

ИЗУЧЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ¹⁾*Р. Миндлин, Нью Йорк*

Введение.

- I. Основные понятия о напряжениях и деформациях, а также некоторые сведения из оптики.
- II. Материалы, модели и нагрузочные станки.
- III. Измерения разности главных напряжений и их направлений.
- IV. Непосредственное определение главных напряжений.
- V. Специальные применения метода фотоупругости.
- VI. Библиография периода 1930—1938 гг.

ВВЕДЕНИЕ

Подробные сведения о распределении напряжений в деталях и элементах машин имеют во многих отраслях инженерного дела большое значение для проектирования. Математические методы теории упругости успешно применялись для решения отдельных проблем, относящихся к простым контурным условиям. Однако, в большинстве случаев ввиду несостоятельности математического метода приходится обращаться к эксперименту. Наиболее полезным в этом случае оказывается метод фотоупругости. Этот метод основан на том факте, что оптические свойства прозрачного материала в состоянии напряжения могут быть измерены и отнесены количественно к состоянию напряжения.

Применяя метод фотоупругости, инженер выбирает соответствующий прозрачный материал (§ 12), делает из него модель (§ 13) той же формы, что и конструкция, подлежащая исследованию. Модель нагружается (§ 14) таким же образом, как и конструкция, и получающийся оптический эффект (§ 8) измеряется различными способами (§ 15, 26—28). Большинство этих измерений проводится методами физической оптики, другие же были развиты специально для метода фотоупругости. Оптические свойства модели сводятся к напряжениям (§ 9, 11 и 15—19), которые трактуются согласно основным положениям теории упругости и теории сопротивления материалов (§ 1—7 и 10). Распределение напряжений в модели сопоставляют с аналогичной системой напряжений в конструкции (§ 13), и инженер пользуется этим при проектировании.

¹⁾ Journ. Applied Physics, 1939. Перев. Л. Э. Прокофьевой-Михайловской.

Оптические наблюдения далеко не всегда достаточны для полного определения напряженного состояния. Для получения полных сведений были развиты дополнительные методы (§ 20—31): оптические, графические, вычислительные или механические.

Методы фотоупругости применялись для решения большого количества задач в различных отраслях инженерного дела и прикладной физики (§ 32—38); большое количество исследований на эту тему появилось в технических научных журналах. Многие вопросы теории, техники и применения этой теории были

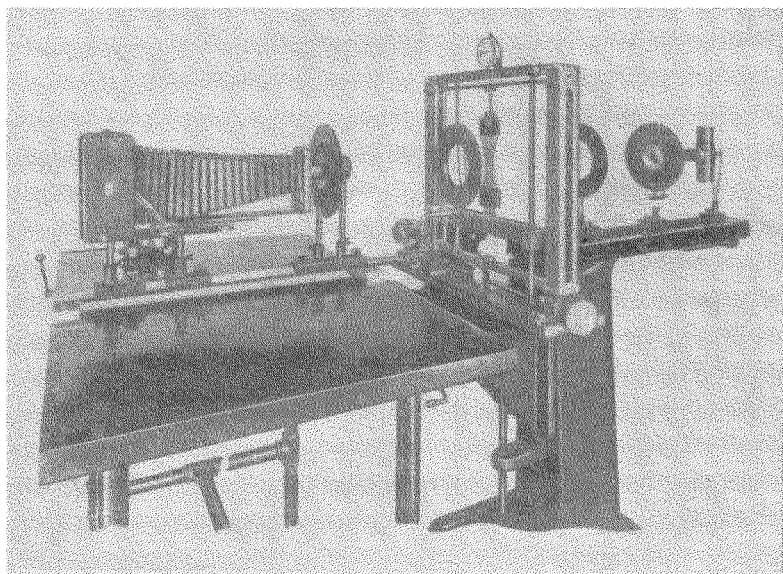


Рис. 1. Полярископ для исследования фотоупругости и нагрузочная машина Колумбийского университета

описаны Е. Г. Кокером и Л. Н. Файлоном⁵ в работе «Основы фотоупругости»¹⁾, опубликованной в 1931 г. С того времени теория метода не изменилась, однако, естественно, что в области, имеющей столь большое промышленное значение, появилось множество новшеств методического характера, а также значительно расширилась область применения метода.

Цель настоящей статьи дать обзор основных принципов фотоупругости, описание новейшей техники эксперимента, а также отметить те области, в которых этот метод нашел приложение за последние десять лет.

¹⁾ Полная библиография до 1930 г. имеется в труде Кокера и Файлона. Ниже указаны в основном работы, появившиеся в период 1930 — 1938 гг. В первых девятнадцати ссылках даны указания относительно руководств и обзорных статей.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О НАПРЯЖЕНИЯХ И ДЕФОРМАЦИЯХ, А ТАКЖЕ НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ОПТИКИ

1. Определение напряжения

Если система сил действует на твердое тело, то одна часть тела оказывает влияние на другую, соседнюю с ней. Взаимодействие соседних частей тела учитывается понятием напряжения. Например, в стержне поперечного сечения A при долевом растяжении усилием P (рис. 2) часть тела с одной стороны

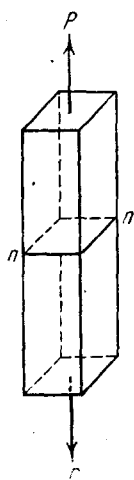


Рис. 2. Призматический брусок при растяжении

поперечного сечения $n-n$ вызывает напряжение растяжения другой части тела. Величина напряжения определяется отношением $\frac{P}{A}$, а направление напряжения параллельно оси бруса. В общем случае напряжение на малой площадке δA в точке O тела (рис. 3) не обязательно нормально к се-

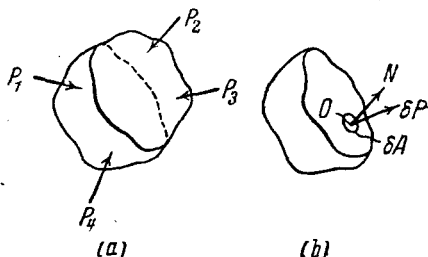


Рис. 3. Напряжения по внутреннему сечению

чению и, более того, величина и направление напряжений могут изменяться от точки к точке тела. Полный анализ напряжений заключается в определении состояния напряжения в каждой точке тела для площадки, проведенной через эту точку любым образом.

Рассмотрим элемент площадки δA , проходящей через точку O в теле, находящемся под действием системы сил [рис. 3(b)]. Нормаль N площадке служит для обозначения ее ориентации. Часть тела с одной стороны площадки действует на другую часть тела с силой δP ; направление δP в общем случае наклонно по отношению к N . Если мы будем уменьшать площадь δA так, чтобы она всегда проходила через точку O , величина δP будет также стремиться к нулю. Предел отношения $\frac{\delta P}{\delta A}$, когда δA стремится к нулю, называется напряжением в точке O в плоскости, нормальной N ; предельное направление δP есть направление напряжения. Если предельное направление не совпадает с N , то напряжение может быть разложено на компоненты, нормальные и параллельные сечению. Первые называются нормальными напряжениями, последние касательными.

2. Обозначения

Нормальные напряжения обозначаются обычно через σ , а касательные через τ . Индексы у этих букв указывают направления напряжений. Обычно напряжения выражаются в декартовой координатной системе. Нормальные напряжения, действующие на плоскости, перпендикулярные осям x , y , z , обозначаются соответственно σ_x , σ_y и σ_z . Нормальное напряжение называется положительным, когда оно вызывает состояние растяжения в рассматриваемой части. На рис. 4 рассмотрим малый прямоугольный параллелепипед со сторонами, параллельными осям координат. Нормальные напряжения σ_x , σ_y , σ_z показаны на рисунке стрелками, проведенными в положительном направлении осей координат. Для обозначения касательных напряжений приходится употреблять два индекса. Первый из индексов указывает направление нормали к плоскости, вдоль которой действует касательное напряжение, второй указывает направление действия напряжения в этой плоскости. Так, например, обозначение τ_{xy} означает касательное напряжение, действующее в плоскости, нормальной к оси x , и направленное параллельно оси y . На рис. 4 все касательные напряжения проведены в положительных направлениях.

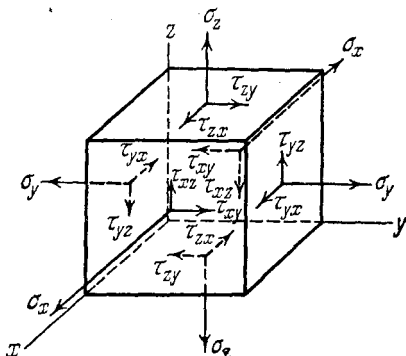


Рис. 4. Компоненты напряжений на гранях малого прямоугольного параллелепипеда

Величины σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} называются компонентами напряжения. Если рассмотреть момент напряжений относительно оси x , то найдем $\tau_{xy} = \tau_{yz}$. Сделав то же относительно других осей, получим $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Итак, независимыми из девяти компонент напряжения являются только шесть.

3. Определение напряжения

В § 1 мы видели, что для полного описания напряженного состояния необходимо знать напряжения на любой площадке, проходящей через каждую точку в материале. Пусть O (рис. 5) есть точка, напряжения в которой мы хотим определить, и N — нормаль к произвольной плоскости, проходящей через O . Другая плоскость с той же нормалью N , но на расстоянии h от O , пересечет систему x , y , z осей в точках B , C и D . Эта плоскость изображена на рисунке. Так как h может быть любым, то обе плоскости могут быть приведены к совпадению и свойства этих плоскостей можно считать одинаковыми. Для того, чтобы найти напряжения в плоскости, перпендикулярной к N , рассмотрим равно-

весие малого тетраэдра $OBCD$. Компонента нормального напряжения в плоскости BCD может быть выражена через шесть компонент напряжения по осям координат

$$\sigma_N = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl + 2\tau_{xy} lm, \quad (1)$$

где l, m, n — косинусы углов между нормалью N и соответствующими осями x, y, z .

Результирующее напряжение по BCD должно, вообще говоря, иметь также составляющие, параллельные этой плоскости.

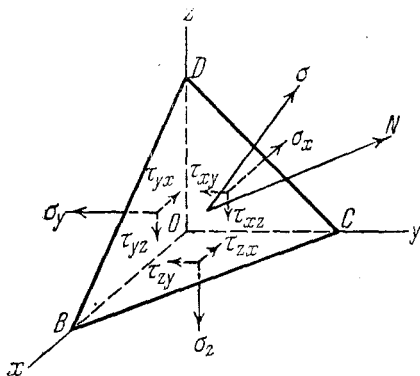


Рис. 5. Напряжения в малом тетраэдре

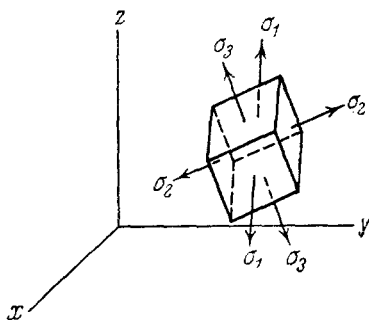


Рис. 6. Напряжения в малом прямоугольном параллелепипеде с гранями, параллельными главным плоскостям напряжений

Компонента касательных напряжений в произвольном направлении S , определяемом направляющими косинусами l', m', n' , равна

$$\begin{aligned} \tau_{NS} = & \sigma_x ll' + \sigma_y mm' + \sigma_z nn' + \tau_{yz}(m'n + mn') + \\ & + \tau_{zx}(n'l + nl') + \tau_{xy}(l'm + lm'). \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) показывают, что компонента нормального напряжения в произвольной плоскости, проходящей через O , и компонента касательного напряжения этой плоскости в произвольном направлении полностью определяются, если в этой точке известны шесть компонент напряжения по осям координат.

