

ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ МЕДЛЕННЫХ НЕЙТРОНОВ

Л. М. Хромченко

1. ВВЕДЕНИЕ

Работы 1932—1936 гг. по изучению свойств медленных, так называемых «тепловых» нейтронов, привели физиков к мысли о целом ряде явлений, которые должны были бы иметь место при распространении нейтронных волн.

Действительно, эти работы показали, что нейтроны тепловой группы имеют скорости, распределённые приблизительно по Максвеллу, с максимумом, соответствующим де-бройлевской длине волны нейтрона $\lambda = 1,7 \text{ \AA}$. Это — тот же порядок длин волн, что и в классических экспериментах по рассеянию X-лучей, примерно соответствующий порядку постоянных решётки большинства кристаллов. Естественно было ожидать, что прохождение пучка медленных нейтронов через кристаллы будет сопровождаться теми же явлениями интерференции; дифракции и пр., как и прохождение X-лучей.

Эти априорные соображения, высказанные в 1936 г. Эльзассером, вызвали постановку нескольких специальных опытов, качественно показавших наличие такого рода эффектов.

С другой стороны, несколько позже сам эксперимент натолкнул исследователей на необходимость привлечь гипотезу об интерференции нейтронных волн для объяснения ряда замеченных фактов.

Как известно, одной из основных характеристик ядерных процессов является их эффективное сечение, состоящее из сечения захвата и сечения рассеяния. Это эффективное сечение рассматривалось как величина существенно-ядерная, не зависящая от физического и химического состояния вещества. Отсюда вытекало понятие об аддитивности сечения, т. е. возможности рассматривать сечение сложной молекулы равным сумме сечений её компонент.

Опыты Уитэкера и Байера в 1939 г. заставили эту точку зрения во многом пересмотреть. Ею могло объясняться поведение сечения захвата, в основном характеризующегося энергетической структурой ядра. Для сечения же рассеяния, где приходится учитывать механизм

рассеяния нейтронных волн и их взаимодействие с веществом, картина значительно усложнилась.

Понятие об аддитивности сечений и их независимости от физической структуры вещества пришлось критически пересмотреть и во многих случаях отбросить.

Такого рода результаты, неожиданные с точки зрения прежних понятий и объяснимые с точки зрения интерференции нейтронных волн, дали три группы экспериментов, проделанные в период 1939—1941 гг.

Первая, принципиально наиболее важная, группа включала опыты по пропусканию пучка медленных нейтронов через одни и те же вещества в разных кристаллических модификациях. Эти опыты в ряде случаев дали для монокристаллов и поликристаллов резко отличные сечения рассеяния. Как правило, сечения поликристаллов были больше, что качественно соответствовало картине, ожидавшейся в случае наличия дифракции нейтронов. Для монокристалла с фиксированным положением кристаллических плоскостей лишь узкие полосы нейтронного спектра оказывались удовлетворяющими условиям Лауэ, спектр же в целом должен был пройти без рассеяния, если не считать выбывания нейтронов из пучка вследствие захвата и процессов некогерентного рассеяния. Таким образом, сечение монокристалла в первом приближении можно было рассматривать как верхний предел сечения захвата и некогерентного рассеяния.

В случае поликристалла к этим двум процессам должно было добавляться ещё и когерентное рассеяние, так как всевозможные пространственные ориентации микрокристаллов делали соблюдение условий Лауэ намного более вероятным.

Вторая группа опытов изучала зависимость сечений сплавов от процентного содержания их компонент, степени порядка в сплаве и других факторов. И здесь, для объяснения ряда явлений пришлось обратиться к механизму распространения нейтронных волн и учесть наличие интерференции.

И, наконец, третья серия, посвящённая измерению сечений сложных соединений и сравнению их с сечениями составных элементов, дала заметное отступление от аддитивности в целом ряде случаев. С рассматриваемой точки зрения — это явление было вполне понятно, так как сравнивались сечения, измеренные для веществ в самых разных физических состояниях (газ, жидкость, поликристалл и т. п.), и интерференционные явления, имевшие место в одних случаях, отсутствовали в других.

Эти опыты заставили прочно ввести в ядерную физику понятие о сечении рассеяния, как о величине, характеризующей не только ядерные свойства, но и физическое состояние изучаемого вещества.

Теория этого вопроса несколько опередила эксперимент. Сравнительно рано, с 1937 г., теоретики начали изучать вопрос о прохождении медленных нейтронов через кристаллы. Рассмотрению этой задачи в разных аспектах был посвящён целый ряд работ, как

более ранних (Вик, Померанчук), так и сравнительно новых (Хальперн, Хаммермеш и Джонсон, Сигер и Теллер, Вейнсток).

Здесь, прежде всего, было подчеркнуто как сходство рассматриваемой задачи с рассеянием X -лучей (когерентная часть рассеяния), так и существенные отличия, связанные с намного меньшей энергией нейтронов и большой массой их (некогерентная часть). Наиболее детальному анализу поэтому была подвергнута некогерентная часть рассеяния.

Авторами были рассмотрены взаимодействия нейтронов с тепловыми колебаниями атомов решётки, влияние спина и изотопного состава ядер и других факторов, влияющих на процессы рассеяния. Результатом этого цикла работ явились новые критерии основных закономерностей рассеяния нейтронов, ряд расчётных формул, количественных оценок и принципиальных выводов. Всё это экспериментально мало разработано и ждёт ещё своего доказательства и подтверждения на опыте.

Поэтому нам кажется вполне актуальным дать систематический обзор всего материала, имеющегося по интерференции нейтронов, и сделать некоторые общие выводы о современном состоянии вопроса.

II. ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В своей заметке¹ относительно той аналогии рассеяния медленных нейтронов с рассеянием X -лучей, которая вытекает из одинакового порядка величин длин волн, Эльзассер предложил использовать критерий Лауэ для когерентного рассеяния медленных нейтронов. В качестве исходной формулы им было принято выражение для интенсивности когерентного рассеяния X -лучей поликристаллической пудрой, предложенное Лауэ в 1926 г.² В дальнейшем подсчёте интенсивности рассеянных нейтронов Эльзассер исходил из предположения о максвелловском распределении скоростей тепловых нейтронов и рассматривал случай применения индикатора, поглощающего нейтроны по закону $1/\sigma$.

Угловое распределение интенсивности рассеянных нейтронов тогда получалось вида:

$$\frac{I_{11}}{I_0} = N \cdot \bar{\sigma} \cdot e^{-\alpha B_0^2}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{h^2}{8 \sin^2 \vartheta \cdot m k T}.$$

В этом выражении I_{11} — интенсивность рассеянных нейтронов, зарегистрированная индикатором; B_0 — характеризует тип кристаллической решётки; m — масса нейтрона; N — число рассеивающих центров в единице объёма; $\bar{\sigma}$ — среднее сечение такого центра. Условие: $\alpha B_0^2 = 1$ позволяет определить критический угол (угол раствора конуса вокруг направления первичного пучка, внутри которого интенсивность спадает весьма быстро). Для металлов типа Fe, Cu — этот критический угол получился порядка 25° .

Для проверки этого предположения фон-Хальбан и Прейсверк³ поставили опыты по наблюдению угловой зависимости рассеянных нейтронов. В качестве рассеивателя был применён цилиндр из Fe.

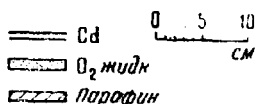
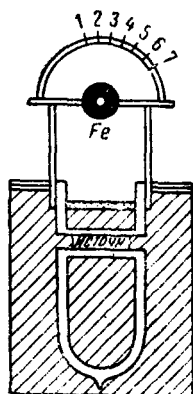


Рис. 1.

Наблюдение было произведено для двух температур источника нейтронов: 300° и 90° K. Схема экспериментальной установки дана на рис. 1. Источник ($Rn + Be$) находился в дьюаре, внутри и вне которого был помещён парафин. Раствор пучка был равен 27° (пучок вырезался двумя Cd-диафрагмами). Индикаторами служили пластины Ду, расположенные в Cd-камере, вокруг оси падающего пучка с интервалами в 13° .

Полученные авторами результаты приведены на рис. 2. Здесь ещё нельзя дать какой-либо количественной интерпретации этих кривых, так как геометрия прибора весьма несовершенна и непараллельность пучка значительно осложняет картину. Кроме того, и сама картина является суммарной, так как, кроме когерентного рассеяния, имеется некогерентный фон. Качественно можно лишь констатировать, что зависимость углового распределения от температуры согласуется с теоретически ожидавшейся картиной: с увеличением λ (уменьшением T) увеличивается количество нейтронов, рассеянных под большими углами.

Таким образом, кроме качественной совместимости полученных кривых с подсчётами Эльзассера, никакого более точного сопоставления с ними сделать нельзя.

В том же 1936 г. Митчелл и Пауэрс⁴ в значительно более совершенной постановке проделали эксперименты по наблюдению брэгговского отражения медленных нейтронов от поверхности монокристаллов. Отражателями служили монокристаллы MgO ($2d = 4 \text{ \AA}$; $\theta_1 = 22^\circ$), смонтированные в виде кольца вокруг оси пучка. Геометрия опыта ясна из рис. 3.

Детектирование медленных нейтронов велось ионизационными камерами с BF_3 и B_4C .

Измерения производились для двух положений кристаллов: соответствующего брэгговскому углу в 22° (сумма когерентного и некогерентного рассеяния) и при попеременном отклонении кристаллов от брэгговского положения по и против часовой стрелки (некогерентное рассеяние). В обоих случаях вычитался фон быстрых нейтронов — во фронт камеры помещался кадмий.

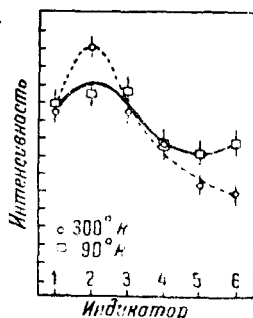


Рис. 2.

