия торфяного покрова над центрами ячеек. В начале зимы под буграми, в их начальной стадии развития, возникают линзы из промёрзшего плавбуна как благодаря лучшим условиям промерзания бугристого рельефа, так и благодаря подтоку снизу жидкости, имеющей более низкую температуру. Расширение грунта при замерзании способствует дальнейшему выпиранию бугра. В свою очередь, мёрзлая линза благоприятствует развитию нисходящих токов более тяжёлой жидкой массы, именно в промежутках между буграми, так как температура плавбуна около линзы ниже, а следовательно, его удельный вес меньше. В следующие годы циркуляция развивается в тех же местах, и процесс роста продолжается.

Чем однороднее условия на всей площади, тем правильнее будет система бугров. Тот факт, что размер бугров (и расстояния между ними) тем больше, чем толще слой плавбуна, вполне соответствует опытным данным в лабораторных условиях. Отношение расстояния между буграми к толщине слоя жидкого грунта должно быть порядка 3:1.

Участие конвекции в образовании грязевых пятен (см. рис. 16) на ровных моренных полях Шпицбергена при наличии достаточно увлажнённых почв во время весеннего оттаивания представляется вполне естественным. Камни служат как бы твёрдым каркасом, не нарушающим основных условий циркуляции.

Что касается каменных колец и многоугольников, то, конвекция при оттаивании верхнего слоя грунта может приводить к перераспределению мелкозёма, увеличивая его долю в местах восходящих потоков и вымывая его вниз там, где имеются нисходящие потоки. Вслед за этим действуют и другие силы, связанные с коллоидным набуханием почвы (см. статью Штехе⁶), действием мороза и т. д.

Вопрос о возникновении конвекции в этих условиях нуждается ещё в исследовании. Возможно, что наиболее благоприятные условия для циркуляции создаются в том случае, когда имеется значи-

тельная доля мелкозернистого, не растворяющегося в воде материала, допускающего циркуляцию воды в промежутках между частицами.

Унос наиболее мелких частиц водой в периоды, когда циркуляции нет, может приводить к образованию правильно расположенных островков щебня среди крупных камней.

Миграция камней, повидимому, обуславливается процессами выпирания их из мелкозёма при чередовании замерзания и оттаивания грунта (*Auffrieren* у Штехе⁶) и последующего сползания вниз камней, поднятых на выпуклую поверхность мелкозернистого ядра.

Мы освещаем этот вопрос бегло, желая лишь привлечь к нему внимание, но не пытаясь дать исчерпывающего объяснения, так как для окончательного вывода нет достаточного материала.

В возникновении болотного кочкарника существенную роль должно играть весеннее оттаивание почвы, когда в неглубоком оттаявшем слое имеется неустойчивое состояние. Минеральные частицы, приносимые к корням растительного покрова восходящими течениями циркуляции, благоприятствуют росту растительности (различные виды осок и другие растения). Нисходящие потоки, наоборот, оголяют корневую систему и способствуют гибели растительного покрова (если он был) и создают понижения рельефа, в которых обычно скопляется вода. Ежегодные отложения органической массы приводят к дальнейшему росту кочкарника.

2. Гряды. Возникновение гряд на склонах при наличии пльвунных почв, сползающих вниз по твёрдой мёрзлой подстилающей поверхности, аналогично образованию облачных гряд. Торможение нижнего слоя трением о твёрдую поверхность обеспечивает изменение скорости с высотой, а следовательно, вытягивание ячеек вдоль по склону. Такие как бы наплывающие друг на друга вытянутые ячейки действительно наблюдаются на пологих склонах. При соответствующих условиях (крутизна склона, вязкость жидкой почвы и т. д.) возникают гряды.

3. Трещинные полигоны. Возникновение трещинных полигонов обычно объясняется растрескиванием почвы или при её усыхании, или во время сильных морозов (см. статьи Штехе⁶, С. В. Обручева¹⁷, А. И. Гусева¹⁶). Однако правильность расположения трещин, образующих часто строго ортогональную систему или систему шестиугольников, не нашла в этих теориях достаточного объяснения. В то же время бросается в глаза исключительное сходство формы трещинных гексагонов с картиной поверхности жидкости в лабораторных опытах Бенара, Мэла и других авторов, а также сходство ортогональных трещин с просветами четырёхугольных облаков.