4. Главные напряжения и главные плоскости напряжений

Если мы рассмотрим изменение σ_N согласно уравнению (1) при изменении направления N , мы найдем, что всегда существуют три взаимно перпендикулярных направления, для которых σ_N имеет предельные значения, т. е. либо максимум, либо минимум, либо минимаксимум. Эти три направления называются главными осями напряжений, они перпендикулярны плоскостям, называемым главными плоскостями напряжений. Можно также найти, что

в главных плоскостях напряжений касательные напряжения отсутствуют, т. е. результирующее напряжение в главной плоскости имеет только нормальную составляющую.

Таким образом, около любой точки можно построить малый куб (рис. 6) так, чтобы напряжения на его шести гранях были только нормальными. Обозначим эти три главных напряжения $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$ и условимся, что $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$.

5. Малые деформации и компоненты деформаций

Малый элемент объема, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, деформируется в напряженном теле в первом приближении в скошенный параллелепипед. На рис. 7(a) показан элементарный объем до деформации (ребра PA, PB, PC параллельны соответствующим осям координат x, y, z). После деформации точки A, B, C, P займут новое положение A', B', C', P' [рис. 7(b)] так, что ребра параллелепипеда уже не будут составлять между собой прямых углов, а также примут новые длины $P'A', P'B', P'C'$. Изменение по длине, отнесенное к единице длины ребра элемента, называется удлинением, обозначается через ϵ с индексом, указывающим направление ребра.

Таким образом,

$$\frac{P'A' - PA}{PA} = \epsilon_x$$

есть компонента единичного удлинения в направлении оси x .

Для малых перемещений изменение угла между двумя соседними ребрами деформированного элемента называется компонентой сдвига и обозначается через γ с индексами, указывающими плоскости, в которых ранее лежали ребра. Так, γ_{xy} есть изменение угла между ребром PA , ранее параллельным оси x , и ребром PB , ранее параллельным оси y .

Шесть компонент деформации — $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ — необходимы и достаточны для полного определения новой формы и величины элемента; эти величины определяют деформированное состояние тела.

Из геометрических соображений, с помощью рис. 7, находим для малых деформаций

$$\epsilon_N = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl + \gamma_{xy} lm, \quad (3)$$

где ϵ_N — деформация в направлении PN ; l, m, n — направляющие косинусы углов между PN и соответствующими осями x, y, z .

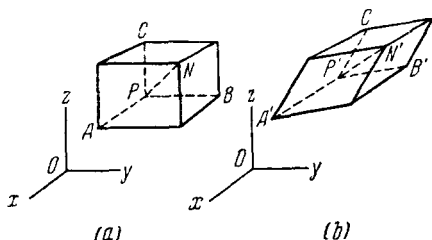


Рис. 7. Деформация малого прямоугольного параллелепипеда

6. Аналогия между напряжениями и малыми деформациями

Если в уравнении (3) мы заменим ϵ через σ и γ через 2τ , мы получим уравнение (1), которое дает соотношение между нормальным напряжением в направлении l, m, n и компонентами напряжения по осям. Так же, если в уравнениях (2) заменим σ через ϵ и τ через $\frac{\gamma}{2}$, мы получим

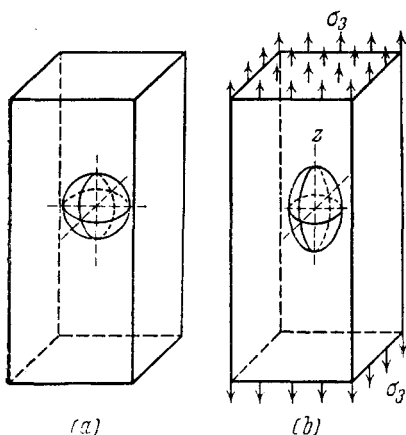
$$\gamma_{NS} = 2\epsilon_x ll' + 2\epsilon_y mm' + 2\epsilon_z nn' + \gamma_{yz}(m'n + mn') + \gamma_{zx}(n'l + nl') + \gamma_{xy}(l'm + lm'), \quad (4)$$

т. е. выразим сдвиг между направлениями N и S через компоненты деформации и направляющие косинусы l, m, n (направление N) и направляющие косинусы l', m', n' (направление S).

Полная аналогия формул напряжений и деформаций позволяет применить выводы, сделанные в § 4, также для перемещений. Надо только заменить ϵ через σ и $\frac{\gamma}{2}$ через τ . Таким образом, существуют три взаимно перпендикулярные главные оси деформаций $\epsilon_3, \epsilon_2, \epsilon_1$, т. е. три таких направления, для которых исчезают деформации сдвига.

7. Соотношения между напряжениями и деформациями

Упругое тело обладает двумя специфическими свойствами. Во-первых, компоненты деформации упругого тела изменяются



линейно в зависимости от напряжений; во-вторых, деформации исчезают, когда напряжения удалены. Если тело изотропно, т. е. свойства каждой его точки одинаковы, то главные оси напряжений и деформаций совпадают по направлениям. Соотношения между напряжениями и деформациями в этом случае известны:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} (\sigma_2 + \sigma_3) \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} (\sigma_3 + \sigma_1) \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

Рис. 8. Преобразование сферы в эллипсоид в поле простого растяжения

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона; оба они постоянны для однородного материала, т. е. упругие постоянные одинаковы для различных точек тела.

Если стержень подвержен осевому напряжению σ_3 , результирующее состояние деформации получается из уравнения (5):

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\nu\sigma_3}{E}, \quad \varepsilon_1 = -\frac{\nu\sigma_3}{E}.$$

Если расположить ось z параллельно оси бруса [рис. 8(a)] и обозначить координаты какой-либо точки до деформации через x, y, z и после деформации x_1, y_1, z_1 , то

$$x_1 = x \left(1 - \frac{\nu\sigma_3}{E}\right), \quad y_1 = y \left(1 - \frac{\nu\sigma_3}{E}\right), \quad z_1 = z \left(1 + \frac{\sigma_3}{E}\right). \quad (6)$$

Напишем уравнение шаровой поверхности радиуса a в недеформированном брус:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Пользуясь уравнением (6), мы видим, что сфера переходит в эллипсоид [рис. 8(b)]:

$$\frac{x_1^2}{a^2 \left(1 - \frac{\nu\sigma_3}{E}\right)^2} + \frac{y_1^2}{a^2 \left(1 - \frac{\nu\sigma_3}{E}\right)^2} + \frac{z_1^2}{a^2 \left(1 + \frac{\sigma_3}{E}\right)^2} = 1. \quad (7)$$

8. Распространение света в изотропной и кристаллической среде

Волновая теория описывает свет как поперечное волновое возмущение. Фронт волны F (рис. 9) оптического возмущения,

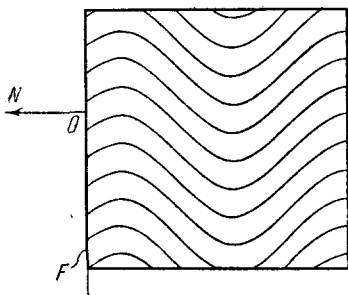


Рис. 9. Волновые возмущения

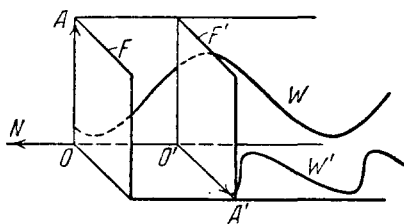


Рис. 10. Распространение волны в двоякопреломляющей среде

распространяющегося через прозрачную среду, рассматривается плоским вблизи точки O в среде; направление волны характеризуется нормалью N к фронту F в точке O . В изотропной среде скорость распространения световой волны одинакова по всем направлениям, т. е. не зависит от направления нормали N фронта волны. В кристаллической среде вообще каждой волновой нормали соответствуют две скорости распространения; обе эти скорости зависят от направления нормали к фронту волны. Это явление двойного лучепреломления.

На рис. 10 изображены две волны (W и W'), соответствующие волновой нормали N . Так как обе волны имеют различные ско-

рости, то в кристалле будут существовать два параллельных фронта волн (F и F') для каждой волн вой нормали. Каждая из волн плоско поляризована, т. е. колебания, соответствующие волне, лежат в одной плоскости (плоскости AOO' и $A'O'O$). Направления колебаний (OA и $O'A'$) обеих волн перпендикулярны друг к другу и к нормали волны.

Оптические свойства любой точки O кристаллической среды могут быть описаны так называемым эллипсоидом показателей

преломления (рис. 11). Центр эллипсоида лежит в точке O , направление главных осей OA , OB , OC эллипсоида фиксируется в среде. Если волна распространяется в направлении N , то ее оптические характеристики находятся при помощи эллипсоида индексов. Плоскость в точке O , перпендикулярная к ON , пересекает эллипсоид по эллипсу DE . Полуоси OD и OE этого эллипса пропорциональны показателям преломления n_1 , n_2 обеих волн, а направления OD и OE будут направлениями колебаний.

Если ON совпадает с главной осью эллипсоида, то n_1 и n_2 будут равны n_a , n_b , n_c . Последние называются главными показателями преломления; направления OA ,

OB , OC будут главными осями оптической симметрии, а плоскости AOB , BOC , COA — главными плоскостями оптической симметрии. Оптические оси и плоскости аналогичны соответствующим понятиям теории напряжений и деформации.

Если свет длины волны λ проходит нормально через кристаллическую пластинку толщины d , то обе плоско поляризованные волны получают разности фаз Δ_1 и Δ_2 по отношению к неизменной волне:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{2\pi d}{\lambda} (n_1 - n) \\ \Delta_2 &= \frac{2\pi d}{\lambda} (n_2 - n) \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

где n — показатель преломления среды вне пластины, Δ_1 и Δ_2 измеряются в радианах.

Относительная разность фаз

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_1 - n_2). \quad (9)$$

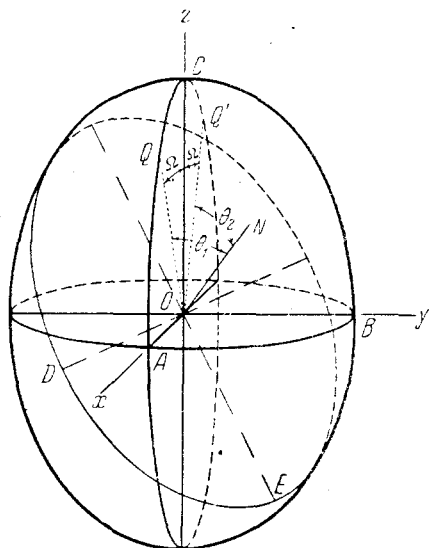


Рис. 11. Эллипсоид индексов

9. Эффект фотоупругости

В 1816 г. Брюстер нашел, что напряженное или деформированное стекло становится двояко преломляющим. Далее было установлено, что этим свойством в большей или меньшей степени обладает большинство прозрачных материалов.

Максвелл¹⁰⁴ обнаружил, что стеклянный стержень при простом растяжении (рис. 8) соответствует эллипсоиду индексов типа вытянутого сфероида. Он определил экспериментально, что ось вращения сфероида параллельна направлению растяжения и эксцентриситет пропорционален нагрузке. Этот и аналогичные опыты показывают, что главные оси напряжений совпадают с главными осями оптической симметрии и что главные напряжения линейно связаны с главными показателями преломления. Следовательно, соотношение между напряжением и двойным лучепреломлением такое же, как и между напряжениями и деформациями. Оптические свойства в первоначально изотропном материале после приложения напряжений могут быть изображены эллипсоидом, который возник бы в результате деформации сферы радиуса n_0 , подверженной действию однородного поля напряжений, приложенных параллельно главным осям.