Так как полное удаление кристаллов не влияло на этот фон — можно было считать его не связанным с рассеянием. С другой стороны, снятие Cd с отверстия камеры, при отсутствии кристаллов, не увеличивало числа нейтронов, сосчитанных камерой, т. е. весь фон состоял из быстрых нейтронов.

Эти три цикла измерений позволили оценить долю когерентно и некогерентно рассеянных нейтронов. Для описанного случая кристаллов MgO отношение числа когерентно рассеянных нейтронов к числу их, рассеянных некогерентно, оказалось равным $0,4 \pm 0,06$.

Для контроля такие же измерения были произведены при замене кристаллов MgO блоками поликристаллического Al эквивалентной рассеивательной способности. Соответствующее отношение $\frac{n \text{ когер.}}{n \text{ некогер.}} = 0,01 \pm 0,04$, т. е. в случае поликристалла — брэгговский эффект полностью исчез.

Такое сорокапроцентное увеличение интенсивности в случае падения под брэгговским углом, при точности в 6% , может служить почти убедительным доказательством наличия брэгговского отражения медленных нейтронов. Для полной достоверности не хватает наличия хотя бы ещё одного максимума (исследования по углам).

Эксперименты Прейсверка⁵ на Al кристаллах дали результаты, не противоречащие работе Митчелла и Пауэрса.

После трёхлетнего перерыва вопрос о распространении нейтронных волн снова был поднят экспериментаторами в несколько иной связи.

В 1939 г. Уитэкер и Байер⁶, при излучении прохождения медленных нейтронов через парамагнитные соли, столкнулись с неожиданно большой разницей в сечениях солей и суммарном сечении их составляющих. Это вызвало специальную серию опытов по проверке наблюдаемого эффекта. Оказалось, что замеченная неаддитивность сечений действительно имеет место в целом ряде случаев.

Почти одновременно⁷ Уитэкер и Байер отметили факт заметной зависимости сечения для медленных нейтронов от кристаллической модификации изучаемого вещества.

В 1940 г. эти авторы суммировали результаты своих опытов в специальной статье⁸, посвящённой интерференционным эффектам при рассеянии медленных нейтронов.

В отличие от предыдущих работ, авторы изучали сечения количественно, пропуская пучок медленных нейтронов через рассеиватель и наблюдая ослабление пучка при этом. «Пропускание» кри-

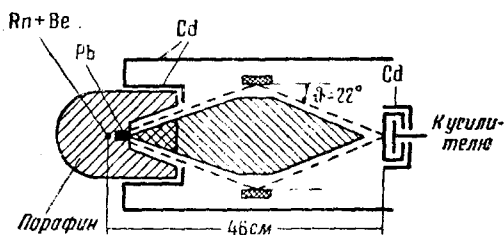


Рис. 3.

сталла: $P = e^{-N\sigma X}$; таким образом, для известного N -числа ядер в единице объема и X -толщины рассеивателя, ослабление пучка характеризует сечение процесса σ . Как видно из описания процедуры

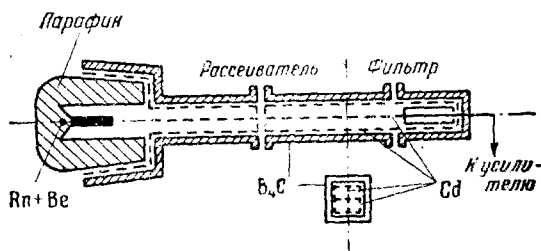


Рис. 4.

измерений, σ являлось полным сечением, учитывающим и захват и рассеяние. На рис. 4 дана схема прибора Уитэкера и Байера. Из неё ясно, что здесь мы имеем дело со сравнительно хорошо коллимированным пучком нейтронов. Толщина

рассеивателей подбиралась такой, чтобы дать ослабление пучка на 30—40%, т. е. не считаться ещё с осложнениями, вносимыми многократным рассеиванием. Специальное внимание было уделено авторами процессу обезвреживания рассеивателей, так как вода являлась одним из наиболее опасных загрязнений.

Наиболее характерные результаты дали измерения сечения веществ в разных кристаллических состояниях, сведённые в таблице 1.

Таблица 1

Сечения веществ в разных кристаллических состояниях $\times 10^{24}$ см⁻²

Вещество	Аморфное	Поликристалл	Монокристалл	σ /см ²
Fe	—	$12,0 \pm 0,2$	$7,0 \pm 1,0$	1,6
Fe	—	—	$6,1 \pm 1,0$	8,8
Ni	—	$19,8 \pm 0,5$	$14,1 \pm 1,2$	4,4
SiO ₂	$8,0 \pm 1,0$	$8,8 \pm 1,0$	$4,5 \pm 0,6$	3,7
SiO ₂	плав. кварц	песок	$4,1 \pm 0,6$	1,3

Для применённых рассеивателей сечения монокристаллов, как правило, меньше сечений поликристаллов. Наиболее отчётливо этот эффект «прозрачности» монокристалла виден в случае SiO₂: сечение монокристалла почти в два раза меньше сечения поликристалла. Если не считать возможным дефект геометрии опыта: попадания в детектор вместе с прошедшим пучком и пятен Лауэ, то следует действительно предположить, что в монокристалле условиям Лауэ удовлетворяет лишь ничтожная часть спектра нейтронов. Разница, вероятно, оказалась бы ещё большей для монохроматического пучка нейтронов. Какой-либо заметной зависимости от толщины рассеивателя не наблюдалось.

Результаты второй части работы Уитэкера и Байера — измерения сечений химических соединений и составляющих их элементов — сведены в таблице 2.

Таблица 2

Сечения хим. соединений и элементов $\times 10^{24}$ см⁻²

Соединение	σ измеренное	σ аддитивное	Соединение	σ измеренное	σ аддитивное
MnO	19,9	17,2	NiO	22,3	23,9
MnS	19,1	15,1	HDO	54,0	54,5
MnO ₂	25,2	21,3	D ₂ O	16,0	—
MnSO ₄	33,6	31,5	C	$4,8 \pm 0,1$	графит
Fe ₂ O ₃	39,2	36,3	Cu	$10,5 \pm 0,4$	прокат
CuO	16,2	14,6	Fe	$12,0 \pm 0,2$	армко
uS	16,5	12,5	Mn	$13,1 \pm 0,6$	метал. зер.
Cu ₂ O	29,5	25,1	Ni	$19,8 \pm 0,5$	прокат. слой
Cu ₂ S	27,7	23,0	O	4,1	газ
ZnO	7,7	8,6	S	$2,0 \pm 0,6$	пудра
ZnS	9,7	6,5	Zn	$4,5 \pm 0,5$	мет. зерна

Точность определений сечений по оценке авторов порядка 30%. Результаты эти весьма трудно количественно интерпретировать: сечения соединений (поликристалл) сравнивались с аддитивными сечениями, причём для подсчёта последних применялись известные и вновь измеренные сечения элементов в самых различных физических состояниях (газ, жидкость, поликристалл и пр.). Однако, качественно вполне очевидно, что аддитивность не соблюдается почти нигде. Поэтому необходимость рассматривать сечение для медленных нейтронов как величину, зависящую и от физического состояния вещества, выступает вполне отчётливо даже из этих, далеко не исчерпывающих измерений.

Третий раздел работы посвящён был изучению сечений сплавов. Уитэкером и Байером изучался Fe—Ni сплав, так называемый, «пермаллой». Результаты сравнения аддитивных сечений с сечениями сплавов, измеренными для моно- и поликристаллической модификации их, приведены в таблице 3.

Таблица 3

Сечение сплавов $\times 10^{24}$ см⁻²

Сплав	Аддитивное σ	Поликристалл	Монокристалл
Пермаллой (78)	18,2	$12,5 \pm 0,7$	
Пермаллой (73)	17,8		$10,2 \pm 1,3$
Пермаллой (68)	17,4		$10,2 \pm 1,3$
Пермаллой (45)	15,6	$16,0 \pm 0,8$	

Аддитивные сечения для разных процентных содержаний пермаллоя были вычислены на основании сечений Fe и Ni, измеренных для поликристаллической модификации их. И в этом случае можно констатировать большую прозрачность монокристаллов и расхождение аддитивных сечений с реально измеренными.

Обсуждать эту картину более детально — вряд ли целесообразно, так как рассеяние от двух типов ядер, в общем случае, будет иметь разные фазы и амплитуды рассеянных волн, и предполагаемая интерференция может дать эффекты разного знака. Данные работ Уитэкера и Байера для такого рода анализа — явно недостаточно.

Сами авторы замеченную ими разницу в пропускании сплавов при различных соотношениях его компонент рассматривают как результат одного из двух процессов: либо изменения решётки и размеров кристаллитов, либо изменения степени порядка в сплаве.

Выяснению того, какой из указанных факторов ответствен за разницу в пропускании, посвящена была работа Никса, Байера и Данинга⁹. В их опытах серия Fe—Ni сплавов была подвергнута специальному режиму охлаждения и обработки. В результате, для каждого процента содержания сплава ими были получены два образца с точно одинаковыми размерами кристаллитов, но с разной степенью порядка. Так как пропускание для этих двух типов оказалось разным, приходится этот эффект отнести за счёт изменения порядка в сплаве. Разные «соседи» каждого атома могут, как указывалось выше, дать интерференционные эффекты разного знака и дать то нерегулярное изменение сечения, какое было получено в опытах Никса, Байера и Данинга.

Другую деталь работы Уитэкера и Байера, зависимость интерференционных эффектов от энергии нейтронов, проверили в специальном опыте Уитэкер, Брайт и Мэрфи¹⁰. Если предположить, что интерференция осуществляется для соответствующих данной геометрии де-Бройлевских длин волн нейтронов, то изменение этих λ должно было вызвать существенные изменения сечения. С целью наблюдения такого рода эффектов авторы измерили сечение большого монокристалла кварца ($10,97 \text{ г/см}^3$) для трёх групп нейтронов: «холодных» ($T=100^\circ \text{K}$), тепловых при 300°K и так называемых «остаточных» нейтронов, пропускаемых Cd и активирующих In и Rh (энергия порядка $1,5 \text{ eV}$). Полученные для этих групп нейтронов сечения даны в таблице 4.