Можно представить себе возникновение конвекции в глинистых жидких грунтах при постепенном уменьшении влажности в условиях, близких к прекращению текучести. Дальнейшее усыхание почвы может приводить к закреплению установившейся формы поверхно-

сти и к появлению трещин в местах понижений микрорельефа. Точно так же и морозное растрескивание будет облегчено в тех же местах.

Таким образом, конвекция в ещё не отвердевшем грунте может готовить условия для последующего растрескивания под действием других сил. Тогда становится естественной и выпуклая форма шестиугольных шашек между трещинами.

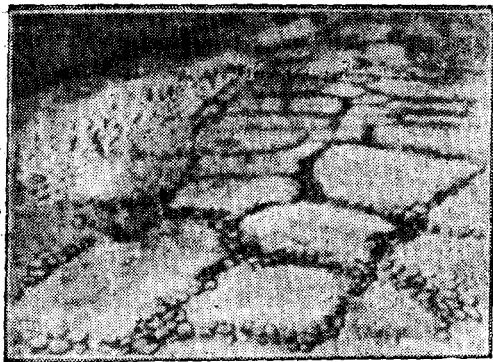


Рис. 19. Полигоны 1-го и 2-го порядков на Шпицбергене.

ячейки 2-го порядка создаются, главным образом, в пониженных частях полигонов, где больше всего увлажнение.

Гексагональные фигуры на поверхности почвы встречаются и в южных районах (например в Иране, см. рис. 20, заимствованный из статьи Штехе⁶⁾). Там неустойчивое состояние в слое жидкой почвы возникает благодаря интенсивному испарению с поверхности, сопровождающемуся охлаждением.

Этим же можно объяснить и плоскую или даже вогнутую форму шашек, так как высыхание поверхности происходит весьма интенсивно и возникает сильное стягивание верхнего слоя корки.

Прямоугольная форма полигонов, так же как и шестиугольная, вполне объясняется теорией (см. ниже), так что возникновение ортогональной системы трещин вполне возможно при соответствующих условиях. Каковы эти условия, определяющие форму полигонов, пока ещё неясно. Возможно, что существенную роль играют условия на боковых границах

Появление ячеек 2-го порядка (рис. 19) можно объяснить тем, что при последующих увлажнении верхнего слоя грунта влага уже не проникает на большую глубину благодаря трещинам, и неустойчивое состояние создаётся в более тонком слое, что приводит к образованию ячеек меньшего размера, притом



Рис. 20. Полигоны на высохшей солончаковой почве в Иране.

слоя. Замечено, что направление трещин в ортогональной системе всегда параллельно и перпендикулярно к бровке террасы или берегу водоёма. При непрямолинейных границах площади, на которой возникают полигоны, они имеют шестиугольную или неправильную форму.

IV. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ЯВЛЕНИЯ

В данной главе мы даём краткое изложение статьи Пеллю и Саусвелла¹¹, в которой развита теория конвективных движений в слое жидкости с аномальным распределением плотности при любой симметричной форме ячеек.

Рассмотрим слой жидкости высоты h , причём жидкость мы будем предполагать несжимаемой. С боков слой ограничен теплоизолирующими стенками. В лабораторных условиях это достигалось покрытием боковых стенок камеры войлоком или другими материалами.

В естественных условиях перенос тепла идёт, главным образом, в вертикальном направлении, и потерями тепла в стороны практически можно пренебречь (при отсутствии общего переноса всей массы жидкости).

Нижняя и верхняя поверхности слоя предполагаются горизонтальными и теплопроводящими. Если бы последнее условие не выполнялось хотя бы для одной из поверхностей, то конвективное движение не могло бы установиться, так как температура во всём слое постепенно уравнилась бы путём теплопроводности. Невозможность конвективного движения в этом случае непосредственно следует так же из 2-го начала термодинамики.

Плотность жидкости в слое увеличивается с высотой, например, благодаря равномерному подогреванию снизу и охлаждению сверху.

§ 1. Общие уравнения

Для того, чтобы исследовать движение жидкости, напомним систему уравнений:

а) Уравнение движения в форме Эйлера

$$\rho \frac{d}{dt}(u, v, w) = \rho(0, 0, -g) - \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) p + \gamma \rho \Delta(u, v, w), \quad (1)$$

где u, v, w — компоненты скорости частицы жидкости, проходящей через данную точку (x, y, z) , ρ — плотность жидкости, p — давление, γ — коэффициент кинематической вязкости, Δ — оператор Лапласа.