Тогда по аналогии с уравнением (5) можно написать

$$\left. \begin{aligned} n_a - n_0 &= C_1 \sigma_1 + C_2 (\sigma_2 + \sigma_3) \\ n_b - n_0 &= C_1 \sigma_2 + C_2 (\sigma_3 + \sigma_1) \\ n_c - n_0 &= C_1 \sigma_3 + C_2 (\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

где C_1 и C_2 — оптические коэффициенты напряжений.

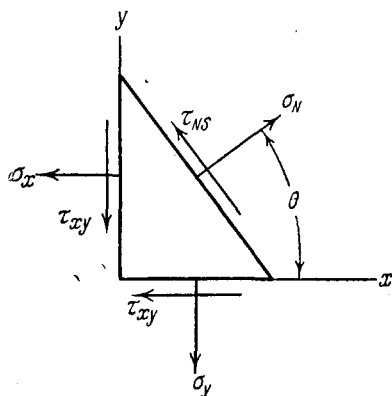
Уравнения (10) выражают основную связь оптического эффекта с напряжениями.

Состояние напряжения в какой-либо точке может быть вычислено, если удастся определить главные показатели преломления и направления главных осей оптической симметрии. В общем случае экспериментальные измерения представляют большие трудности, поэтому методы фотоупругости ограничивались до сих пор большей частью исследованием таких напряженных состояний, для которых из шести искомых величин (величины и направления главных напряжений) три известны а priori. Рассмотрим этот случай более детально.

10. Напряжения в плоскости

В уравнении (1) направление N было произвольным, и мы нашли три взаимно перпендикулярных направления, для которых σ_N имело постоянное значение. Предположим теперь, что N ограничено так, чтобы быть всегда в одной плоскости. Можно показать, что тогда в этой плоскости существуют два взаимно перпендикулярных направления, для которых σ_N имеют постоянное значение, а касательные напряжения пропадают. Это — главные оси напря-

жений для рассматриваемой плоскости. Они совпадают с двумя главными напряжениями трехмерного случая, если эта плоскость является плоскостью главных напряжений. Главные напряжения в плоскости, не совпадающей с главной, называются вторичными главными напряжениями (secondary principal stresses).



Рассмотрим плоскость тела, лежащую в координатной плоскости x, y . Пусть направление N в этой плоскости образует угол θ с положительным направлением оси x ; θ измеряется в положительных единицах против часовой стрелки (от x к N) (рис. 12). Тогда в уравнении (1) $l = \cos \theta$, $m = \sin \theta$, $n = 0$ и мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma_N = & \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \\ & + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \\ & + \tau_{xy} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Рис. 12. Напряжения в плоскости

Так же из уравнения (2), полагая $l' = -\sin \theta$, $m' = \cos \theta$, $n' = 0$, получим

$$\tau_{NS} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta. \quad (12)$$

Чтобы найти направления, в которых компонента напряжений экстремальна, дифференцируем уравнение (11) по θ ; приравнявая результат нулю, получим

$$(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta = 2\tau_{xy} \cos 2\theta. \quad (13)$$

(13) есть уравнение для определения тех значений θ , при которых σ_N имеет экстремум. Отметим, что уравнение (13) есть условие исчезновения τ_{NS} [см. уравнение (12)]. Чтобы найти корни уравнения (13), подставим

$$\cos 2\theta = \pm (1 - \sin^2 2\theta)^{\frac{1}{2}}$$

и получим

$$\sin 2\theta = \pm \frac{2\tau_{xy}}{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (14)$$

и

$$\cos 2\theta = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (15)$$

Верхний знак уравнений (14) и (15) соответствует одному значению θ , которое назовем Φ . Нижний знак дает $\Phi + \frac{\pi}{2}$; Φ и $\Phi + \frac{\pi}{2}$

указывают направления вторичных главных напряжений в плоскости x , y и

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\Phi &= \frac{2\tau_{xy}}{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}}} \\ \cos 2\Phi &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

Для нахождения величины вторичных главных напряжений подставляем выражение (16) в уравнение (11). Обозначая через p напряжения, соответствующие $\theta = \Phi$, и через q — напряжения, соответствующие углу $\Phi + \frac{\pi}{2}$, имеем

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (17)$$

$$q = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Углу Φ соответствует вторичное главное напряжение, наибольшее по абсолютной величине.

Из уравнений (16), (17) и (18) имеем

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \sin 2\Phi [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p - q) \sin 2\Phi. \quad (19)$$

Наибольшее касательное напряжение в плоскости x , y будет максимальным в направлении, делящем пополам углы между вторичными главными осями; оно равно

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p - q). \quad (20)$$

Касательные напряжения τ_{xy} (19) обращаются в нуль при $\Phi = 0, \frac{\pi}{2}$, так что направления осей x , y суть направления, в которых действуют вторичные главные напряжения. Напряжения τ_{xz}, τ_{yz} пропадают в случае плоского напряженного состояния. Подобное напряжение возникает в тонкой пластине под действием сил, лежащих в ее плоскости. Компоненты напряжений σ_z, τ_{xz} и τ_{yz} такой пластинки небольшой толщины d обращаются в нуль при $z = \pm \frac{d}{2}$, если за плоскость x , y принять среднюю плоскость.

Если толщина пластины мала по сравнению с линейными размерами пластины в плоскости x , y , можно предположить, что τ_z, τ_{yz} и τ_{zx} равны нулю и внутри объема пластинки; изменением σ_x, σ_y и τ_{xy} , с изменением координаты z , в этом случае также пренебрегается.

11. Оптические коэффициенты напряжений в случае двумерной фотоупругости

В каждой точке пластины, нагруженной в своей плоскости, одно из главных напряжений равно нулю и направлено нормально к пластине. Одна из главных плоскостей напряжений совпадает поэтому с плоскостью пластины. Два главных напряжения в этой плоскости могут быть σ_3 и σ_2 , или σ_2 и σ_1 , или σ_3 и σ_1 ; мы их будем обозначать ниже соответственно через p и q .

Аналогично одна из главных плоскостей оптической симметрии совпадает с плоскостью пластины. Для света, падающего перпендикулярно к плоскости пластины, показатели n_1 и n_2 двух результирующих волн будут главными показателями; это могут быть n_c и n_b , или n_b и n_a , или n_c и n_a .

При этом условии уравнения (10) сводятся к

$$\left. \begin{aligned} n_1 - n_0 &= C_1 p + C_2 q \\ n_2 - n_0 &= C_1 q + C_2 p \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Если измерить абсолютные запаздывания по фазе Δ_1 и Δ_2 уравнения (8), то можно вычислить главные напряжения p и q из уравнения (21). С другой стороны, если измерить относительное запаздывание Δ уравнения (9), то можно вычислить разность главных напряжений $p - q$. Из уравнений (9) и (21) имеем

$$\Delta = \frac{2\pi d C}{\lambda} (p - q), \quad (22)$$

где $C = C_1 - C_2$ есть относительный оптический коэффициент напряжения.

Направления главных напряжений находим, определяя направления главных осей оптической симметрии.

Надо отметить, что на ненагруженной контуре пластины два из трех главных напряжений исчезают, именно, одно, нормальное к плоскости пластины, и одно, нормальное к контуру. Больше того, третье главное напряжение действует параллельно контуру. В такой контурной точке измерение относительной разности фаз [уравнение (22)] дает все необходимые величины для определения напряжений.

Коэффициент C в уравнении (22) имеет размерность, обратную напряжению. Он обычно выражается в $10^{-13} \text{ см}^2/\text{дин}$. Подобная единица называется брюстером⁵. Значение C подобного материала изменяется в зависимости от длины волны и от температуры.

II. МАТЕРИАЛЫ, МОДЕЛИ И НАГРУЗОЧНЫЕ СТАНКИ

12. Фотоупругие материалы

Первый шаг исследования свойств тела методом фотоупругости заключается в подборе подходящего материала для изготовления модели. По Файлону⁶, Карлтону⁴³ и Солакиану¹⁴⁵ идеальным

будет материал, имеющий: 1) высокий оптический коэффициент, 2) хорошую обрабатываемость, 3) линейную зависимость между напряжениями и деформациями, 4) высокий модуль упругости, 5) физическую и оптическую однородность, 6) начальное двойное лучепреломление, либо отсутствующее, либо легко уничтожаемое отжигом, 7) отсутствие крипа, 8) отсутствие упругого последействия и остаточного двойного лучепреломления, 9) отсутствие «краевого эффекта» и 10) высокую прозрачность. Материалы, наиболее часто употребляемые, — стекло, целлюлоид (нитроцеллюлоза), бакелит BT-61-893 (glycerine p'tallic anhydride), фенолит и тролон (phenol-formaldehyde resins). Стекло было первым материалом, использованным в оптическом эксперименте; оно плохо поддается обработке и обладает очень малым значением коэффициента C ; зато остальные качества стекла делают желательным употребление этого материала при точных экспериментах (см. § 27). Целлюлоид, оптический коэффициент которого в пять раз больше, чем у стекла, хорошо поддающийся обработке, был стандартным фотоупругим материалом с 1906 по 1923 г. В этом году Аракава²⁰ использовал для метода фотоупругости фенольную бакелитовую смолу с оптическим коэффициентом, в пять раз большим, чем у целлюлоида. За последние пятнадцать лет неоднократно появлялись материалы с еще большей оптической чувствительностью; они последовательно вытесняли менее совершенные материалы.

Карлтон⁴³ дает (см. таблицу) значения относительного оптического коэффициента напряжений (C) в брюстерах (для $\lambda = 5461 \text{ \AA}$)

Материал	Оптический коэффициент напряжения в брюстерах
Фенолит	56,8
Бакелит (США)	50,2
(Англия)	46,4
Орко (Франция)	39,3
Целлюлоид	12,8
Ацетицеллюлоза	19,5
Поллопаз	17,5
Чармоид	20,6
Винилит	18,0
Глифтал	28—1 000
Стекло	2,7
Резина мягкая	2 000
" твердая	106

для тринадцати материалов, употреблявшихся в методе фотоупругости. Эти значения имеют приближенный характер; точные значения C каждого материала зависят от температуры, а также предыдущей термической и химической обработки. Влияние температуры было изучено для стекла Гаррисом⁷⁵, для целлюлоида Гаррисом и Сетом⁷⁶, для пяти сортов бакелита и марблета Ли и Армстронгом⁹⁶, для бакелита Хетени^{77, 78} и тролон Куске⁹³.

Карлтон отмечает, что оптический коэффициент материала сильно зависит от степени полимеризации синтетической смолы. Принципы, лежащие в основе этого явления, легче всего понять

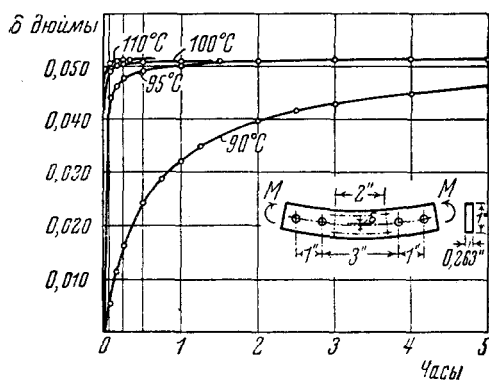


Рис. 13. Кривые времени — прогибов для бакелита BT-61-893 при высоких температурах⁷⁸. $M = 2,50$ дм./фн.; $\delta_{\max} = 57,0$ фн./дм².