Таблица 4

Общее сечение для кристаллов кварца $\times 10^{24} \text{ см}^{-2}$

Нейтроны Детектор Сечение	Холодные В	Остаточн. In, Rh	C-группа In, Rn	C-группа В
	$2,3 \pm 0,7$	$7,2 \pm 1,2$	$3,2 \pm 1,2$	$3,0 \pm 0,7$

Как мы видим, для In -нейтронов (λ меньше примерно в 7 раз) сечение увеличилось почти в два раза по сравнению с сечением для тепловых нейтронов, «прозрачность» монокристалла в значительной степени исчезла. Разницу в сечении для тепловых нейтронов, по сравнению с измерениями Уитэкера и Байера, можно отнести за счёт разных толщин кварца.

Результаты этой работы, с нашей точки зрения, весьма трудно интерпретировать в желаемом авторами смысле: как доказательство наличия в монокристалле интерференционных явлений, исчезающих с изменением порядка λ .

В самом деле, как показала работа Уитэкера и Байера, монокристалл namного «прозрачнее» поликристалла, т. е., благодаря острой селективности условий Брэгга, в нём когерентно рассеивается лишь ничтожная часть спектра нейтронов. Таким образом, его сечение характеризует, в основном, захват и некогерентное рассеяние. Сечение захвата для рассматриваемых элементов невелико и с уменьшением λ должно иметь тенденцию к уменьшению, если не предполагать наличия особого уровня вблизи $E \sim 1,5$ eV. Таким образом, уменьшение «прозрачности» монокристалла характеризует лишь рост некогерентного рассеяния. О влиянии обмена энергией между нейтроном и решёткой на рассеяние и изложение нашей точки зрения на эти вопросы в связи с критерием когерентности — смотри главу III.

Однако, ясно, что описанная постановка опыта не дала, да и не могла, по существу, дать ответа на вопрос о влиянии нейтронов на когерентную часть рассеяния.

Второй цикл исследований интерференционных явлений в кристаллах был сообщён в 1940 г. Разетти¹¹.

Материалом для рассеивателя в своих опытах Разетти выбрал кальцит-кристалл с весьма совершенной решёткой, обладающей ещё тем преимуществом, что для каждого элемента в нём практически присутствует только один изотоп.

Измерения с кальцитом дали результаты ещё более яркие, чем измерения Уитэкера и Байера на кварце. Для весьма совершенного монокристалла кальцита Разетти получил сечение:

$$\sigma = 6,6 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Вычисленное им аддитивное сечение для CaCO_3 оказалось равным $21,2 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, т. е. больше, примерно, в три раза.

В этих опытах сечение также определялось методом пропускания. «Прозрачность» кристалла по наблюдениям Разетти заметно заисела от степени совершенства кристалла: для менее совершенного образца он получал $\sigma = 7,8 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$. Рассеяние было практически экспоненциальным вплоть до довольно больших толщин: 20 г/см^2 .

Чтобы уяснить зависимость рассеяния от размеров и ориентации рассеивающих кристаллов, Разетти проделал процесс «поликристаллизации» своего монокристалла.

Начальный монокристалл с $\sigma = 7,8 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ Разетти размалывал на всё более мелкие части. Отобрав затем, при помощи сита, однородные по величине кристаллы, он измерял сечение, как функцию n , среднего числа кристаллов, проходимого пучком в рассеивателе. Толщина рассеивателя во всех этих случаях равнялась 5 г/см^2 .

Таблица 5

Рассеяние в кальците, как функция размера кристалла

n	Массов. коэф. рассеяния μ в $\text{см}^2/\text{г}$	$\sigma \cdot 10^{24} \text{ см}^{-2}$
1	$0,047 \pm 0,002$	7,8
13	$0,070 \pm 0,003$	11,7
39	$0,079 \pm 0,003$	13,2
150	$0,098 \pm 0,003$	16,3
$1,5 \cdot 10^4$	$0,139 \pm 0,005$	23,2

Пересчёт результатов этих измерений дан в таблице 5.

Последнее из указанных в таблице значение соответствует пудре, полученной химическим путём, и, возможно, завышено, благодаря неполному удалению воды.

Из этих данных автор смог грубо оценить процент нейтронов, рассеянных когерентно, сопоставляя σ монокристалла

с σ при $n \neq 1$. Наибольшее значение было им получено для $n = 13$, для этого случая когерентно рассеивался примерно 1% падающих нейтронов.

Полученную картину Разетти рассматривает, как доказательство того, что монокристалл, в основном, рассеивает некогерентно, причём рассеяние это пропорционально толщине пройденного вещества.

С возрастанием числа ориентаций кристаллитов вероятность когерентного рассеяния увеличивается и сечение поликристалла даёт уже заметную долю когерентного рассеяния.

Дальнейшие опыты Разетти были направлены на выяснение факторов, могущих влиять на интерференционные эффекты.

Прежде всего, им были сопоставлены сечения веществ в твёрдом (поликристаллическом) виде с сечениями их в жидком состоянии.

Материалами служили свинец и висмут. Однако, никакой отчётливой разницы в сечениях для этих двух состояний Разетти наблюдать не удалось. Сравнение сечений этих же веществ в моно- и поликристаллическом виде дало некоторую разницу, хотя и значительно менее чёткую, чем в случае кальцита. Пересчёты этих результатов приводятся в таблице 6.

Таблица 6

Измерения со свинцом и висмутом

Вещество	Состояние	$\mu \text{ см}^2/\text{г}$	$\sigma \cdot 10^{24} \text{ см}^2$
Pb	монокристалл	$0,0213 \pm 0,001$	7,2
Pb	поликристалл	$0,0275 \pm 0,001$	9,3
Bi	монокристалл	$0,019 \pm 0,01$	6,6
Bi	жидкость	$0,024 \pm 0,02$	8,4

Рассматривая причины, делающие эффект в Рb настолько менее заметным, чем в кальците, Разетти останавливается на трёх, могущих дать диффузный фон сверх лауэвского рассеяния:

- a) смесь изотопов в случае Рb,
- b) эффект спина при взаимодействии нейтрона с ядром,
- c) тепловые колебания атомов в решётке, так как дебаевская температура Рb значительно ниже комнатной.

Влияние изотопного эффекта в данном случае Разетти сразу же отбрасывает, так как для одноизотопного Вi разница сечений того же порядка, что и в Рb.

Для проверки влияния тепловых колебаний автором был поставлен специальный опыт: измерено сечение монокристалла Вi при температурах кристалла 300° и 80° К. Разница была получена весьма ничтожной.

Попытка оценить влияние третьего возможного фактора — спина — автору не удалась. Вырастить кристалл радиогенного свинца, содержащего около 90% Рb²⁰⁶, спин которого равен нулю, оказалось невозможным.

Рассмотренные работы 1939—1940 гг. вызвали ряд новых экспериментов, направленных на выяснение различных факторов, влияющих на рассеяние медленных нейтронов в кристаллах.

Такую попытку осмыслить сечение для медленных нейтронов в зависимости от их энергии — мы находим в работе Генри Ханштейна, опубликованной в 1941 г.¹² Цель работы — сопоставление сечений для медленных нейтронов тепловой группы с сечениями для резонансных нейтронов In и I. Энергия нейтронов обеих групп (соответственно 0,9 eV и 25—100 eV) — заведомо выше тепловых, так что ожидать усложнений в связи с интерференционными явлениями не приходилось. Для резонансных нейтронов I, кроме того, энергия значительно выше, чем энергия связи в молекуле, так что наблюдаемые сечения характеризуют свободное ядро.

Источником нейтронов в опытах Ханштейна служил циклотрон. Это дало возможность получить хорошо коллимированный и достаточно интенсивный пучок нейтронов. Геометрия прибора заметно совершеннее, чем в предыдущих работах, применявших Rn + Be-источники. Статистика также лучше; точность измерений σ , оценённая автором в 5%, легко может быть повышена. Коллиматор состоял из цилиндрической полости, заполненной В₄C и выложенной внутри Cd — In — Cd-слоями (в опытах с резонансными нейтронами In). Из того же тройного слоя состояли и диафрагмы. Детекторами служили In-фольги, активность которых измерялась ионизационной камерой со струнным электрометром. Схема прибора Ханштейна приведена на рис. 5. Монитор (также In-фольга) позволял нормализовать измерения для различных выходов циклотрона к определённому урановому стандарту.

Измерялось «пропускание» образца Р — селективными фильтрами для In нейтронов служил In, для тепловых — Cd.

Ниже, в таблице 7, мы приводим результаты Ханштейна, посвящённые сравнению сечений. Определённые им сечения для резонанс-

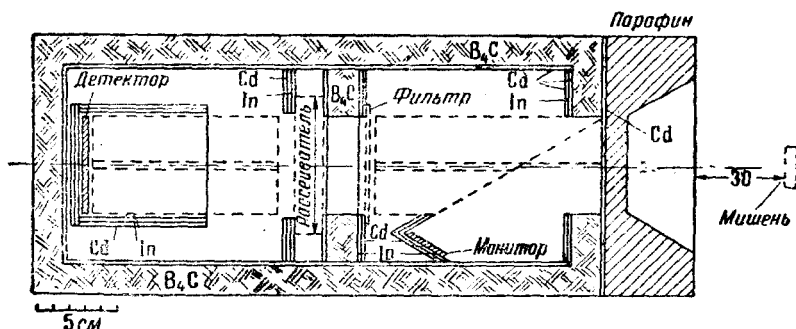


Рис. 5.