Первый член справа даёт силу тяжести (ось Z направлена вверх), второй — градиент давления и третий — силу трения.

б) Уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (2)$$

в) Уравнение для зависимости плотности от температуры

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha \vartheta') = \rho_0 (1 - \alpha \beta z), \quad (3)$$

где α — коэффициент расширения, ϑ' — температура жидкости, β — вертикальный градиент температуры (принимается постоянным). На нижнем уровне ($z=0$) принимается $\vartheta'=0$.

г) Уравнение температуропроводности

$$\frac{d\vartheta'}{dt} = k \Delta \vartheta', \quad (4)$$

где k — коэффициент температуропроводности.

Для решения этой системы уравнений делается следующее упрощающее предположение: скорости u, v, w в конвективном движении и отклонения температуры, плотности и давления от равновесных значений (вызываемые конвекцией) предполагаются малыми, так что их вторыми и высшими степенями можно пренебречь.

Тогда вместо (2) можно написать

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2')$$

так как $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ будет величиной 2-го порядка малости, если подставить (3) и учесть, что α мало.

Исключая из трёх уравнений (1) и уравнения (2') u, v, p , мы получим вместо (1):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \Delta w = g \alpha \Delta_1 \vartheta, \quad (5)$$

где ϑ обозначает отклонение температуры от равновесного значения и

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Вместо (4) после ряда преобразований, получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k \Delta \right) \vartheta = -\beta w. \quad (6)$$

Из двух уравнений (5) и (6) можно исключить ϑ , и мы будем иметь одно уравнение 6-го порядка для определения w :

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - k \Delta \right) \Delta + \alpha \beta g \Delta_1 \right] w = 0 \quad (7)$$

или, исключая w , аналогичное уравнение для ϑ .

Следовательно, достаточно найти вид одной из этих функций, и задача будет решена.

Что касается других компонент скорости u и v , то они связаны с w простой зависимостью, которая будет приведена ниже.

§ 2. Граничные условия

Выясним теперь граничные условия, которым должно удовлетворять решение.

1. Условия на боковой поверхности ячейки:

а) При слое жидкости, неограниченном по площади, боковые поверхности ячеек являются поверхностями симметрии; для них должны выполняться условия:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0, \quad (8)$$

где n — внешняя нормаль к поверхности ячейки.

б) Если границей служит непроводящая тепла твёрдая поверхность, вдоль которой нет скольжения, то условиями на ней будут:

$$w = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0. \quad (9)$$

2. Условия на верхней и нижней границах:

а) Для свободной поверхности имеем граничные условия:

$$w = 0, \quad \vartheta = 0, \quad (10)$$

т. е. вертикальная составляющая скорости отсутствует при любых x, y, t , и температура поддерживается постоянной (отклонение от равновесной температуры равно нулю).

Кроме того, для горизонтальных составляющих скорости должны выполняться условия

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Дифференцируя (2') по z и пользуясь (5), можно показать, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} = \dots = 0, \quad (11)$$

т. е. все чётные производные w по z равны нулю.

б) Для твёрдой поверхности, вдоль которой нет скольжения и которая поддерживается при постоянной температуре, имеем:

$$u = v = w = 0, \quad \vartheta = 0. \quad (12)$$

Кроме того, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, а значит, по (2')

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (13)$$

Вместо условия для ϑ можно, с помощью (5), написать третье условие для w .

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \Delta w = 0. \quad (14)$$

§ 3. Решение уравнения (7)

Чтобы получить решение уравнения (7), соответствующее ячеистой структуре жидкости, мы должны искать его в виде *):

$$w(x, y, z, t) = f(x, y) \cdot F(z) \cdot \Phi(t), \quad (15)$$

где $f(x, y)$ — периодическая функция, так что для $\Delta_1 f$ можно написать

$$\Delta_1 f = -\frac{a^2}{h^2} f, \quad (16)$$

где a — постоянная, характеризующая горизонтальные размеры ячейки.