из результатов работ Хетени⁷⁷ и Куске⁹³. Эксперименты Хетени над бакелитом BT-61-893 и интерпретация автором процесса с точки зрения двухфазной теории затвердевающих смол пролили свет на сущность начального и остаточного двойного лучепреломления, температурного эффекта, крипа, упругих свойств и краевого эффекта.

Согласно двухфазной теории затвердевшая смола, употребляемая в экспериментах по фотоупругости, состоит из двух компонент, а именно, нерастворимого трехмерного скелета, заполненного растворимой основой. Нераство-

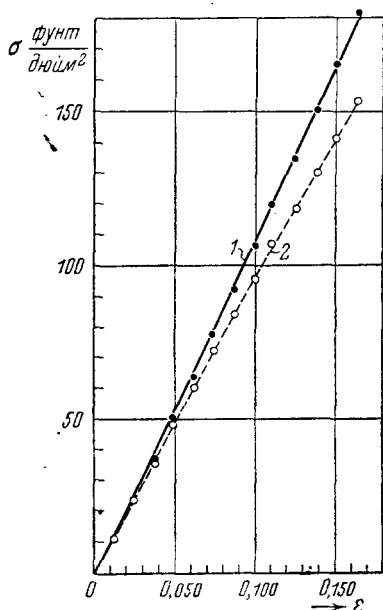


Рис. 14. Кривая напряжений — деформаций для бакелита при 115°⁷⁸
1 — σ действительное, 2 — σ номинальное

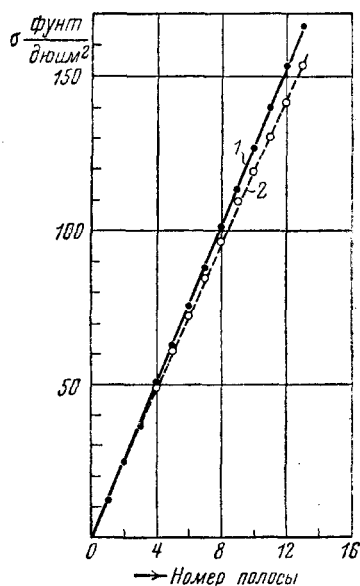


Рис. 15. Кривая напряжений — порядков полос для бакелита при 115°⁷⁸.
1 — $\frac{\sigma}{t}$ действительное, 2 — σ номинальное

римая часть составляет только малую часть всего объема. Она первоначально образовалась из растворимой части благодаря весьма медленно протекающей реакции (называемой полимеризацией).

При комнатной температуре растворимая часть имеет высокий коэффициент вязкости и воспринимает большую часть нагрузки, приложенную к модели; при высокой температуре коэффициент вязкости уменьшается так, что растворимая часть течет и постепенно передает нагрузку на нерастворимый скелет. Деформация при постоянной нагрузке приближается к предельному значению, определяющемуся степенью полимеризации материала и его упругими свойствами. Чем выше температура, тем сильнее идет процесс крипа растворимой части, тем скорее достигается предельная деформация, как это показывают экспериментальные кривые Хетени (рис. 13). При температуре в 115° для бакелита ВТ-61-893 предельная деформация достигается почти мгновенно. Линейная упругость полимеризованного скелета показана Хетени на кривых напряжение — деформация при 115° (рис. 14). Линейное изменение оптического эффекта показано на рис. 15.

Материал этого параграфа будет еще обсуждаться в § 34 с точки зрения трехмерной задачи фотоупругости. Объяснение эффекта фотоупругости с точки зрения атомной физики можно найти в работе Мюллера¹¹⁵.

13. Модель

За последние несколько лет бакелит ВТ-61-893 сделался в США стандартным материалом для моделей. Он изготавливается в форме прямоугольных пластин размером 6×12 дм. при толщине от $\frac{1}{4}$ до 1 дм. Обычно модель вырезается из той части пластины, где нет остаточного двойного лучепреломления. В противном случае материал отжигается (новейшие данные об отжиге см. у Куске⁹⁴).

Поверхности модели делаются плоско параллельными ручной обработкой с наждачным полотном, на фрезерной машине, либо обработкой на оптическом полировальном станке (рис. 16). Лучшие результаты получаются последним способом при употреблении литых металлических кругов и скорости вращения 250 об/мин., причем для шлифовки последовательно употребляются карборунд № 150, а затем № 240, 400, 600. Пластика может быть полирована на том же станке, если натянуть на круг полотно и применить в качестве полиро-

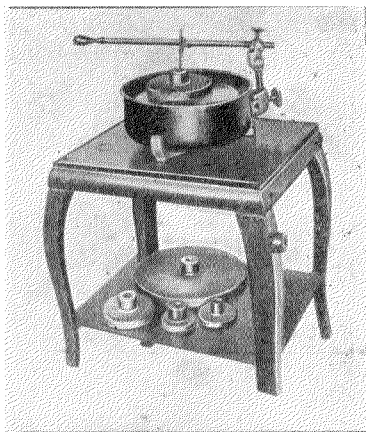


Рис. 16. Оптический полировальный станок

вального порошка крокус. В некоторых лабораториях поверхность модели шлифуется, но не полируется. Ризки от обработки удаляются с оптической картины погружением модели в жидкость того же показателя преломления, или смазкой поверхности маслом, или же покрыванием поверхности лаком. Рис. 17 показывает

эффективность этих четырех способов обработки.

Пластина разрезается по чертежу ручной или механической пилой, окончательные срезы должны быть сделаны весьма осторожно. Выбор резцов, служащих для окончательного обреза, определяется индивидуальностью механика и конфигурацией модели. Желательно: а) избегать нагревания материала⁶, б) делать острые края, в) стремиться к тому, чтобы поверхности обреза были строго перпендикулярны к плоскости пластины. Если эти предосторожности приняты, края модели на изображении будут ровными и чистыми. Во многих лабораториях прямые края обрезаются на фрезерном станке; употребляются острые резцы, смазывающиеся свинным

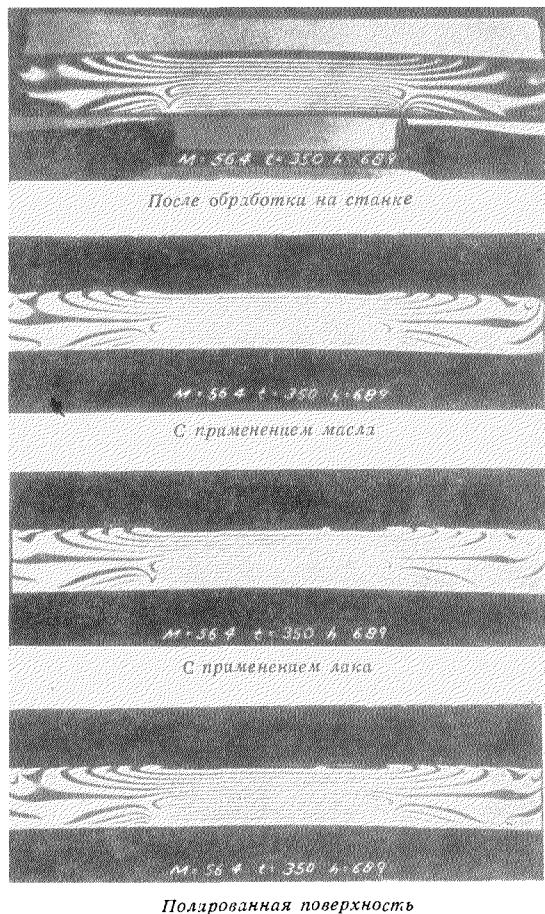


Рис. 17. Сравнительные фотографии картин полос при различной обработке поверхности (В. М. Бел и И. К. Буссей, Технологический институт в Калифорнии)

салом (lard oil). Круглые отверстия лучше просверливать на токарном станке, чем на сверлильном. Если модель имеет неправильную форму, то хороших результатов можно добиться осторожной ручной опиловкой.

Модель должна быть исследована в течение нескольких часов после механической обработки краев для того, чтобы избежать

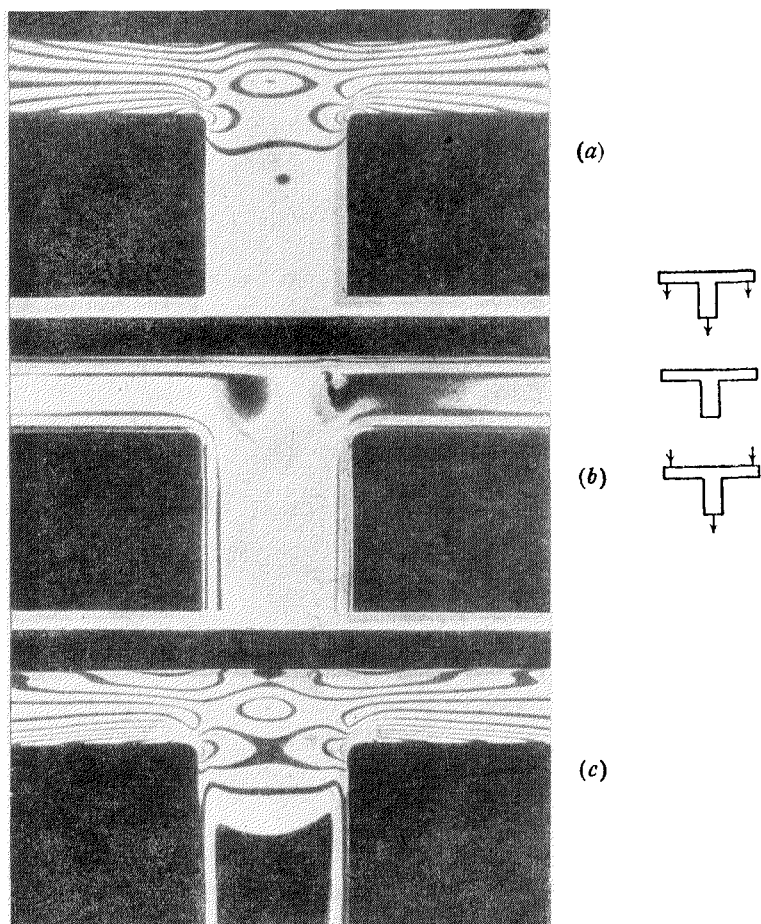


Рис. 18.

(а) Фотография полос модели с очень малым краевым эффектом (Л. К. Друкер, Колумбийский университет); (б) фотография той же модели 8 месяцев спустя, показывающая краевой эффект ненагруженной модели; (с) фотография показывает влияние краевого эффекта на картину полос в нагруженной модели

«краевого эффекта». Это мало изученное явление заключается в аномально большом значении величины двойного лучепреломления около края модели, увеличивающемся со временем. Процесс ускоряется при высоких температурах и задерживается в отсутствии воздуха.

По Хетени⁷⁸ «краевой эффект» возникает: а) благодаря прогрессирующей полимеризации материала, б) от испарения связанной или поглощенной воды или в) от окисления поверхностных слоев. Краевой эффект возникает немедленно, если обрезать края тупым или недостаточно смазанным резцом, а также при большой скорости резания; все это — причины, создающие нагрев материала. Фотографии результатов опыта для модели с краевым эффектом и без него изображены на рис. 18 (а), (б), (с) (см. вкладной лист I).

При исследовании двухмерной статической задачи при нагрузке, действующей в ее плоскости, модель делается геометрически подобной оригиналу во всех размерах кроме толщины.

Теорема Мичеля⁵ показывает, что в случае плоской двухмерной задачи при отсутствии объемных сил напряжения не зависят от упругих постоянных материала, кроме случая многосвязной пластины с равнодействующей силой на внутренних контурах. В последнем случае Файлон⁵ дал способ получения поправок для наблюдаемых напряжений, требующий постановки очень сложного дополнительного эксперимента фотоупругости.