ных нейтронов In автор сравнивает с сечениями для тепловых нейтронов, отчасти измеренными им же, а главным образом взятыми из данных Уитэкера и Байера.

Таблица 7

Сечения элементов $\times 10^{24} \text{ см}^{-2}$

Элемент	Форма	σ для In нейтр. ($E \approx 0,9 \text{ eV}$)	Тепловые нейтроны ($E \approx 0,03 \text{ eV}$)	
			Суммарн. σ	σ рассеян.
H	цетан	$21,0 \pm 1,0$	49,0	
D	D ₂ O	3,3	5,7	
C	графит	$4,9 \pm 0,2$	4,9	4,8
Al	металл	$1,5 \pm 0,1$	1,5	1,6
Fe	армко	$11,1 \pm 0,3$	12,0	10,3
Ni	прокат	$16,1 \pm 0,8$	19,8	12,4
Cu	прокат	$8,3 \pm 0,3$	10,5	8,6
Zn	металл	$4,2 \pm 0,2$	4,5	5,2
Sn	металл	$5,7 \pm 0,3$		4,9
Pb	металл	$9,6 \pm 0,8$	12,5	12,9
Bi	металл	$8,7 \pm 0,5$	8,9	8,9

Результаты для D, C, Fe, Ni, Cu, Pb и Bi могут быть сравнены непосредственно, так как они измерены для одних и тех же образцов. Для дальнейших сопоставлений в таблице приведены сечения рассеяния, измеренные Гольдхабером и Бриггсом¹³.

Примерно половина изученных Ханштейном веществ имеет сечения для тепловых нейтронов выше, чем для резонансных нейтронов In. Сечения одного порядка для нейтронов обеих групп имеют C, Al, Fe, Zn и Bi, и сравнение с данными Гольдхабера и Бриггса показывает, что в них основным процессом является рассеяние.

В остальных случаях, где сечения тепловых нейтронов больше, трудно оценить, чем вызван этот эффект: зависимостью сечений захвата от энергии нейтронов (закон $1/v$) или наличием интерференционных явлений при рассеянии тепловых нейтронов.

Второй задачей работы Ханштейна (опыты с I мы не рассматриваем) являлась проверка рассеяния в кварце и песке (случай, исследованный для С-нейтронов Уитэкером и Байером) как для С-нейтронов, так и для нейтронов In резонансной группы. Измеренные для этого случая сечения приведены в таблице 8.

Таблица 8

Сечения $\times 10^{24}$ см⁻²

	In резонансные нейтроны	Тепловые нейтроны
Монокристалл кварца (4,5 г/см ²)	$7,5 \pm 0,5$	$4,3 \pm 0,3$
SiO ₂ (песок) (3,3 г/см ²)	$8,8 \pm 0,8$	$8,8 \pm 1,0$

Сечение для SiO₂ для тепловых нейтронов взято из работы Уитэкера и Байера, но непосредственно сравнимо с результатами автора, так как измерения производились с одним и тем же песком.

Верхняя строка таблицы — сопоставление σ тепловых и In-нейтронов для монокристалла кварца — является воспроизведением опыта Уитэкера, Брайта и Мэрфи. Совпадение результатов достаточно хорошее для In-нейтронов, для С-нейтронов значение Ханштейна ближе к данным Уитэкера и Байера.

Существенно сравнение результатов II и III колонки. В то время, как для тепловых нейтронов сечения моно- и поликристалла отличаются почти в два раза, для In-нейтронов — оба сечения одного порядка.

Кажется весьма вероятным, что в этом случае мы действительно имеем сечение, определяющееся, в основном, некогерентными процессами. Мы уже указывали ранее, что увеличение диффузного рассеяния с повышением энергии нейтронов вполне совместимо с известным нам механизмом этого процесса. Для такого рода рассеяния роль структуры менее критична, чем для рассеяния строго по Лауэ. Таким образом, результаты этой части работы дают интересное дополнение к предыдущим измерениям «прозрачности» монокристаллов и её зависимости от энергии нейтронов.

Автор проверил также эффект пропускания в сплавах, отмеченный для тепловых нейтронов в работах⁸ и⁹. В случае In-нейтронов сравнение сечения пермаллоя с сечением физической смеси его компонент не дало никаких отклонений от аддитивности. Это можно рассматривать, как новое подтверждение того, что неаддитивность

сечений обуславливается интерференционными явлениями и поэтому связана с определённым диапазоном длин волн нейтронов.

В работе Г. Кэррола¹⁴, появившейся в том же 1941 г., одной из задач также являлась проверка интерференционных явлений. Исследуемым веществом являлся цетан ($n\text{ C}_{16}\text{H}_{34}$); таким образом найденные сечения характеризовали взаимодействие нейтрона с протоном — случай принципиально важный с точки зрения изучения природы ядерных сил.

Сечения в опытах Кэрролла также определялись методом «пропускания». Автором было определено сечение для двух модификаций цетана: жидкого и твёрдого. Для опытов такого рода выбор цетана был удачен: его температура плавления $16,1^\circ\text{C}$, что позволяло легко переводить его из жидкого состояния в твёрдое. При затвердевании цетан образовывал большие, хорошо сформированные кристаллы с весьма подходящей для опытов по интерференции постоянной решётки $\sim 1,5\text{ \AA}$. Результаты измерения мы приводим в таблице 9.

Таблица 9

Сечение цетана ($n\text{ C}_{16}\text{H}_{34}$) для медленных нейтронов

Вещество	Состояние	$g/\text{см}^2$	% пропуск.	Сечение на протон $\times 10^{24}\text{ см}^{-2}$
Цетан	твёрдое	0,1721	47,7	$44,9 \pm 0,4$
Цетан	жидкость	0,1573	47,1	$50,1 \pm 0,4$

Как видно из таблицы, Кэрроллу удалось наблюдать разницу в сечениях твёрдого и жидкого цетана $\sim 10\%$, что при указанной им точности измерений позволяет считать замеченный эффект не случайным.

Таким образом, явление, которое в случае Pb и Bi Разетти не удалось установить — для цетана, можно считать зафиксированным. Если интерпретировать наблюдаемую разницу сечений, как результат интерференции, объяснение — наиболее логичное, мы приходим к возможности весьма интересных выводов о наличии измеримых когерентных процессов даже в таком водородсодержащем веществе, как цетан. Такое влияние структуры в случае органических, цепеобразных молекул весьма любопытно.

Когерентное рассеяние в цетане даёт, возможно, ещё одну иллюстрацию к широко обсуждавшейся проблеме интерференции нейтронов в орто- и параводороде. Напомним вкратце существо вопроса.

Ещё в 1936 г. Теллером¹⁵ была высказана мысль, что изучение столкновений медленных нейтронов с орто- и параводородом должно внести ясность в вопрос о зависимости ядерных сил от спина. Так как расстояние между двумя протонами в молекуле H_2 порядка длинны

волны медленных нейтронов, рассеянные нейтронные волны должны интерферировать между собой. Если взаимодействие нейтрона с протоном зависит от взаимной ориентации их спинов — эти эффекты интерференции должны по-разному проявляться в случае орто- и параводорода.

Дальнейшие расчёты Швингера и Теллера¹⁶ показали картину поведения σ -орто и σ -пара для разных энергий нейтронов, для случаев сил, зависящих и не зависящих от спинов, и позволили количественно оценить ожидавшиеся эффекты.

Эксперименты Брикведде, Даннинга, Хога и Манли¹⁷, поставленные с целью проверки этой теории, хотя и не дали полного совпадения с расчётом, но позволили всё же дать ответ на некоторые принципиально важные стороны вопроса.

Прежде всего, результаты эксперимента однозначно доказали, что силы между протоном и нейтроном зависят от спинов: σ_p оказалось значительно меньше σ_0 . Далее, для сил, зависящих от спина, возможны два случая: наличие стабильного или виртуального сингулетного уровня дейтона. Интерференционные эффекты для этих двух случаев ожидаются резко отличными. В случае реального сингулетного уровня дейтона — рассеянные волны, соответствующие сингулетному и триплетному взаимодействию, будут иметь одинаковые фазы, при виртуальном сингулетном уровне дейтона — фазы будут противоположны и в параводороде мы будем иметь разрушающую интерференцию.

Результаты описанных опытов: величина σ_p и σ_0 и их зависимость от температуры — убедительно доказали, что сингулетное состояние дейтона виртуально.

Мы не будем останавливаться более подробно на дальнейшем развитии этого вопроса; несмотря на большую группу работ, посвящённых ему, некоторые расхождения теории с экспериментом всё ещё не преодолены.

Наличие такого рода явлений заставляет, однако, более тщательно продумать опыты по рассеянию медленных нейтронов в водородсодержащих веществах. Здесь, кроме рассмотренного уже механизма интерференции, обусловленного кристаллической структурой вещества, следует учесть возможность чистого эффекта орто- и парасостояний.

Никаких данных для анализа роли такого рода факторов в когерентном рассеянии работа Кэрролла ещё, разумеется, не даёт. Однако, намечающаяся отсюда область дальнейших экспериментов несомненно представляет принципиальный интерес и актуальность.

III. ТЕОРИЯ

Теоретический анализ проблемы рассеяния медленных нейтронов в кристаллах был впервые произведён Вико¹⁸ в 1937 г. Как подчёркивает автор, аналогия рассеяния медленных нейтронов и X-лучей ограничивается областью строго когерентного рассеяния. Вне этой

области, благодаря намного меньшей энергии нейтронов, задача становится отличной и требует специального рассмотрения.

В указанной статье Вика, в основном, и рассматриваются такого рода некогерентные процессы, при которых происходит обмен энергий между нейтроном и атомами кристаллической решётки. Этот обмен может осуществляться двояко: либо нейтрон отдаёт часть своей энергии — возбуждаются звуковые колебания в кристаллической решётке, либо нейтрон поглощает энергию — колебания затухают.