Зависимость от времени предполагается экспоненциальной

$$\Phi(t) = e^{\sigma t}. \quad (17)$$

Можно в общем случае принять σ комплексной величиной

$$\sigma = p + iq.$$

Пеллю и Саусвелл показывают, анализируя уравнения (5) и (6) и пользуясь формулой Грина, что при $\alpha\beta > 0$ вещественная часть σ $p < 0$, т. е. осциллирующее движение может быть только затухающим.

Если α и β имеют разные знаки, т. е. в интересующем нас случае аномального распределения плотности с высотой, то $q = 0$, т. е. σ вещественно. Стационарное конвективное движение устанавливается в случае $p = 0$. Для этого случая мы должны, таким образом, положить

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0.$$

Уравнение стационарного конвективного движения принимает, с учётом (16), вид

$$k\nu \Delta^3 w - \alpha\beta g \frac{a^2}{h^2} w = 0 \quad (18)$$

или, введя новую переменную $\xi = \frac{z}{h}$ и обозначая

$$D = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \lambda^3 = -\frac{\alpha\beta g h^4}{k\nu a^4} \quad (\lambda > 0),$$

получаем:

$$(D^2 - a^2)^3 w + \lambda^3 a^6 w = 0. \quad (18')$$

Общее решение этого уравнения:

$$w = \sum_{i=1}^3 (A_i \operatorname{ch} 2\mu_i \xi + B_i \operatorname{sh} 2\mu_i \xi), \quad (19)$$

*) Можно показать ¹¹, что переменные не разделяются, если хотя бы одна из горизонтальных границ теплоизолирующая.

где A_i, B_i — произвольные постоянные, $2\mu_i$ — корни характеристического уравнения для D :

$$(D^2 - a^2)^3 = -\lambda^3 a^6. \quad (18'')$$

Один из этих корней мнимый и два комплексных.

Так как имеется 6 произвольных постоянных, то на каждой из горизонтальных границ должны выполняться 3 условия.

Если поместить начало координат в центр ячейки, то на границах $\xi = \pm \frac{1}{2}$ и в (19) можно разделить чётное и нечётное решения.

Рассмотрим различные возможные виды верхнего и нижнего оснований ячейки:

а) Две свободные поверхности (случай Релея). Для обеих поверхностей должны удовлетворяться граничные условия (10) и (11).

Рассмотрим сначала чётное решение (симметрия относительно плоскости $\xi = 0$, см. рис. 21; направление циркуляции выбрано произвольно):

$$w_{\text{чёт}} = \sum_{i=1}^3 A_i \operatorname{ch} 2\mu_i \xi.$$

Это решение соответствует ячейистой структуре облаков.

Составляя $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$ и $\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4}$ и учитывая, что $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$, мы получим, например, при $A_1 \neq 0$ ($A_2 = A_3 = 0$)

$$\mu_1 = in \frac{\pi}{2} \quad (n \text{ — нечётное}), \quad (20)$$

и решение, удовлетворяющее граничным условиям, будет

$$w_{\text{чёт}} = A \cos n\pi \xi \quad (21)$$

(n — число ячеек по вертикали).

Подставляя (20) в характеристическое уравнение (18''), мы найдём зависимость λ от a :

$$\lambda^3 = \left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}\right)^3. \quad (22)$$

Введём величину $K = \lambda^3 a^4$, называемую характеристическим числом.

Наименьшее значение K , при котором устанавливается конвективное движение, оказывается при $a^2 = n^2 \frac{\pi^2}{2}$ (при наименьшем значении n , равном 1).

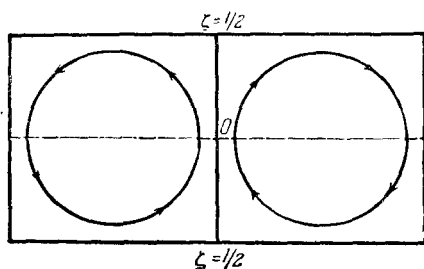


Рис. 21. Схема конвекции при симметричном решении.

Следовательно, условие

$$K = -\frac{\alpha \beta g h^4}{k \nu} \geq \frac{27 \pi^4}{4} = 657,5$$

является условием установления стационарного конвективного движения.