Вспомним (§ 10), что истинное состояние плоского напряжения воспроизводится даже в тонкой пластине приближенно; чем меньше толщина пластины по сравнению с другими линейными размерами, тем больше приближение. Создание условий в отношении толщины и линейных размеров, необходимых для постановки двухмерной проблемы, невозможно. Если в пластине есть отверстие, радиус кривизны которого того же порядка величины, что и толщина пластины, то плоское напряженное состояние не будет иметь места. В этом случае надо ожидать, что коэффициент концентрации напряжений, полученный методом фотоупругости, не будет совпадать с тем, который получается из математической теории упругости.

Если толщина модели удовлетворяет условиям геометрического подобия с оригинальной конструкцией, то, повидимому, результаты исследования методом фотоупругости ближе к истине, чем математическое решение двухмерной задачи теории упругости. Проверить это заключение невозможно, так как за исключением предельных случаев математическая теория упругости не имеет решений для пластин с круговым отверстием.

14. Нагрузочные станки

Идеальная конструкция нагрузочного станка для приложения усилий к модели должна: 1) быть приспособленной для различ-

ных способов нагрузки, 2) иметь большой свободный проход для светового пучка, 3) обладать возможностью подавать усилия в пределах до 500 кг, 4) иметь подходящие приспособления для измерений (точно калиброванные пружины или рычаги или то и другое вместе), 5) предусматривать непрерывное возрастание и уменьшение нагрузки, 6) иметь возможность воспроизведения любой нагрузки так, чтобы экспериментатор мог видеть последовательность образования оптических полос, 7) предусматривать относительное перемещение нагрузочного станка и иметь приспособление для исследования моделей больших размеров, чем оптическое рабочее поле.

Эти требования вызвали необходимость проектирования специальных нагрузочных станков для исследований фотоупругости.

III. ИЗМЕРЕНИЯ РАЗНОСТИ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ИХ НАПРАВЛЕНИЙ

15. Измерения Φ и $p - q$

Этой цели служат оптические приборы и методы, применяемые для измерения направлений плоскости поляризации и относительного запаздывания фаз; первые, как мы видели в § 11,

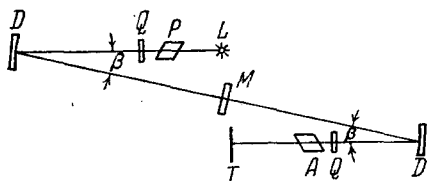


Рис. 19. Схематический ход лучей в фотоупругом полярископе с рефлекторами (Технологический институт в Калифорнии)

(обозначения см. под рис. 20)

дают направления главных напряжений, последние дают разность главных напряжений. Основными частями полярископа, используемого для метода фотоупругости, являются:

1. Источник света. Применяется монохроматический и немонохроматический свет. Наиболее часто употребляется ртутная лампа с фильтром на длину волны 5461 Å. В качестве немонохроматического

света употребляется та же ртутная лампа без фильтра, предпочтительнее — лампа накаливания.

2. Поляризатор и анализатор. Используются призмы исландского шпата (Николь, Глан-Томпсон, Галле и др.), плоские поляриды, а также отражающие или преломляющие стеклянные пластины, установленные под углом полной поляризации.

3. Способ наблюдения. Экран (прозрачный или матовый), фотографическая пластинка или оптическая труба.

Для того чтобы на модель падал параллельный пучок света, применяется специальная система линз. При световых полях большого диаметра линзы стоят дорого и заменяются в некоторых установках ^{40,72} сферическими отражателями (рис. 19).

Обычная установка главных частей схематически показана на рис. 20(a). Интенсивность монохроматического света, проходящего через эту систему при скрещенных поляризаторе и ана-

лизаторе (пренебрегая потерями на отражение и поглощение в линзах):

$$I = I_0 \sin^2 2\Phi \sin^2 \left(\frac{\Delta}{2} \right), \quad (23)$$

где Φ — угол, образуемый плоскостью поляризации более быстрой из волн, прошедших через модель, с плоскостью поляризации падающего на нее луча, и Δ — относительное запаздывание в фазе для какой-либо точки модели. Уравнение (23) есть выражение для интенсивности в случае «плоского» полярископа («плоского» потому, что луч, падающий на модель, плоско поляризован).

Рассматривая какую-либо точку модели при помощи уравнения (23), видим, что если вращать плоскость поляризации падающего луча (при скрещенных николях), то погасание света будет наблюдаться, когда Φ будет равно $m \frac{\pi}{2}$, где m —

целое число. Эти значения Φ определяют направления главных напряжений p и q в каждой точке; однако они не указывают, которое из этих двух взаимно перпендикулярных направлений есть направление алгебраически большего главного напряжения.

Ограничиваясь рассмотрением какой-либо точки модели, видим из уравнения (23), что в случае направления плоскости поляризации под углом 45° по отношению к главным осям напряжений интенсивность будет равна:

$$I = I_0 \sin^2 \left(\frac{\Delta}{2} \right). \quad (24)$$

Так как согласно (22) Δ прямо пропорциональна $p - q$, интенсивность монохроматического света будет меняться периодически от темного к светлому по мере того, как будет возрастать нагрузка на модель. Зная число периодов, можно вычислить разность главных напряжений по уравнению (22), если известны: длина волны λ , толщина d и оптический коэффициент напряжения. Последний определяется из вспомогательного эксперимента для

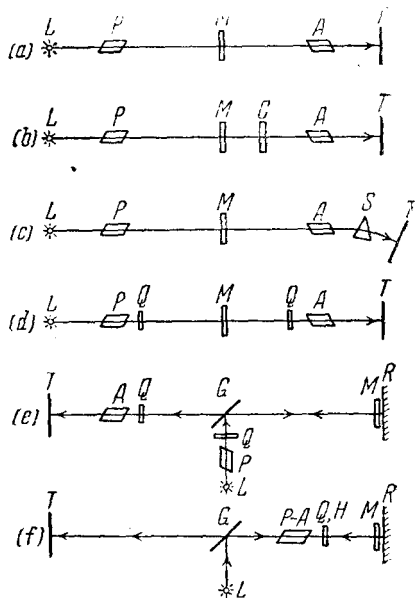


Рис. 20. Схемы главных частей фотоупругого полярископа:

(a) Полярископ с плоской поляризацией. (b) Полярископ с плоской поляризацией с компенсатором. (c) Полярископ с плоской поляризацией со спектроскопическим анализатором. (d) Полярископ с круговой поляризацией. (e) Биполяризатор Нёренберга. (f) Отражательный полярископ. L — источник света, P — поляризатор, A — анализатор, M — модель, T — экран, C — компенсатор, S — призма, Q — пластинка четверть волны, G — стеклянная пластинка, R — рефлектор, H — пластинка полуволны, D — сферический рефлектор

эталонного образца, значение $p-q$ которого известно. Этот метод, если он применяется для наблюдения всего поля напряжений модели, называется методом полос.

Если Δ мала, то метод подсчета полос требует более точных измерений. Применяется также ряд других способов: сравнение по цветам, метод компенсатора растяжения, метод компенсатора $1/4$ волны, метод кварцевого клинового компенсатора и метод спектроскопического анализатора.

Сравнение по цветам

Если мы заменим источник монохроматического света источником белого света, погасится только одна какая-нибудь длина волны для данного значения $p-q$; остальные длины волн будут пропущены частично или полностью. При данном источнике света, полярископе и материале модели для каждого $p-q$ будет иметь место своя характеристическая окраска, которую можно определить исследованием простого растяжения. Значение $p-q$ в какой-либо точке модели определяется из сравнения цвета в этой точке с цветной шкалой, полученной вспомогательным исследованием простого растяжения. Подробный анализ получаемых цветов был дан Бодом и Райтом²⁷. Хотя этот метод не обладает достаточной точностью и считается в настоящее время устаревшим, все же применение белого света целесообразно в следующих трех случаях. 1) Так как при $p-q=0$ лучи света всех длин волн погашаются, то этот метод дает средство определить положение тех точек модели, в которых главные напряжения равны. 2) Лучи света всех длин волн погасятся при Φ , кратном $\frac{\pi}{2}$, что важно при наблюдении изоклин (см. § 17). 3) Для демонстрационных целей, а именно для получения больших проекций в аудитории, белый свет дает более яркую картину, чем источники монохроматического света.

Компенсатор растяжения

В методе, предложенном Вертгеймом¹⁸⁰ и далее развитом Кокером⁴⁴, эталон растяжения располагается в полярископе между моделью и анализатором [рис. 20(b)]. Эталон, сделанный из того же материала и той же толщины, что и модель, располагается так, чтобы его главные оси были параллельны главным осям напряжений в наблюдаемой точке модели. Желательно, чтобы плоскость поляризации падающего луча образовывала угол в 45° по отношению к главным осям модели, так как по уравнению (23) это положение дает максимум интенсивности. Когда ось эталона параллельна направлению алгебраически меньшего главного напряжения, то если напряжение в эталоне постепенно поднимается, наблюдаемые цвета при белом источнике света будут изменяться согласно шкале цветов вплоть до погасания. В этой точке напряжение эталона будет равно значению $p-q$ модели.

Указанный метод служит двум целям: во-первых, с его помощью определяется $p - q$, во-вторых, находится то направление плоскости поляризации, которое соответствует алгебраически большему или меньшему главному напряжению.

Компенсатор $\frac{1}{4}$ волны

Для определения дробных значений относительного запаздывания фаз в точках модели употребляют двоякопреломляющую пластинку $\frac{1}{4}$ волны как компенсатор (компенсатор Сенармона). В этом способе николи не скрещены, но анализатор и пластинка $\frac{1}{4}$ волны вращаются независимо для установки максимума и минимума интенсивности. Из этих положений определяются форма и ориентация эллиптического колебания, выходящего из модели. Эти данные дают возможность получить искомые величины Φ и Δ . Пластинка $\frac{1}{4}$ волны употребляется также для определения направления алгебраически наибольшего и наименьшего главного напряжения. Это производится таким же способом, как и определение большей и меньшей оси двоякопреломляющей пластины или определение оптического характера кристалла.

Кварцевый клиновой компенсатор

Вместо того, чтобы изменять разность фаз в компенсаторе, меняя величину двойного лучепреломления (как в компенсаторе растяжения), тот же эффект может быть получен изменением толщины. Это осуществляется передвижением кристаллического клина (обычно кварцевого) вдоль поля с помощью микрометрического винта.

Далее компенсатор (Бабинне или Бабинне-Солейля) устанавливается так, чтобы его разность фаз была равна и противоположна разности фаз в точке модели. Компенсатор Бабинне-Солейля, употребляемый с полутеневой пластинкой, — весьма точный прибор для измерения относительной разности фаз.

Спектроскопический анализатор

Из уравнений (9) и (22) следует, что вместо того, чтобы варьировать $(n_1 - n_2)$, $(p - q)$ и d , можно изменять длину волны λ , благодаря чему возникнут изменения в разности фаз Δ в компенсационном приборе. Это можно осуществить, помещая спектрометр в поле полярископа [рис. 20(c)] и наблюдая погасание полос в спектре.

Полярископы большого поля

Мы рассмотрели способы, пригодные, главным образом, для изучения моделей от точки к точке. В инженерных задачах часто желательно получить картину всего поля напряжений. В некотором определенном положении модели по отношению к плоскости

поляризации погасание света наблюдается во всех тех точках, где главные оси напряжений параллельны или перпендикулярны к плоскости поляризации. Эти точки соединяются темной линией, называемой изоклиной. Кроме того, темные полосы наблюдаются в монохроматическом свете при скрещенных николях и проходят через те точки, где разность фаз кратна 2π . Последние кривые носят название изохром; это кривые равных разностей главных напряжений. Таким образом поле покрыто двумя системами кривых.