Для уяснения механизма первого процесса Вик рассмотрел полностью «холодный» кристалл, в котором колебания решётки отсутствуют. Тогда могут иметь место только такие процессы, при которых нейтрон отдаёт свою энергию — испускается квант звуковых колебаний. Так как при этом должны выполняться законы сохранения, то, чтобы такой процесс мог осуществиться, начальный импульс нейтрона:

$$P > mV + \frac{h}{2\lambda_s}. \quad (1)$$

В этом выражении m — масса нейтрона, $V = v_s \lambda_s$ — скорость звука в кристалле для предельного случая длинных волн.

Таким образом, при $p < mV$ — никакое рассеяние невозможно. Это условие легко сводится к виду:

$$p < \frac{h}{2d} \quad \text{или} \quad \lambda > 2d. \quad (2)$$

Мы видим, что рассеяние в «холодном» кристалле практически прекращается при $\lambda > 2d$, т. е. при том же условии, что и рассеяние по Лауэ.

Такого рода ограничения, разумеется, отсутствуют при поглощении звуковых квантов. Эти процессы, однако, играют всё меньшую роль при понижении температуры кристалла. Количественная оценка, произведённая Виком, показывает, что для нейтронов с $\lambda > 2d$ кристалл уже при практически достижимых температурах должен стать полностью «прозрачным» (если не учитывать захвата).

Этот результат Вика приводит к интересным следствиям относительно границы замедления нейтронов при низких температурах.

Следующая часть задачи, рассмотренной Виком, это определение вероятности рассеяния. Распространение рассеянной волны описывается уравнением Шредингера. Сечение жёстко закреплённого ядра:

$\sigma_0 = \frac{4\pi h}{m} |C|^2$, где C — константа, входящая в выражение для амплитуды рассеянной волны и характеризующая ядро.

В реальной решётке, однако, ядра будут совершать колебания около некоторого положения равновесия. Это в расчётах Вика характеризуется введением координаты u , дающей удаление атома от положения равновесия. Выражение для рассеянной волны раскладывается по степеням u , и учитывается только линейная часть этого

разложения. Полученное сечение состоит из когерентной части (члены, не содержащие u) и некогерентной.

Усреднение по всем ориентациям даёт сечение, характеризующее рассеяние в поликристалле:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{h^3}{16\pi M P^2} \iiint \{n_s + \frac{0}{1}\} \frac{s}{v_s} ds_x ds_y ds_z. \quad (3)$$

Здесь M — масса ядра (в простой кубической решётке), n_s — среднее число звуковых квантов на собственное колебание частоты v_s . Стоящие в скобках 0 или 1 соответствуют поглощению или испусканию кванта $s = \frac{1}{\lambda_s}$. Интегрирование производится по всем значениям переменных, удовлетворяющих условию (1).

Исходя из (3), Вик рассмотрел два предельных случая. Первый — полностью «холодный» кристалл ($n_s = 0$) и λ лишь слегка меньшая, чем $2d$. Для этого случая:

$$d\sigma = \sigma_0 \frac{6d}{MhV^3} \varepsilon d\varepsilon, \quad (4)$$

где ε — потеря энергии нейтрона при столкновении — может иметь лишь определённые значения, вытекающие из законов сохранения.

Второй случай — поглощение звуковых квантов при очень низких температурах и $\lambda < 2d$. Приблизительная оценка даёт для этого процесса:

$$\sigma = \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots\right) \sigma_0 \frac{3h^3}{16\pi M P^2 V d^3} \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3, \quad (5)$$

где Θ — характеристическая температура кристалла.

Как видно из (5), сечение такого рода процесса весьма мало.

Во второй статье на эту же тему¹⁹ Виком были рассмотрены те осложнения, которые вносит в рассмотренную картину наличие изотопии и спина. Что пренебречь такого рода эффектами в реальной оценке нельзя, показывает та существенная зависимость рассеяния от взаимной ориентации спинов, которая была найдена в опытах с орто- и параводородом. Бесспорно, должно сказаться влияние и изотопного состава, если налицо в сравнимых количествах изотопы с сильно отличающимися константами рассеяния.

При наличии нескольких изотопов: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ($\alpha + \beta + \gamma + \dots = 1$) вместо одной константы C следует учесть наличие многих констант: $C_\alpha, C_\beta, C_\gamma$ и т. д. В этом случае Вик представил сечение рассеяния в виде суммы:

$$\sigma_n + \sigma_{\text{инт}} = \frac{4\pi h}{m} \{ \alpha |C_\alpha|^2 + \beta |C_\beta|^2 + \dots \}, \quad (6)$$

где $\sigma_{\text{инт}}$ — интерференционное сечение, аналогичное σ_0 в 1 статье, а σ_n характеризует «независимое» рассеяние, при котором отдельные

волны рассеиваются полностью некогерентно. Это независимое рассеяние происходит так, как если бы каждый атом являлся независимым линейным осциллятором. Частоты этих осцилляторов, однако, должны быть распределены так, чтобы дать действительный колебательный спектр решётки.

Этот тип рассеяния оказывается возможным и при $\lambda > 2d$, что при интерференционном рассеянии оказывалось невозможным.

Для учёта влияния спина автор заменяет константу рассеяния — оператором рассеяния, вида:

$$S = A + 2B(I, S), \quad (7)$$

где A и B характеризуют свойства ядра, а I и S — спин-векторы ядра и, соответственно, нейтрона.

Общее решение с учётом изотопного состава и спина автор даёт в виде:

$$\sigma_{\text{инт}} + \sigma_n = \frac{4\pi h}{m} \{ \alpha [|A_\alpha|^2 + |B_\alpha|^2 I_\alpha (I_\alpha + 1)] + \\ + \beta [|A_\beta|^2 + |B_\beta|^2 I_\beta (I_\beta + 1)] + \dots \}. \quad (8)$$

Для случая одноизотопного кристалла при низкой температуре и $\lambda > 2d$ эти результаты дают возможность оценить спиновое взаимодействие, так как тогда рассеяние должно определяться только им.

В опубликованной вскоре после указанных работ Вика статье Померанчука²⁰ трактуется та же проблема рассеяния медленных нейтронов кристаллической решёткой. Рассмотрение ведётся автором, однако, в несколько ином аспекте: его интересуют процессы замедления нейтронов и поэтому процессы делятся на упругие и неупругие.

Задача решается Померанчуком методом теории возмущений, причём энергия взаимодействия выражается как δ -функция расстояния r между ядром и нейтроном:

$$V = \alpha \cdot \delta(r), \quad (9)$$

где $\alpha = AI + B \cdot \vec{K} \cdot \vec{S}$.

Коэффициент α состоит из двух членов: не зависящего от спина и члена, отражающего спиновое взаимодействие ядра и нейтрона. Следует учесть при этом, что A и B могут рассматриваться как константы, только для достаточно медленных нейтронов.

Для квантово-механической системы нейтрон-решётка (атомы которой совершают тепловые колебания) Померанчук определяет волновую функцию и соответствующие матрицы перехода.

Вероятность упругого рассеяния медленных нейтронов с $\lambda > d$, т. е. с энергией $E_n < \frac{h^2}{2md}$, Померанчук даёт в виде:

$$W_{el} = \frac{m_{pp}}{\pi h^4} \left\{ \sum_s C_s A_s^2 - \left(\sum_s C_s A_s \right)^2 + \sum_s \frac{B_s}{4} C_s j_s (j_s + 1) \right\} = \\ = \frac{m_{pp}}{\pi h^4} \alpha. \quad (10)$$

Каждый изотоп характеризуется своей концентрацией C_s и коэффициентами A_s и B_s ; ρ — число ядер в единице объема, f_s — квантовое число, определяющее момент ядра.

Свободный пробег для упругого рассеяния:

$$\lambda_{el} = \frac{P}{mW_{el}}. \quad (11)$$

Неупругое рассеяние Померанчук рассматривает для нейтронов с энергией, достаточной для возбуждения дебаевских тепловых колебаний решётки, но недостаточной для возбуждения ядра.

При этом учитывается только процесс возбуждения одного звукового кванта, так как одновременное испускание нескольких квантов намного менее вероятно. В этом случае вероятность неупругого рассеяния будет равна:

$$W_i = \frac{4m^2 E^{1/2}}{63\pi^3 h^4 M} \alpha \left(\frac{1}{S_l^3} + \frac{1}{S_t^3} \right) \sqrt{2m}. \quad (12)$$

В этом выражении m и M — масса нейтрона и ядра. S_l и S_t — продольная и поперечная скорость звуковой волны.

Автор подчёркивает, что вероятность неупругого рассеяния быстро увеличивается с ростом потери энергии нейтрона и наибольшую роль играют процессы, при которых потери энергии — порядка начальной энергии нейтрона.

Свободный пробег для неупругого рассеяния:

$$\lambda_i = \lambda_{el} \frac{7}{8} \frac{M}{m} \left(\frac{k\theta}{E} \right)^3. \quad (13)$$

Как видно из этого выражения, при $E < k\theta$, λ_i становится намного больше, чем λ_{el} , т. е. неупругое рассеяние становится незначительным по сравнению с упругим.

Полученные выражения для λ позволили автору оценить относительную вероятность трёх процессов: упругого и неупругого рассеяния и захвата. Такая оценка весьма существенна с точки зрения определения границы процесса замедления медленных нейтронов в кристаллах.

Очевидно, что если $\lambda_{\text{захв}} > \lambda_i$, нейтроны могут быть замедлены до теплового равновесия с решёткой, в противном случае захват может произойти до полного замедления их.

Для того чтобы произвести такое сравнение, необходимо знать константы A и B . Их оказалось возможным определить только для водорода, где опыты по рассеянию в орто- и параводороде позволили учесть эффект спинового взаимодействия.

Для водорода:

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_{\text{захв}}} = \left(\frac{30}{T_0} \right)^{7/2}, \quad (14)$$

где $T_0 = \frac{E}{k}$ и θ принята равной 91° .