Переходя к обозначениям Релея:

$$\beta = \frac{\theta'_1 - \theta'_0}{h}, \quad \alpha = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0 (\theta'_0 - \theta'_1)},$$

где индекс «0» относится к нижней границе, а индекс «1» к верхней границе, мы приходим к критерию Релея:

$$\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} \geq \frac{27 \pi^4 k \nu}{4 g h^3}. \quad (23)$$

Аналогично находится нечётное решение (антисимметрия относительно плоскости $\zeta = 0$, рис. 22. Направления циркуляции выбраны произвольно):

$$\omega_{\text{неч}} = B \sin 2m\pi\zeta \quad (21)$$

(m — целое, не нуль),

и зависимость между λ и a выражается формулой

$$\lambda^3 = \left(1 + \frac{4m^2\pi^2}{a^2}\right)^3. \quad (22')$$

Наименьшее значение $m=1$ соответствует $n=2$ в (22), т. е. в слое возникает два яруса ячеек.

б) Две твёрдые границы. Должны удовлетворяться граничные условия (12), (13) и (14) для ω .

Получим для чётного решения:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch} \mu_1 & \operatorname{ch} \mu_2 & \operatorname{ch} \mu_3 \\ \mu_1 \operatorname{sh} \mu_1 & \mu_2 \operatorname{sh} \mu_2 & \mu_3 \operatorname{sh} \mu_3 \\ (4\mu_1^2 - a^2)^2 \operatorname{ch} \mu_1 & (4\mu_2^2 - a^2)^2 \operatorname{ch} \mu_2 & (4\mu_3^2 - a^2)^2 \operatorname{ch} \mu_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Первый корень этого уравнения: $2\mu_1 = ia \sqrt{\lambda - 1}$. Остальные два комплексных сопряжённых корня полагаем в виде:

$$2\mu_2 = (\eta - i\kappa)a, \quad 2\mu_3 = (\eta + i\kappa)a.$$

Для зависимости λ от a находим:

$$-\sqrt{\lambda - 1} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{a}{2} \sqrt{\lambda - 1} \right) = \frac{(\eta + \sqrt{3}\kappa) \operatorname{sh} a\eta + (\sqrt{3}\eta - \kappa) \sin a\kappa}{\operatorname{ch} a\eta + \cos a\kappa}.$$

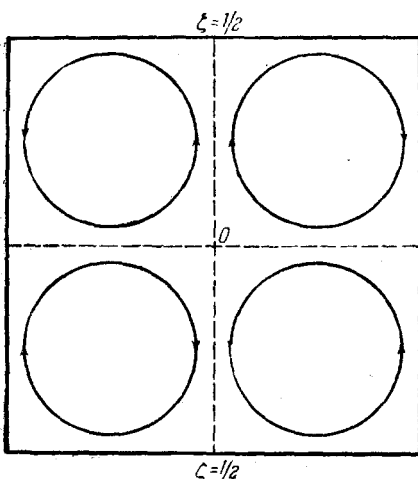


Рис. 22. Схема конвекции при антисимметричном решении.

Решение этого уравнения находится графически. Условие устойчивости конвективного движения получает окончательный вид

$$K \geq 1707,8 \text{ при } a \approx 3,13.$$

Аналогично исследуется нечётное решение.

с) Одна свободная поверхность и одна твёрдая граница. Оказывается, что нечётное решение для случая (b) удовлетворяет граничным условиям (10) и (11) при $\zeta = \pm \frac{1}{2}$ и условиям (12), (13) и (14) при $\zeta = 0$.

Поэтому мы можем распространить его на случай (с), считая, что толщина слоя вдвое меньше, чем в случае (b).

Условие устойчивости имеет в этом случае вид

$$K \geq 1100,65 \text{ при } a \approx 5,36.$$

§ 4. Зависимость вертикальной составляющей скорости w от x и y

Для нахождения зависимости $w(x, y)$ мы должны удовлетворить условию на боковых границах ячейки. Если это будет поверхность симметрии, то должно выполняться условие

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0. \quad (8)$$

Условия симметрии требуют ¹¹, чтобы число граней призмы выражалось формулой

$$N = 2 + \frac{4}{l-2},$$

где l — целое число.

Имеются три возможности:

- 1) в основании призмы равносторонний треугольник со стороной L ,
- 2) » » прямоугольник со сторонами L_1 и L_2 ,
- 3) » » правильный шестиугольник со стороной L .

Случай (1) рассматриваться не будет, так как решение для случая (3) распространяется и на (1).