В нашем точечном методе с плоско поляризованным светом мы имели возможность избежать погасания для данной точки, устанавливая Φ равным 45° , благодаря чему интенсивность удовлетворяла уравнению (23); но в поле напряжений модели, где направление главных напряжений в каждой точке различно, этого невозможно добиться для всего поля модели. Обычно изоклины могут быть уничтожены, если поместить пластинку $1/4$ волны с обеих сторон модели, причем так, чтобы оси были наклонены под углом 45° к плоскости поляризатора и анализатора [рис. 20(d)]. Такой прибор называется круговым полярископом. Выражение для интенсивности дается в этом случае уравнением (24) и в поле видны только лишь кривые постоянных разностей главных напряжений.

Если две вспомогательные пластинки не точно соответствуют $1/4$ длины волны применяемого монохроматического света, то, как показал Бод²⁵, интенсивность дается выражением

$$I = I_0 (1 - \cos^2 2\Phi \cos^2 \Delta_0) \sin^2 \left(\frac{\Delta}{2} \right), \quad (25)$$

где Δ_0 — запаздывание соответствующих фаз обеих пластин. Уравнение (25) показывает, что влияние неполного соответствия разности фаз в пластинках данному монохроматическому свету сказывается в том, что изоклины не исчезают полностью. Бод²⁵, пользуясь уравнением (25), показал, что в случае белого света в круговом полярископе изохромы слегка отклонены. Если относительные запаздывания вспомогательных пластин Δ_0' и Δ_0'' не только отличаются от $\frac{\pi}{2}$, но и друг от друга, то уравнение интенсивности имеет вид¹¹²

$$I = I_0 \left\{ \sin^2 \frac{\Delta}{2} \left[\cos(\Delta_0'' - \Delta_0') - \cos^2 2\Phi \cos \Delta_0' \cos \Delta_0'' \right] + \right. \\ \left. + \sin^2 \frac{\Delta_0'' - \Delta_0'}{2} - \frac{1}{2} \sin \Delta \sin 2\Phi \sin(\Delta_0'' - \Delta_0') \right\}. \quad (26)$$

(26) показывает, что изохромы будут также отклонены и при монохроматическом свете¹¹³. Все эти эффекты, однако, невелики и влияют на результат исследования только при прецизионных измерениях.

Биполяризатор Нёренберга [рис. 20(e)] — часто употребляющаяся оптическая система — отличается тем, что поляризованный свет проходит сквозь модель дважды, чем удваивается разность

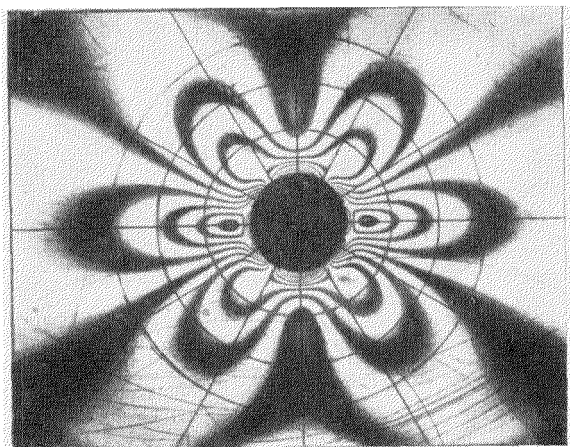


Рис. 21.

Изохромы вокруг малого отверстия в пластине при простом растяжении
(В. М. Мюррей, Технологический институт в Массачусетсе)

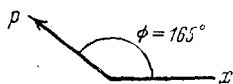
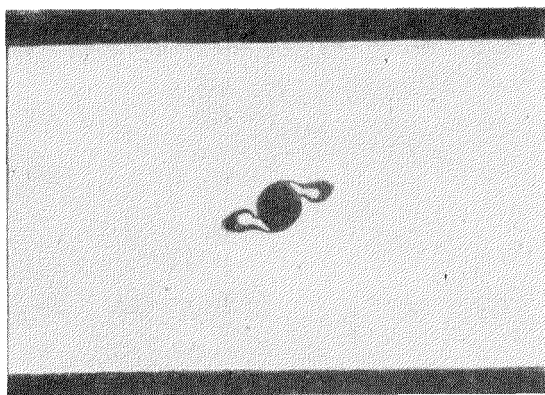


Рис. 22.

165° изоклина для напряженного поля вокруг малого
отверстия в растягиваемой пластине

нение изоклинических кривых, для которых угол Φ будет постоянным, согласно (16) имеет вид:

$$\operatorname{tg} 2\Phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (30)$$

Изоклина с параметром $\Phi = \Phi_1$ есть геометрическое место тех точек модели, для которых направление p образует угол Φ_1 с осью x ; Φ_1 в то же время есть угол между направлением поляризации падающего луча и осью x (рис. 22, вкладной лист II).

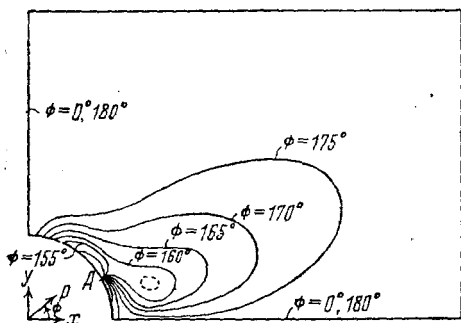


Рис. 23. Набросок изоклин вокруг малого отверстия в растягиваемой пластине (показана четверть поля)

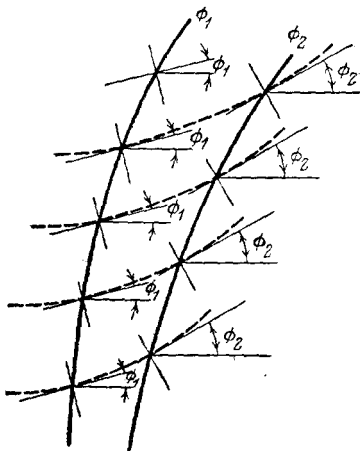


Рис. 24. Построение изостат по изоклинам

Если повернуть плоскость поляризации в новое положение $\Phi = \Phi_2$ (поддерживая николи скрещенными), изоклины передвигаются в новое положение, вдоль которого p образует угол Φ_2 с осью x . Выявляя изоклины постепенным изменением угла Φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$, можно определить направления главных осей напряжений во всех точках модели (рис. 23).

18. Изостаты

Эта система кривых может быть графически построена, если известны изоклинические кривые. Изостаты, или траектории напряжений, представляют собой кривые, касательная и нормаль в каждой точке которых совпадают с направлениями главных напряжений.

Способ построения изостат представлен на рис. 24. Вдоль каждой изоклины наносятся кресты, причем линии, образующие кресты, проводятся параллельно направлениям главных напряжений, соответствующих каждой изоклине. Затем через изоклины проводятся от руки изостаты так, чтобы каждая изостата имела касательной одну линию креста, лежащего на каждой изоклине.

Остроумный способ получения изостат фотографическим путем был описан Био³¹.

физ. Маббу⁹⁸ воспользовался тем, что в этом случае необходима только одна отражающая поверхность за моделью; он вставил маленькую фотоупругую пластинку с отражающей поверхностью в бетонную конструкцию и, измеряя двойное лучепреломление в пластинке, смог определить напряжения в конструкции. Удвоением величин разности хода в биполяризаторе Нёренберга пользовались многие экспериментаторы для повышения точности измерения малых величин двойного лучепреломления.

Другой тип биполяризатора, известный под названием отражательного полярископа, изображен на рис. 20 (f). В этом случае одно поляризационное приспособление служит одновременно и поляризатором и анализатором.

16. Изохромы

Мы видели, что в круговом полярископе погасание монохроматического света имеет место в том случае, если запаздывание в фазе Δ кратно 2π . Из уравнений (20) и (22) следует, что монохроматическая полоса, или изохрома, есть геометрическое место точек, для которых

$$(\tau_x - \tau_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (p - q)^2 = \left(\frac{n\lambda}{dC}\right)^2. \quad (27)$$

Число n называется порядком полосы и измеряется в относительных единицах $p - q$. Например, разность главных напряжений вдоль полосы 6-го порядка в три раза больше разности главных напряжений на полосе 2-го порядка. Порядок полосы в какой-либо точке соответствует числу циклов интенсивностей, проходящих через эту точку при непрерывном нагружении модели. На рис. 21 (см. вкладной лист II) изображены изохромы вблизи малого кругового отверстия в пластине при ее растяжении. При источнике белого света все изохромы цветные, кроме изохромы нулевого порядка, которая будет темной. При $n = 0$, т. е. когда главные напряжения p и q равны, уравнение (27) дает

$$\sigma_x - \sigma_y = 0, \quad (28)$$

$$\tau_{xy} = 0. \quad (29)$$

Каждое из этих уравнений представляет кривую, и в общем случае две кривые будут пересекаться только в изолированной точке.

Таким образом, нулевая изохрома наблюдается обычно как изолированный темный след, известный под названием точки изотропии.

Пример изохроматической системы с четырьмя изотропными точками приведен на рис. 18(a).

17. Изоклины

Мы видели [уравнение (23)], что в плоском полярископе погасание света имеет место тогда, когда Φ равно $m \frac{\pi}{2}$. Урав-

19. Точки изотропии

Подставляя выражения (28) и (29) в уравнение (30), находим, что в точке изотропии параметр изоклины будет неопределенным. Все изоклины проходят через изотропную точку, и весьма трудно построить изостаты вблизи такой точки.

Файлон⁵⁹, Фёппль и Нейбер⁹ и фон Мизес¹⁷³ показали, что форма изостат вблизи точки изотропии зависит от числа и ориен-

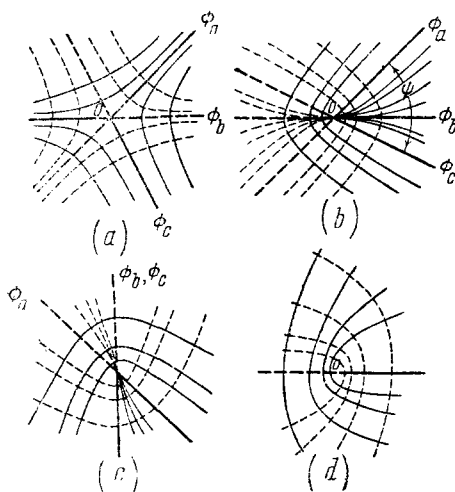


Рис. 25. Изотропные точки первого порядка:
(а) Случай Ia с тремя асимптотами, (б) случай Ib — три асимптоты $\psi < \frac{\pi}{2}$, (с) случай Ic — две асимптоты, (д) случай II — одна асимптота

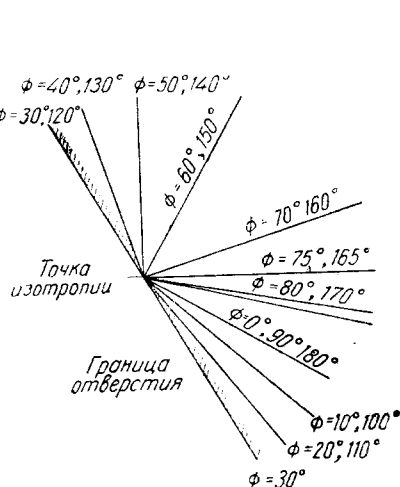


Рис. 26. Увеличенный вид изоклин вблизи точки А рис. 23

тации направлений, для которых касательная к изоклине образует угол с осью x , равный параметру изоклины. В наиболее часто встречающихся случаях наблюдаются одно, два или три таких асимптотических направления. Эти типичные картины с соответствующими изостатами представлены на рис. 25 (асимптотические направления прочерчены жирными линиями). Все они легко отличимы друг от друга, за исключением, пожалуй, случаев Ia и Ib. Случай Ib отличается от случая Ia тем, что в первом угол ψ между двумя асимптотическими направлениями меньше $\frac{\pi}{2}$ (Φ_a и Φ_c) и третье направление (Φ_b) проходит внутри этого угла.