Таким образом, для энергий нейтронов, меньших, чем 30° , замедление нейтронов в твёрдом водороде прекращается.

Можно предположить, что и для других решёток при $k\theta \gg E \gg kT$ нейтроны не могут быть замедлены до теплового равновесия с решёткой.

Следующий этап в анализе рассеяния медленных нейтронов кристаллами представила работа Хальперна, Хамермеша и Джонсона²¹, опубликованная в 1941 г. Эта работа явилась обобщением и дальнейшим развитием отдельных заметок авторов по прохождению нейтронов через ферромагнитные тела. Так как поляризацию нейтронов при таком прохождении авторы рассматривают как результат интерференции когерентного ядерного и магнитного рассеяния, дальнейшие расчёты поляризационных эффектов потребовали более подробного исследования ядерного рассеяния в кристаллах. В отличие от предыдущих работ, основное внимание уделяется здесь механизму когерентного рассеяния. Трактовка вопроса аналогична соответствующей теории в случае X -лучей. Все численные расчёты произведены для Fe-элемента, наиболее интересного для авторов ввиду указанного направления работы.

Накопившийся к этому времени экспериментальный и теоретический материал позволил авторам более детально рассмотреть механизм взаимодействия нейтронов с веществом и, в ряде пунктов, сопоставить теорию с экспериментом.

Реальные рассеиватели рассматриваются авторами как конгломерат микрокристаллов; под последними подразумевается соединение элементарных ячеек, ориентированных безупречно и потому рассеивающих строго когерентно. С этой точки зрения — монокристалл является мозаичной структурой, состоящей из микрокристаллов, ориентированных только приблизительно одинаково. Макроскопически такой монокристалл действует, как совершенный, но для де-Бройлевских волн порядка постоянных решётки — отдельные микрокристаллы не будут рассеивать когерентно. Поэтому для определения рассеяния от такого монокристалла авторы рассчитывают амплитуду рассеянной волны для каждого из микрокристаллов и затем суммируют интенсивности.

Поликристалл представляет собой агрегат многих мелких монокристаллов (кристаллитов), ориентированных в пространстве. Для расчёта рассеяния от поликристалла авторы интегрируют диффракционный интеграл по всем направлениям нейтрона и затем усредняют по всем ориентациям микрокристаллов.

Для случая простой кубической решётки с одним только типом ядер условие Лауэ приводит к выражению для интенсивности рассеяния:

$$I = \frac{N \cdot \sigma}{8\pi} \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sum_{|l| < 2d/\lambda} \frac{1}{|l|}. \quad (15)$$

Входящее сюда сечение $\sigma = 4\pi c^2$ характеризует когерентное рассеяние единичным ядром. N — число атомов в кристалле, равное числу элементарных ячеек для простой кубической решётки, li — миллеровские индексы.

Это выражение даёт возможность примерно оценить эффект вторичной экстинкции — ослабления первичного пучка при прохождении в глубь кристалла, благодаря экранировке нижележащих микрокристаллов — микрокристаллами, расположенными выше. Оценка произведена для попадания точно под брэгговским углом, т. е. для максимальной экстинкции.

Отношение интенсивностей рассеянного и первичного пучка:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{L \cdot l \cdot \sigma \cdot \lambda}{8\pi d^3 [l]} \propto N^2 \cdot \sigma \cdot \lambda^2 \cdot l \cdot L, \quad (16)$$

если под l понимать величину стороны микрокристалла, а L — кристаллита.

Для Fe такая оценка дала авторам $I/I_0 \approx 6 \cdot 10^{-3}$, т. е. в случае поликристаллического Fe вторичной экстинкцией можно в дальнейших расчётах полностью пренебречь. Такого рода эффекты могут сказаться только в случае больших монокристаллов с $L \sim 1$ см.

Выражение (15) даёт эффект рассеяния в полностью «холодном» кристалле. Для учёта температурного движения ядер в решётке авторы вводят температурный фактор, предложенный Дебаем и Уэллером для X-лучей:

$$\exp(-A|l|^2). \quad (17)$$

Если учесть случай не монохроматических нейтронов, а спектр тепловых и считать его примерно совпадающим с максвелловским распределением, то отношение сечения когерентного рассеяния кристаллом к сечению рассеяния независимым ядром будет:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\lambda_A}{a} \right)^2 \sum_{|l| < 2d/\lambda} \frac{\Phi(\lambda_A |l|/2d) \cdot \exp(-A|l|^2)}{|l|}, \quad (18)$$

где Φ — аналитическая функция, дающая максвелловское распределение, а $\lambda_A = \frac{h}{(2M_0 kT)^{1/2}}$ при температуре источника нейтронов T .

Для Fe, образующего при комнатной температуре пространственно-центрированную кубическую решётку, выражение (18) несколько модифицируется: число элементарных ячеек равно половине числа атомов, и все отражения с $\sum_2 li$ чётной исчезают, а с нечётной — дают учтённую интенсивность.

Авторы рассматривают (18) для нескольких предельных случаев. Для $\lambda_A \rightarrow 0$ сумму можно аппроксимировать интегралом. Результат интегрирования даёт $\bar{\sigma}/\sigma = 1$, т. е., как и следовало ожидать, для малых λ — эффект кристаллической структуры исчезает.

При увеличении λ число членов в сумме уменьшается, но интенсивность каждого дебаевского кольца увеличивается, как λ^2 . По мере роста λ будут точки, в которых кольца исчезают (при $\lambda = \frac{2d}{|l|}$ исчезает l -е кольцо), и для $\lambda > 2d$ когерентное рассеяние полностью

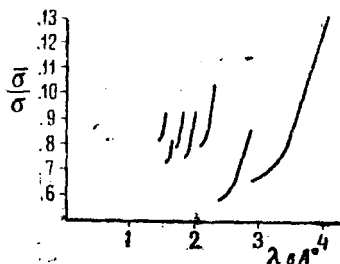


Рис. 6.

исчезает. Это поведение σ в зависимости от λ для Fe иллюстрируется серией кривых (рис. 6).

Изложенная теория требует отказа от общепринятой точки зрения на сечение рассеяния медленных нейтронов, как на величину, не зависящую от энергии нейтронов.

Ввиду наличия такого рода зависимости в области дебаевских колец — вопрос о соответствии обычно принимаемого максвелловского распределения и реального спектра тепловых нейтронов — приобретает дополнительную актуальность. Как показали расчёты Померанчука, полное замедление нейтронов не является возможным, так что поведение спектра со стороны больших λ — максвелловская кривая не отражает. Со стороны малых λ — истинный спектр должен спадать также значительно медленнее, чем кривая Максвелла, так как весь спектр простирается за пределы поглощения Cd. Авторы считают наиболее близким к истинному — распределение, полученное Даннингом с коллегами²² при помощи механического селектора скоростей, и по нему (применяя графическое интегрирование) пересчитаны кривые рис. 6.

Кроме когерентного рассеяния авторы вкратце останавливаются на двух типах некогерентного рассеяния, образующего фон между дебаевскими кольцами.

Первый тип — неупругое рассеяние благодаря обмену энергии между нейтроном и решёткой — авторы считают имеющим малое значение для медленных нейтронов и $\theta > T$, так как оно мало даже для X-лучей.

Второй тип — изотопные нарушения, дающие сферически симметричный фон, так как амплитуды, рассеянные от различных изотопов, в общем случае, различны как по величине, так и по знаку. Такого же рода эффект даёт и спиновое взаимодействие.

Это некогерентное сечение авторы дают в виде:

$$\sum_p |b_p|^2 \frac{[i_p a_0^p + (i_p + 1) a_1^p]^2}{2i_p + 1} - \left(\sum_p |b_p|^2 \frac{[i_p a_0^p + (i_p + 1) a_1^p]}{2i_p + 1} \right)^2 + \sum_p \frac{|b_p|^2 i_p (i_p + 1) (a_1^p - a_0^p)^2}{(2i_p + 1)^2}. \quad (19)$$

Первые два члена в этом выражении характеризуют изотопный фон, последний член — эффект спина, под b_p подразумевается отно-

сительная концентрация p -го изотопа, i_p — его спин, а a_0^p и a_1^p — амплитуды рассеянных волн для общего углового момента соответственно $(i_p - 1/2)$ и $(i_p + 1/2)$.

Этому второму механизму авторы приписывают большую часть некогерентного рассеяния, по крайней мере в случае Fe.

На основе изложенной теории и данных Уитэкера и Байера авторы произвели оценку когерентного сечения для Fe: $\sigma = 5 \cdot 10^{-24}$ см² и ядерной амплитуды $C = 7,05 \cdot 10^{-13}$ см.

Грубая оценка возможных когерентных сечений для изотопов Fe дала следующие значения σ :

$$\begin{aligned}\sigma \text{Fe}^{56} &= 9,7 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2, \\ \sigma \text{Fe}^{54} &= 7,4 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2,\end{aligned}$$

причём амплитуды имеют противоположные знаки. При этом Fe⁵³ не учитывается, ввиду ничтожной концентрации его, а под Fe⁵⁴ подразумевается Fe⁵⁴ и Fe⁵⁷.

Значение σ позволило также весьма приблизительно оценить размеры микрокристаллов Fe. Для случая большой экстинкции верхний предел l получается порядка $5 \cdot 10^{-4}$ см.

Ввиду существенного значения понятия когерентности в трактовке интерференционных явлений, нам кажется необходимым остановиться на этом вопросе и обсудить его несколько подробнее.