Случай (2) рассмотрен Релеем ⁹. Граничное условие (8) будет удовлетворяться, если положить

$$w = w_0(z) \cos \frac{m\pi x}{L_1} \cos \frac{n\pi y}{L_2}. \quad (24)$$

Начало координат взято в центре четырёхгранной призмы, а m и n — чётные числа.

Связь величин, входящих в (24), с a находится из условия (16):

$$\frac{m^2}{L_1^2} + \frac{n^2}{L_2^2} = \frac{a^2}{h^2}. \quad (25)$$

Случай (3). Решение находится методом Кристоферсона. Подбирается такое решение, которое симметрично относительно полярной оси $\varphi=0$ и не меняется при увеличении угла φ на $\frac{\pi}{3}$. Помещая начало координат в центр шестиугольника, мы можем положить:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{3} w_0 \left[\cos \frac{2\pi}{3L} (\sqrt{3} x + y) + \cos \frac{2\pi}{3L} (\sqrt{3} x - y) + \cos \frac{4\pi y}{3L} \right] = \\ &= \frac{1}{3} w_0 \left[\cos \frac{2\pi r}{3L} (\sqrt{3} \cos \varphi + \sin \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{2\pi r}{3L} (\sqrt{3} \cos \varphi - \sin \varphi) + \cos \frac{4\pi r}{3L} (\sin \varphi) \right], \end{aligned} \quad (26)$$

где r — радиус в полярных координатах, w_0 — значение w в начале координат.

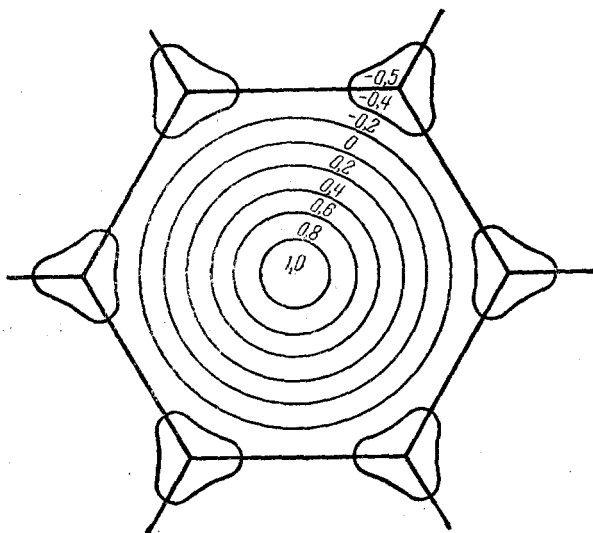


Рис. 23. Линии равных вертикальных составляющих скорости циркуляции для горизонтального сечения, проведенного через центр гексагональной ячейки.

Легко проверить, что функция (26) удовлетворяет граничному условию (8), если n — целое число.

Зависимость между a и величинами, входящими в (26), находится из (16):

$$\frac{a}{h} = \frac{4\pi}{3L}. \quad (27)$$

Вид функции (26) дается на рис. 23. Цифры выражают отношение $\frac{w}{w_0}$ для плоскости $z=0$.

В центре ячейки имеется восходящее течение, на периферии — нисходящее.

Радиус круга с нулевой вертикальной составляющей скорости равен $r_0 = 0,58 L$. Следовательно, площадь, через которую проходит восходящий поток, равна $S_+ = 1,07 L^2$, а сечение нисходящего потока $S_- = 1,53 L^2$.

После того как найдена вертикальная составляющая скорости w , можно вычислить горизонтальные составляющие u и v по формулам

$$u = \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}, \quad v = \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y}, \quad (28)$$

которые получаются из первых двух уравнений (1) и уравнений (2') и (16).

§ 5. Применение теории к атмосфере

Для применения теории к атмосфере нужно учесть, что здесь турбулентная вязкость играет большую роль, чем молекулярная вязкость, и перенос тепла путём турбулентного обмена более значителен, чем путём молекулярной теплопроводности.