Чтобы определить, к какому типу принадлежит точка изотропии, необходимо найти асимптотические направления. В качестве примера такого исследования рассмотрим точки изотропии, которые появляются на контуре кругового отверстия в широкой пластине при ее растяжении. Таких точек четыре, одна из них в точке А рис. 23. На рис. 26 изоклины около точки А нанесены в увеличенном виде. Обозначая через ζ угол, который изоклина

в точке A образует с осью x , строим кривую с параметром Φ изоклины как абсциссой и ζ как ординатой (рис. 27). Прямая $\Phi = \zeta$ пересекает кривые $\zeta(\Phi)$ в точках, число которых равно числу асимптотических направлений (в этом случае в трех). Пересечения имеют место при $\Phi = 60^\circ$, $\Phi = 120^\circ$, $\Phi = 169^\circ 7'$.

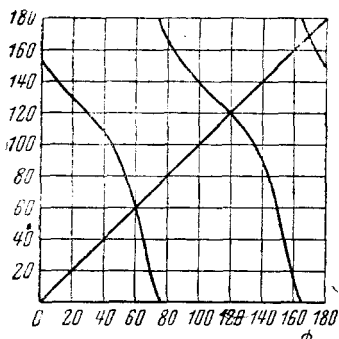


Рис. 27. Определение асимптотических направлений из изоклин рис. 26

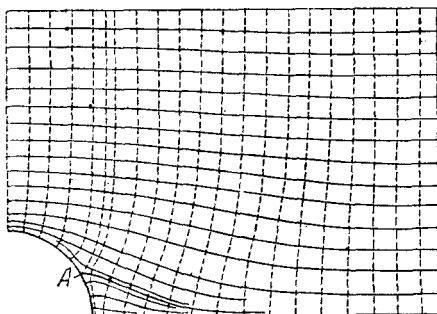


Рис. 28. Траектории напряжений из изоклин рис. 23

Следовательно, в данном случае точка изотропии принадлежит к типу Ia. Полная система траекторий напряжений показана на рис. 28. Фон Мизес¹⁷⁴ и Фёппль⁹ рассматривали точки изотропии с четырьмя асимптотическими направлениями.

IV. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

20. Методы получения главных напряжений

Техника, описанная в § 15, дает возможность определять направление и разность двух главных напряжений в плоскости пластины. Как мы видели, на ненагруженном контуре пластины главные напряжения, нормальные к контуру, исчезают, так что полученных данных достаточно, чтобы определить главные напряжения на контуре независимо друг от друга. В большинстве интересующих инженера случаев наибольшее напряжение в модели и образце появляется именно на свободном контуре; в таких случаях достаточно произвести измерения этих напряжений, и метод фотоупругости дает полное решение проблемы — дальнейшее исследование излишне.

В ряде случаев существует необходимость определения напряжений в каждой точке образца или также вдоль нагруженного контура образца. Для решения задач такого типа были развиты специальные методы независимого определения каждого из главных напряжений; в § 21—31 будут описаны следующие из них.

1. Метод графического интегрирования Файлона.
2. Графический метод Нейбера.
3. Метод бокового экстензомера.

4. Метод интерференции в воздушном слое.
5. Метод концентраций напряжений.
6. Метод интерферометра Фавра.
7. Метод интерферометра Фабри.
8. Метод сходящегося пучка света Гильтчера.
9. Метод мембраны.
10. Электрический метод.
11. Вычислительный метод.

21. Метод Файлона

Рассмотрение условий равновесия малого криволинейного прямоугольника, ограниченного четырьмя соседними изостатами (рис. 29), приводит к следующим двум уравнениям равновесия⁵, которые характеризуют изменения главных напряжений вдоль изостат

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s_1} &= -\frac{p-q}{r_2} \\ \frac{\partial q}{\partial s_2} &= -\frac{p-q}{r_1} \end{aligned} \right\}, \quad (31)$$

где s_1 и s_2 — ортогональные криволинейные координаты, отсчитываемые соответственно вдоль изостат p и q , также как r_1 и r_2 суть соответствующие радиусы кривизны этих изостат (рис. 29). Максвелл отметил¹⁰⁴, что эти уравнения при известных изохромах и изостатах достаточны для определения p и q вдоль всей

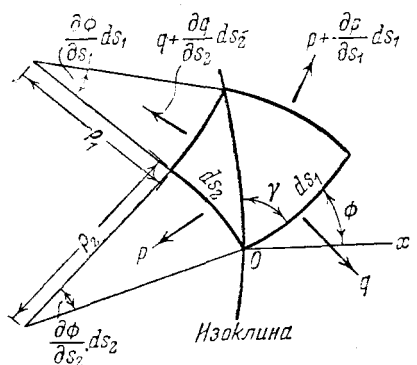


Рис. 29. Криволинейный четырехугольник, образованный четырьмя смежными изостатами

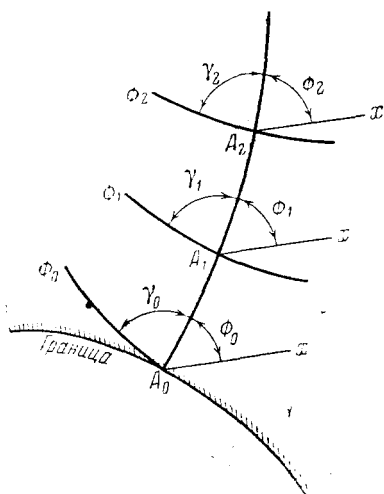


Рис. 30. Метод интегрирования вдоль изостат Файлона

пластины. Числитель в правой части уравнений известен из измерений оптической разности фаз, знаменатель же может быть найден измерениями изостат. Уравнения можно проинтегрировать графически, исходя из точки контура, где напряжения известны.

Величины p_1 и p_2 практически определимы с малой степенью точности; поэтому уравнения в форме (32) неудобны для графического интегрирования.

Файлон⁵⁸ предложил использовать для практических вычислений уравнения (31) в форме

$$p = p_0 + \int_{\Phi_0}^{\Phi} (p - q) \operatorname{ctg} \gamma d\Phi, \quad (32)$$

$$q = q_0 - \int_{\Phi_0}^{\Phi} (p - q) \operatorname{ctg} \gamma d\Phi,$$

где γ — угол между изоклиной и изостатой, как показано на рис. 30; Φ , как и ранее, — угол между изостатой p и произвольным направлением x ; p_0 и q_0 — известные значения p и q в начальной точке интегрирования. Порядок вычисления следующий: для серии точек $A_0, A_1, A_2, \dots$, лежащих на одной изостате [например, p (рис. 30)], определяются одним из описанных в § 15 способов значения $p - q$, γ и Φ . Затем строится

график изменения величины $(p - q) \operatorname{ctg} \gamma$ в функции Φ (рис. 31). Например, площадь, ограниченная кривой и ординатами Φ_0 и Φ_2 , равна

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi_2} (p - q) \operatorname{ctg} \gamma d\Phi.$$

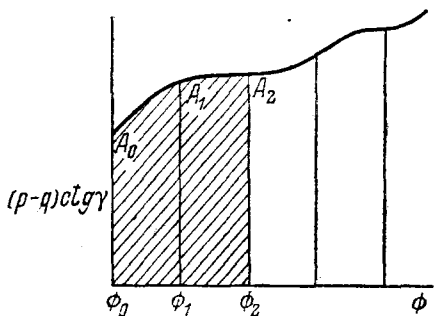


Рис. 31. Графическое интегрирование

$$\text{для } \int_{\Phi_0}^{\Phi_2} (p - q) \operatorname{ctg} \gamma d\Phi$$

Прибавляя значение этого интеграла к величине p_0 (значение напряжения p в точке A_0), найдем напряжение p в точке A_2 . Так как $p - q$ известно, то этим будет определено и q .

Подобное вычисление проводится для всех точек изостаты.

Источники неточности метода лежат в трудности точного измерения углов Φ и γ . Точность измерения зависит от формы изоклин, изоклины же обычно наблюдаются в полярископе в виде широких и размытых полос. Специализация этого метода для некоторых особых случаев распределения напряжений проведена Файлоном⁵, Фёпплом⁶¹, Бодом²⁶ и Фрохтом⁶⁹.

22. Графический метод Нейбера

Исходя из другого варианта уравнений (31), Нейбер¹²⁵ пришел к методу, позволяющему определять p и q графическим построением, не содержащим операции интегрирования. Этот

метод позволяет построить семейство кривых, являющихся геометрическим местом точек с равными $p + q$. Такие кривые носят название изопах. (Значение термина будет разъяснено в следующем параграфе.) Из величин $p + q$ и $p - q$ для каждой точки определяются напряжения p , q .

На рис. 32, OI и $O2$ представляют направления изостат p и q , проходящих через точку O . Это те самые направления, вдоль которых измерялись ds_1 и ds_2 на рис. 29. Направление изопахи, проходящей через точку O , обозначим $O3$, направление нормали к ней — $O4$. Направление изохромы, проходящей через точку O , будет $O5$ и нормали к ней — $O6$. Наконец, направление изоклины, проходящей через O , и $O8$ — нормаль к ней. Как и ранее, Φ есть угол, который изостата p (OI) образует с осью x , и γ есть угол между изоклиной и изостатой p . Углы, которые изопах и изохрома образуют с изостатой p , обозначим соответственно через ξ и η .

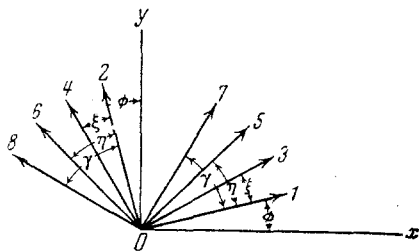


Рис. 32. Диаграмма, применяемая при определении напряжений методом Нейбера. 1 — изостатическое направление, 3 — изопахическое направление, 5 — изохроматическое направление, 7 — изоклиальное направление

Из рис. 29 и 32 находим следующие тождества (полагая $p + q = P$ и $p - q = Q$):

$$\frac{1}{s_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} = -\sin \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial s_5}; \quad \frac{\partial P}{\partial s_1} = -\sin \xi \frac{\partial P}{\partial s_4}; \quad \frac{\partial Q}{\partial s_1} = -\sin \eta \frac{\partial Q}{\partial s_6}.$$

$$\frac{1}{s_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} = \cos \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial s_5}; \quad \frac{\partial P}{\partial s_2} = \cos \xi \frac{\partial P}{\partial s_4}; \quad \frac{\partial Q}{\partial s_2} = \cos \eta \frac{\partial Q}{\partial s_6}.$$

Используя уравнение (31), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial s_4} \sin \xi &= -\frac{\partial Q}{\partial s_6} \sin \eta + 2Q \frac{\partial \Phi}{\partial s_5} \cos \gamma \\ \frac{\partial P}{\partial s_4} \cos \xi &= \frac{\partial Q}{\partial s_6} \cos \eta + 2Q \frac{\partial \Phi}{\partial s_5} \sin \gamma \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Это и есть вид уравнений равновесия по Нейберу.