В рассмотренных выше работах мы сталкивались с таким пониманием когерентности, при котором все процессы неупругого рассеяния нейтронов попадали в разряд полностью некогерентных. Если учесть, что способность рассеянных волн интерферировать между собой определяется прежде всего соотношением фаз, то принципиальная неточность такой классификации — очевидна. В процессе неупругого рассеяния меняется длина волны, т. е. период колебания, но между начальными фазами первичной и рассеянной волн имеется корреляция. Абсолютно некогерентные процессы неупругого характера можно поэтому ожидать, главным образом, в случае захвата нейтрона ядром с последующим испусканием нового нейтрона, т. е. при прохождении через стадию компаунд-ядра.

С этой точки зрения неупругое рассеяние как вследствие раскачивания решётки — смещения атомов её из положения равновесия, так и вследствие изменения периода, т. е. неточного совпадения фаз, приводит к явлениям, которые являются переходными от строго когерентного упругого рассеяния к полностью некогерентному сферически симметричному фону. Результатом такого рода процессов является не интерференция волн, правильно по Брэггу отражённых от фиксированной кристаллической плоскости и дошедших до детектора в строго одинаковой фазе, а рассеяние до некоторой степени диффузное, благодаря размытию фаз, но на которое существенное влияние всё же оказывают условия интерференции.

Экспериментально наличие такого диффузного рассеяния для случая X -лучей было установлено Престоном²³.

Рассматриваемая ниже работа Сигера и Теллера даёт интересную трактовку таких неупругих процессов «на границе» брэгговской области. Как видно из неё, такого рода неупругое рассеяние с малым изменением длины волны является наиболее вероятным для достаточно медленных нейтронов.

Целью работы Сигера и Теллера является анализ тех ограничений, которые накладывают условия интерференции в кристаллах на неупругое рассеяние. Как показал этот анализ, указанные ограничения не только вызывают исчезновение рассеяния при очень малых энергиях нейтронов, но и влияют на процессы неупругого рассеяния при скоростях нейтронов, сравнимых со скоростью звука в кристалле.

Влияние спина и изотопного состава авторы не рассматривают. Расчёт ограничивается одноквантовыми процессами, так как в рассматриваемой области энергий нейтронов:

$$E_n \ll \frac{ME_0^2}{E_\sigma} \quad (20)$$

такого рода процессы более вероятны, чем многоквантовые. В (20) M — означает массу атома, амплитуда колебаний которого максимальна, E_σ — энергию колебаний такого атома в решётке. Последняя энергия становится равна kT при более высоких температурах и E_0 — при низких.

В области энергий нейтронов, определённой (20), ещё более вероятным, чем одноквантовый процесс, является упругое рассеяние.

Дальнейший анализ ограничивается этой областью энергий и производится в пространстве моментов, при помощи так наз. «обратной» решётки. Связь точек обратной решётки с обычной даётся условием Брэгга.

В этой системе упругое рассеяние характеризуется равенством моментов падающего и рассеянного нейтрона:

$$|P_i| = |P_s|.$$

Графически это означает, что конец $\vec{P}_s$ лежит на поверхности сферы с радиусом $|P_i|$, описанной вокруг начала $\vec{P}_i$. Таким образом, упругое рассеяние оказывается возможным, если на поверхности этой сферы лежит ещё хотя одна точка обратной решётки, кроме конца $\vec{P}_i$. При отсутствии такой точки — упругое рассеяние невозможно. Остаётся возможным рассеяние неупругое, при котором возбуждаются или затухают колебания решётки с моментом $P_L = \hbar \cdot k_L$. В системе обратной решётки — $\vec{P}_L$ строится, как отрезок, соединяющий конец $\vec{P}_s$ с ближайшей точкой решётки.

Анализ Захариазена²⁵ для аналогичных процессов в случае X -лучей показал, что интенсивность неупругого рассеяния будет максимальной,

если P_L будет возможно меньше, т. е. будут возможно ближе выполнены условия Брэгга. Это следует из того факта, что интенсивность неупругого рассеяния, пропорциональная корню из амплитуды колебаний решётки, возникших или исчезающих в процессе рассеяния, и что при тепловом равновесии амплитуда колебаний увеличивается с уменьшением частоты.

Так как для нейтронов, в отличие от X -лучей, важно изменение момента P_s при рассеянии, наиболее существенно рассмотреть области у границы сферы с радиусом $|P_i|$. Рис. 7 даёт сечение этой сферы плоскостью чертежа и изображает пограничную область в увеличенном масштабе. При этом рассматриваемая часть окружности может быть заменена прямой, к которой $\vec{P}_s$ нормален, как радиус. ΔP_s даёт изменение $\vec{P}_s$ при неупругом рассеянии. На рис. 7 представлена только одна точка обратной решётки, ближайшая к концу $\vec{P}_s$. Нахождение её внутри сферы соответствует испусканию, вне — поглощению кванта.

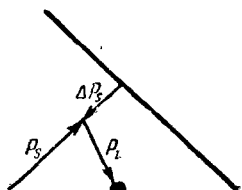


Рис. 7.

Для процессов наибольшей интенсивности, т. е. колебаний малой частоты:

$$\Delta E_n = v_n \cdot \Delta P_s. \quad (21)$$

Здесь v_n — начальная скорость нейтрона, а ΔP_s определяется из условий сохранения: $|P_s| \pm \Delta P_s = |P_i|$.

С другой стороны:

$$\Delta E_n = \hbar k_L \cdot v_L = P_L \cdot v_L, \quad (22)$$

где v_L — скорость звука в кристалле.

Отсюда:

$$\frac{\Delta P_s}{P_L} = \frac{v_L}{v_n}. \quad (23)$$

Для примерной оценки возможной картины рассеяния авторы рассматривают случай постоянной v_L и монохроматических нейтронов. Тогда, для данной v_n отношение $\frac{\Delta P_s}{P_L}$ постоянно. При этом возможны два случая:

$$1) \quad \frac{|\Delta P_s|}{P_L} = \frac{v_L}{v_n} < 1.$$

При этом концы возможных $\vec{P}_s$ лежат на поверхности гиперболоида вращения (рис. 8). Два слоя гиперболоида соответствуют процессам поглощения и испускания кванта. Эти процессы наиболее вероятны вблизи брэгговской области. При увеличении v_n — ветви гиперболы

приближаются к плоскости (сфере), и теория неупругого рассеяния нейтронов становится полностью аналогичной соответствующей теории для X -лучей.

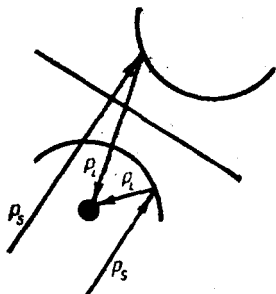


Рис. 8.

$$2) \quad \frac{|\Delta P_s|}{P_L} = \frac{v_L}{v_n} > 1.$$

Концы возможных $\vec{P}_s$ лежат тогда на поверхности эллипсоида вращения, окружающего точку обратной решётки (рис. 9).

В зависимости от того, лежит ли точка внутри сферы или вне, будет происходить либо испускание, либо поглощение кванта.

В случае $v_L > v_n$ и малого $|P_i|$ может оказаться, что ни одна точка обратной решётки не лежит внутри сферы. Если к тому же

температура кристалла достаточно низка, то неупругое рассеяние, так же как и упругое, вообще не сможет произойти — результат, отмеченный ещё Виком.

Таким образом, анализ возможных неупругих процессов показывает, что для монохроматических нейтронов с $v_n < v_L$ неупругое рассеяние даёт резко ограниченные площади вблизи брэгговского максимума.

При $v_n > v_L$ неупругое рассеяние даёт диффузные пятна около пятен Лауэ.

Рассмотрению другой стороны процесса неупругого рассеяния — его зависимости от температуры рассеивающего кристалла — была посвящена работа Р. Вейнстока²⁶, наиболее новая работа этого цикла.

Вейнстоком выведено несколько более общее выражение для сечения рассеяния, чем это было сделано в предыдущих работах²¹. Более детальной трактовке подверглась температурная зависимость рассеяния, которая в работе Хальперна, Хамермеша и Джонсона была учтена по аналогии с X -лучами, введением экспоненциального фактора типа Дебая и Уэллера.

В работе Вейнстока рассматривается поликристаллический рассеиватель с таким размером микроструктур, что эффектом вторичной экстинкции можно пренебречь. Изотопный состав, магнитное взаимодействие и спин — автором не учитываются. Как указывает автор, полученные им результаты не должны зависеть от спина, так как один и тот же спиновый фактор входит в выражение и для сечения кристалла, и для сечения свободного ядра. Нейтроны рассматриваются монохроматические.

Задача рассеяния медленных нейтронов кристаллами решается в этой работе методом борновского приближения с применением дираковской трёхмерной δ -функции от координат нейтрона и ядра для энергии взаимодействия.

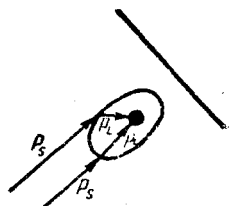


Рис. 9.

Для упругого рассеяния медленных нейтронов связанными ядрами применимость такого метода решения была, в своё время, доказана Ферми. Его приложение к рассмотрению неупругих процессов автор оправдывает тем обстоятельством, что неупругая амплитуда вообще мала по сравнению с упругой.

Грубая оценка отношения неупругого рассеяния к упругому для $N \gg 1$ даёт выражение:

$$L \sim \frac{\hbar^2 k^2 / 2m}{\hbar \omega_s} \left(\frac{m}{M} \right) = \frac{E_n}{E_s} \left(\frac{m}{M} \right), \quad (24)$$

где E_n — начальная энергия нейтрона, E_s — порядка энергии s -го осциллятора и $\left(\frac{m}{M} \right)$ — отношение масс нейтрона и ядра.

Для нейтронов комнатной температуры для многих веществ: $\frac{E_n}{E_s} \sim 1$.

В этих случаях L определяется отношением масс и, таким образом, для тяжёлых элементов неупругие процессы намного менее вероятны, чем упругие.