Поэтому Лейле¹² предложил заменить 3-й член в уравнении (1) на обменный член

$$\nu \rho \Delta(u, v, w) \rightarrow A \Delta(u, v, w)$$

и вместо уравнения (4) писать уравнение переноса тепла путём обмена

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{A}{\rho} \Delta\theta, \quad (29)$$

где A — коэффициент обмена, θ — потенциальная температура. Тогда основное уравнение для w примет вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{A}{\rho} \Delta\right)^2 \Delta w + g \alpha^2 \Delta_1 w = 0 \quad (30)$$

и решается аналогично (7).

В критерии Релея нужно только заменить произведение

$$k\nu \rightarrow \left(\frac{A}{\rho}\right)^2.$$

Например, при слое облаков мощностью 100 м конвективное движение будет развиваться, если выполняется условие

$$\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} \geq \frac{27\pi^4 A^2}{4gh^3 \rho^2} = 0,004.$$

Для расчёта мы положили $A = 10^2 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$, $\rho = 1,3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Так как коэффициент расширения газов равен $\alpha = \frac{1}{273} \text{град}^{-1}$, то для образования ячеистой структуры из сплошного слоистого облака достаточно, чтобы разность температур между нижним и верхним его основаниями достигла 1° . Это значение, по порядку величины, хорошо согласуется с опытными данными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ячеистые структуры в слоях жидкости и газа при наличии неустойчивого состояния имеют, как мы видели выше, довольно значительное распространение в природе.

Изучение их, помимо научного интереса, имеет и практическое значение.

Так, например, зная закономерности образования ячеек в облаках, можно судить по их внешнему виду о состоянии соответствующих слоёв атмосферы.

Изучение ячеистых структур почв имеет существенное значение для народного хозяйства Субарктики.

Для дальнейшего развития теории важно выяснение таких данных, как величина скорости циркуляции, условия образования той или иной формы ячеек, распределение температуры в неустойчивом слое, распространение тепла при наличии конвективного движения. Для почв, в которых возникают ячеистые структуры, необходимо накопление опытных данных по влажности, вязкости и теплопроводности, распределению температур при оттаивании почвы.

В заключение не могу не выразить свою глубокую благодарность Я. И. Френкель и Е. С. Селезнёвой за ряд ценных указаний.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. B é n a r d H. *Ann. d. chim. et phys.*, **23**, 62 (1901).
2. M a l. S. *Beitr. z. Phys. d. fr. Atm.*, **17**, 40 (1931).
3. S c h m i d t R. a. S a u n d e r s O. *Proc. Roy. Soc.*, **A 165**, 216 (1938).
4. L o w A. *Nature*, **115**, 299 (1925).
5. G r i p p K. *Abh. d. Naturwiss. Ver. Hamburg*, **21**, H. 3 (1927).
6. S t e c h e H. *Ber. Verh. d. s ä c h s. Akad. d. Wiss., Leipzig*, **85**, H. IV (1933).
7. B r u n t D. Q. *J. Roy. Met. Soc.*, **63**, 277 (1937).
8. C h a n d r a K. *Proc. Roy. Soc.*, **A 164**, 231 (1938).
9. R a y l e i g h. *Phil. Mag.*, **32**, 529 (1916).
10. J e f f r e y s H. *Phil. Mag.*, **2**, 833 (1926); *Proc. Roy. Soc.*, **A 118**, 195 (1928).
11. P e l l e w A. a. S o u t h w e i l R. *Proc. Roy. Soc.*, **A 176**, 312 (1940).
12. L ö h l e F. *Met. Zschr.*, **58**, 278 (1941).
13. Б е р ж е р о н Т. Трёхмерносвязный синоптический анализ (1934).
14. Г р и г о р ь е в А. А. Субарктика. Изд. АН СССР (1946).
15. С у м г и н М. И. Труды ком. по вечн. мерзл., т. III (1934).
16. Г у с е в А. И. Изв. Гос. геогр. общ., **70**, вып. 3 (1938).
17. О б р у ч е в С. В. Изв. Гос. геогр. общ., **70**, вып. 6 (1938).
18. Г р и г о р ь е в А. А. Проблемы физ. геогр., т. VI (1939).
19. Г л а д к и н И. Н. Изв. Гос. геогр. общ., **68**, вып. 6 (1936).
20. Ф р е н к е л ь Я. И. ДАН., **49**, 98 (1945).
21. С у м г и н М. И. Труды ком. по вечн. мерзл., т. VI (1938).
22. А н д р и а н о в П. И. Труды ком. по вечн. мерзл. т. VII (1939).