Для процессов 1 порядка (одноквантовых неупругих процессов) испускание кванта более вероятно, чем его поглощение. Эти явления становятся равновероятными при таких температурах кристалла, T , для которых: $k_0 T \gg \hbar \omega_s$ (k_0 — постоянная Больцмана).

Сечение упругого рассеяния в системе обратной решётки, характеризуемой вектором $\vec{\tau}$ ($\vec{\tau} \leq \frac{\vec{k}}{\pi}$, где k — волновое число), Вейнсток даёт в виде:

$$\bar{\sigma}_{el} = \sum_{\vec{\tau}} \bar{\sigma}_{el}^{\vec{\tau}} = (\pi^2 / 2BK^2) \sum_{\vec{\tau}} \left(\frac{1}{\tau} \right) \cdot \exp(-2W_0^{\vec{\tau}}). \quad (25)$$

В этом выражении σ — упругое сечение для свободного ядра:

$$\sigma = \frac{m}{\hbar^4 \pi} |A|^2.$$

B — объём на ядро в кристалле ($B = d^3$ для простой кубической решётки).

$$W_0^{\vec{\tau}} = (6\pi^2 \hbar^2 x \tau^2 / M k_0 \Theta) \left[(1/4) + \left(\frac{T}{\Theta} \right)^2 Q_1 \left(\frac{\Theta}{T} \right) \right],$$

где Q_1 — дебаевская функция:

$$Q_1(z) = \int_0^z \left\{ \beta / [\exp(\beta) - 1] \right\} d\beta.$$

Сечение неупругого рассеяния, при учёте лишь одноквантовых процессов, Вейнстоком найдено в виде:

$$\bar{\sigma}_{in}^{\vec{\tau}} = (\pi^2 k_0^2 T^2 \tau / \hbar x c^3 k^2 M) \exp(-2W_0^{\vec{\tau}}) \left\{ Q_1 \left(\frac{\Theta}{T} \right) + \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{\Theta}{T} \right)^2 \right\}. \quad (26)$$

Эти выражения для $\bar{\sigma}$ математически достаточно сложны и не дают наглядного представления о зависимости их от температуры рассеивателя.

Поэтому автором были произведены подсчёты для случая поликристаллического Fe и нейтронов при 300° К. Результаты подсчётов графически представлены на рис. 10,

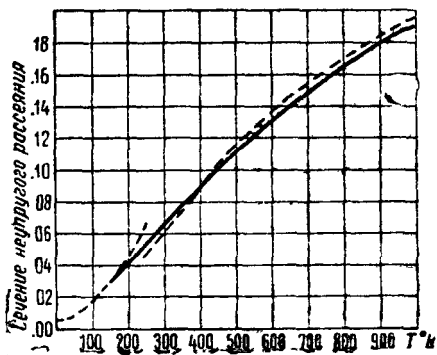


Рис. 10.

дающем зависимость $\frac{\sigma_{el}}{\sigma}$ от T , и рис. 11, описывающем зависимость от температуры $\frac{\sigma_{in}}{\sigma}$ и $\frac{\sigma_{общего}}{\sigma}$.

Из кривой рис. 10 видно, что при изменении температуры от 0° до 1000° К неупругое сечение возрастает примерно до 19%, причём это возрастание идёт линейно в области 150°—400° К.

Рис. 11 демонстрирует сравнительное постоянство общего (упругое + неупругое) сечения

рассеяния от 0° до 400° К. Уменьшение его для $T=1000^\circ$ К порядка 7%, т. е. эффекты такого рода вполне поддаются измерению и экспериментальной проверке.

Зависимость сечения рассеяния от температуры кристалла ещё никем измерена не была, таким образом экспериментального подтверждения изложенная теория ещё не получила. Косвенной теоретической проверкой можно, однако, считать совпадение расчётов Вейнстока с соответствующими результатами Захариазена²⁵ для диффузного рассеяния X-лучей в том предельном случае, когда обе теории должны совпасть, т. е. для нейтронов таких энергий, когда изменением их энергий в процессе рассеяния можно пренебречь.

Результаты расчётов Сигера и Теллера, с одной стороны, и Вейнстока — с другой, дают картину, вполне оправдывающую изложенную выше точку зрения на неупругие процессы, как на промежуточные между строго когерентным рассеянием и сферически симметричным фоном некогерентного рассеяния, так как условия интерференции оказывают на них существенное влияние.

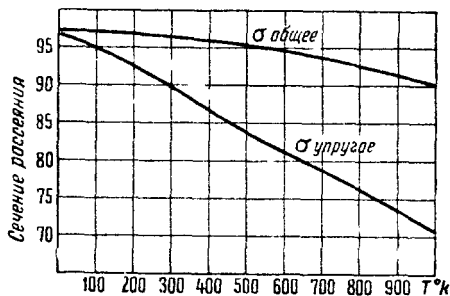


Рис. 11.

IV. ОБОБЩЕНИЕ

Работы, рассмотренные в главах II и III, показали нам, что проблема интерференции медленных нейтронов за 9 лет, прошедших со времени её возникновения, подверглась многократному и многостороннему исследованию.

Интерес, вызываемый этим кругом вопросов, вполне понятен. Громадное большинство известных нам твёрдых тел представляет собою кристаллы, и поэтому учёт влияния кристаллической структуры для получения истинной картины рассеяния, в свете рассмотренных выше работ, совершенно необходим.

С другой стороны, разработка методики получения диффрагированных нейтронных пучков достаточной интенсивности могла бы дать в руки экспериментаторов орудие, так остро необходимое для современных ядерных исследований: монохроматические нейтроны больших длин волн.

С этой точки зрения существенно отметить явное отставание эксперимента от теории. Как мы видели из главы III, теоретически задача рассеяния нейтронов кристаллами разработана уже со многих сторон. Был рассмотрен механизм обмена энергий нейтрона и решётки, оценена относительная вероятность одно- и многоквантовых процессов, испускания и поглощения квантов, упругих и неупругих процессов и захвата, оценена граница замедления нейтронов в кристаллах, учтено влияние спина и изотопных нарушений, рассмотрена зависимость рассеяния от температуры кристаллов, показано наличие явлений более «тонкого» происхождения — эффектов в областях, смежных с брэгговской, и т. д.

Экспериментально же мы пока имеем только грубо качественную картину влияния кристаллической структуры на рассеяние нейтронов. Пожалуй, наиболее наглядно искомую аналогию с X -лучами даёт одна из самых ранних работ — работа Митчелла и Пауэрса⁴. Но и в этом случае — отсутствие хотя бы ещё одного порядка отражения лишает результаты характера полной достоверности.

Результаты более поздних экспериментов настойчиво указывают на наличие интерференционных явлений, но достаточно чёткой картины дифракции не даёт ни один из них. Если сравнить с той, почти классической, законченностью, какую получили соответствующие вопросы в теории X -лучей, то современное состояние вопроса об интерференции нейтронов можно считать ещё совершенно зачаточным.

Немногие полученные экспериментальные результаты служат скорее указанием на те области, где более глубокое изучение обещает дать интересный материал.

Таковы, например, явления «сверхпрозрачности» монокристаллов при низких температурах и для достаточно медленных нейтронов, предсказываемые теорией; весь комплекс вопросов о рассеянии нейтронов в водородсодержащих веществах и многое другое.

Выяснение этих вопросов на опыте, «подтягивание» эксперимента до уровня теории, стимулирующее в свою очередь её дальнейшее развитие, — такова наиболее актуальная задача в рассмотренной области.

В заключение мне хотелось бы выразить благодарность члену-корреспонденту АН СССР П. И. Лукирскому за плодотворную дискуссию по всем основным вопросам, затронутым в настоящей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Elsasser. *Comptes Rendus*, 202, 1029, 1936.
 2. V. Laue. *Zschr. für Kristallogr.*, **64**, 115, 1926.
 3. Halban et Preiswerk. *Comptes Rendus*, 203, 73, 1936.
 4. Mitchell and Powers. *Phys. Rev.*, **50**, 486, 1936.
 5. Preiswerk. *Helv. Phys. Acta*, **10**, 400, 1937.
 6. Whitaker and Beyer. *Phys. Rev.*, **55**, 1124.
 7. Whitaker and Beyer. *Phys. Rev.*, **55**, 1101, 1939.
 8. Beyer and Whitaker. *Phys. Rev.* **57**, 976, 1940.
 9. Nix, Beyer and Dunning. *Phys. Rev.*, **57**, 566-A, 1940.
 10. Whitaker, Bright and Murphy. *Phys. Rev.*, **57**, 551, 1940.
 11. Rasetti. *Phys. Rev.* **58**, 321, 1940.
 12. H. B. Hanstein. *Phys. Rev.*, **59**, 489, 1941.
 13. Goldhaber and Briggs. *P. R. S.*, A-162, 127, 1938.
 14. H. Carrel. *Phys. Rev.*, **60**, 702, 1941.
 15. E. Teller. *Phys. Rev.*, **49**, 420, 1936.
 16. Schwinger and Teller. *Phys. Rev.*, **52**, 286, 1937.
 17. Brickwedde, Dunning, Hoge a. Manley. *Phys. Rev.*, **54**, 266, 1938.
 18. Wick. *Phys. Zeitschr.*, **38**, 403, 1937.
 19. Wick. *Phys. Zeitschr.*, **38**, 689, 1937.
 20. Pomerantschuk. *Phys. Zeitschr. d. Sowjetunion* **13**, 65, 1938.
 21. Halpern, Hamermesch a. Johnson. *Phys. Rev.*, **59**, 981, 1941.
 22. Dunning, Finck, Mitschell a. Segré. *Phys. Rev.*, **48**, 704, 1935.
 23. Preston. *P. R. S.*, 172, 116, 1939.
 24. Seeger and Teller. *Phys. Rev.*, **62**, 37, 1942.
 25. Zachariasen. *Phys. Rev.*, **57**, 597, 1940.
 26. R. Weinstock. *Phys. Rev.*, **65**, 1, 1944.
-