Пусть приращение напряжения при переходе от одной изохромы к другой будет ΔQ , так что параметры изохромы будут $Q = 0, \Delta Q, 2\Delta Q, \dots$. Ту же величину приращения выберем для изопах, так что $\Delta P = \Delta Q$. Параметр изоклины при переходе от одной кривой к соседней пусть будет равен $\Delta \Phi$. Обозначим через a расстояние между двумя соседними изопахами, b — расстояние между двумя смежными изохромами и c — между изоклинами; a , b и c измеряются соответственно в направлениях 4, 6, 8.

Тогда уравнения (33) могут быть написаны в приближенной форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta P}{a} \sin \xi &= -\frac{\Delta Q}{b} \sin \eta + 2Q \frac{\Delta \Phi}{c} \cos \gamma \\ \frac{\Delta P}{a} \cos \xi &= \frac{\Delta Q}{b} \cos \eta + 2Q \frac{\Delta \Phi}{c} \sin \gamma \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Величины в правой части уравнений (34) могут быть измерены из систем изоклин, изохром и изостат; положив ΔP равным ΔQ , имеем только две неизвестные величины ξ и a и два уравнения для их определения. Угол ξ дает направление изоплах в данной точке. Зная эти направления для ряда точек пластины, можно построить изоплахи таким же образом, как изостатические кривые строятся из системы изоклин.

На свободном контуре $P=Q$, если контуру принадлежит линия 1, и $P=-Q$, если контуру принадлежит линия 2. Порядок изоплахи определяется порядком соответствующей изохромы, которая встречается с ней на свободном контуре. Нейбер приводит несколько измененный способ для случая, когда изоплаха не пересекает контура.

Как и в способе Файлона, точность метода зависит от точности, с которой могут быть измерены углы Φ , γ и η .

23. Способ бокового экстензометра

Менаже¹⁰⁶ заметил, что деформация в направлении нормали к пластине пропорциональна сумме главных напряжений, так что, измеряя изменение толщины в какой-либо точке пластины, можно

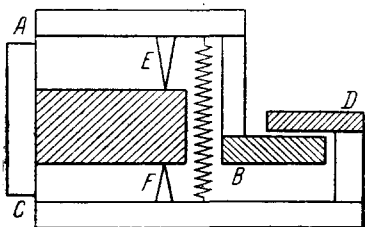


Рис. 33. Интерферометрическая рамка Менаже

определить $p+q$. Следовательно, $p+q$ постоянно вдоль линии постоянной толщины; теперь становится понятен термин Файлона «изоплаха», что значит линия равной толщины.

Если пластина лежит в плоскости x, y , то $\sigma_z=0$, и деформация в направлении нормали к пластине согласно уравнениям (5), (17) и (18) равна

$$\epsilon_z = -\left(\frac{\nu}{E}\right)(p+q). \quad (35)$$

Обозначая через d толщину пластины и через Δd изменение толщины, имеем

$$p+q = -\Delta d \frac{E}{\nu d}. \quad (36)$$

Чтобы получить представление об величине Δd , предположим, что модель изготовлена из бакелита, для которого можно положить $E=600\,000$ Ф/дм.² и $\nu=0,24$. Далее пусть $p+q=1\,000$ Ф/дм.² и $d=0,25$ мм. Тогда $d=0,0001$ дм.². Следовательно, мы должны иметь экстензометр, который измерял бы величины порядка одной стотысячной дюйма.

Менаже построил интерферометрическую рамку для измерений Δd . Она состоит из двух стержней AB и CD (рис. 33), соединенных друг с другом в концах A и C сгибающейся стальной пластинкой. Два контакта в промежуточных точках E и F охватывают модель так, что если толщина модели меняется, то это изменение в еще большей степени изменяет расстояние между концами B и D стержней. Относительное смещение измеряется посредством наблюдения смещения интерференционных полос в воздушном слое между двумя оптическими пластинками, закрепленными в B и D .

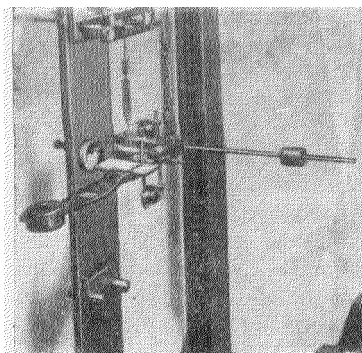


Рис. 34. Боковой экстензометр Вестингауза

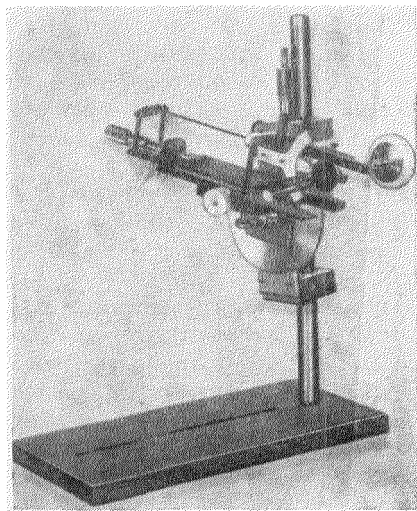


Рис. 35. Боковой экстензометр Кокера

При использовании линии $5461 \text{ \AA}$ ртутной дуги смещение полосы соответствует перемещению на $0,00001075 \text{ дм}$.

Прибор, основанный на том же принципе, но другой конструкции, был сделан Возе¹⁷⁵.

Исследовательская лаборатория Вестингауза применяет экстензометр Гугенбергера, показанный на рис. 34.

В боковом экстензометре Кокера⁴⁵ (рис. 35) острия вилки приводят в действие механический рычаг, который в свою очередь поворачивает маленькое вогнутое зеркало. След от пучка света, отраженного зеркалом, измеряет Δd . Прибор поставлен на подвижную опору, так что изменение толщины вдоль какой-либо линии на модели может быть определено в этом направлении до и после нагрузки.

Три вышеупомянутых прибора более совершенны, чем прибор Кокера.

Методы непосредственного измерения $p + q$ наиболее ценны, так как: 1) измерения независимы от величины $p - q$ и Φ , 2) измерения в одной точке модели независимы от измерений в других точках, 3) приборы недороги.

24. Интерференционный метод воздушного слоя

Марис¹⁰¹ предложил для определения Δd наблюдать интерференционные полосы в тонком слое воздуха, образованного поверхностью самой модели и некоторой вспомогательной оптической пластинкой. Метод был далее разработан Тезаром¹⁵⁷ и Фрохтом^{66,70} так, чтобы можно было наблюдать и фотографировать целый ряд изопахических кривых.

Интерференционные полосы суть геометрические места точек постоянной толщины воздушного слоя и, следовательно, места точек постоянной толщины пластины (если вспомогательная оптическая пластинка правильно ориентирована по отношению к модели). Последовательные полосы будут представлять линии изопах равного приращения $p + q$. Тезар¹⁵⁷ описал следующий способ ориентации вспомогательной пластины. Три точки, не лежащие на одной прямой, выбираются на свободных краях модели. Значения (Q_1, Q_2, Q_3) $p - q$ в этих точках известны из изохром, так что значения (P_1, P_2, P_3) $p + q$ также известны в этих точках. Вспомогательная пластинка крепится таким образом, чтобы порядки изопах в этих точках находились в отношении $P_1 : P_2 : P_3 = Q_1 : Q_2 : Q_3$ (с точностью до алгебраического знака, как указывалось в § 15). Этот способ можно применять лишь в том случае, когда поверхность модели достаточно хорошо полирована (при отсутствии нагрузки отклонения от плоскости должны быть одного порядка с погрешностями в измерении Δd). Если полировка модели недостаточно хороша, то предварительно надо рассмотреть картину полос ненагруженной модели для того, чтобы учесть неправильность ее поверхности. Тезар рекомендует производить наблюдения с обеих сторон модели. Система полос определяет наклон перпендикуляров к поверхности модели данной точки по отношению к плоскости, проходящей через три крайние точки.

Техника этого метода должна быть тщательно разработана, однако затраченный труд компенсируется результатами исследования, а именно получением полной системы изопахических кривых.

25. Метод концентраций напряжений

Этот метод, предложенный Тезаром¹⁰ и Бодом¹, пользуется решением Кирша⁵ для концентраций напряжений у малого кругового отверстия в однородном поле растяжения. На рис. 36 (а) (если p есть напряжение растяжения пластины далеко от отверстия) напряжения в A и A' будут равны $3p$, а в B и B' они будут равны p . Если на это поле будет наложено другое с напряжением q растяжения под прямым углом к p [рис. 36 (b)], то напряжения в A и A' будут

$$P_M = 3p - q \text{ и } P_m = -p + 3q.$$

P_M и P_m — соответственно максимальное и минимальное напряжения около отверстия. Тогда

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{8} (P_m + 3P_M) \\ q &= \frac{1}{8} (P_M + 3P_m) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Для определения p и q в точке фотоупругой пластинки в этой точке просверливается малое отверстие и из изохром определяются P_M и P_m на контуре отверстия (рис. 21); p и q вычисляются тогда по уравнению (37).

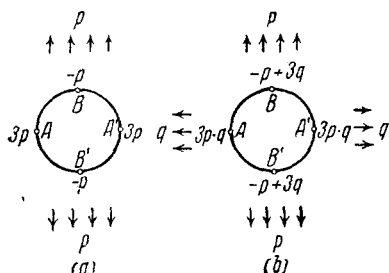


Рис. 36. Диаграмма, применяемая при определении напряжений концентрационным методом

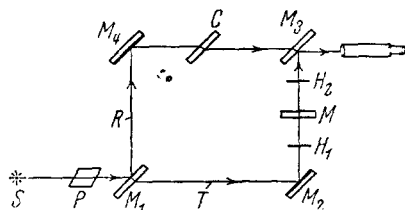


Рис. 37. Интерферометрический полярископ Фавра

Этот метод обладает двумя трудностями: 1) подлежит сомнению возможность просверлить отверстие без «краевого эффекта»; 2) в свете исследований Возе (§ 13) верные значения P_m и P_M получатся только тогда, когда диаметр отверстия будет того же порядка, что и толщина пластины.

26. Интерферометрический метод Фавра

Как мы видели в § 11, измерения абсолютной величины отставания по фазе двух волн, поляризованных в направлениях p и q , позволяют непосредственно определить p и q . Фавр^{53, 54, 56} построил для подобных измерений интерферометр типа Маха-Цендера. В этом приборе (рис. 37) свет от источника света S поляризуется призмой P и разбивается на два луча T и R полусеребряной пластинкой M_1 . Пропущенный луч T отражается от зеркала полного отражения M_2 , проходит сквозь модель M и отражается в зрительную трубу полусеребряной пластинкой M_3 . Другой луч R отражается от M_4 , проходит M_3 и затем соединяется с первым лучом. Пластинка $1/2$ волны H_1 служит для совмещения направления поляризации с одним из направлений главных напряжений для данной точки модели. Вторая пластинка $1/2$ волны H_2 вращает плоскость поляризации обратно к прежнему положению. Стекла C поворачиваются так, чтобы привести фазы лучей T и R , проходящих различные пути, к совпадению, когда модель не нагружена. Когда плоскость поляриза-

ции совпадает, например, с p , модель нагружается и фаза луча T_p изменяется по отношению к фазе луча R по двум причинам. Первая — показатель преломления волны, поляризованной в направлении p , изменяется от n_0 до n_1 и вторая — толщина модели изменяется на величину Δd . Разность фаз между T_p и R будет

$$\Delta_1 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) [d(n_1 - n_0) + (n_0 - 1)\Delta d]; \quad (38)$$

обозначения те же, что и в предыдущем параграфе. Δ_1 измеряется поворотом стеклянной пластинки C до совпадения T_p и R по фазе. Таким же образом плоскость поляризации T приводится в совпадение с q ; аналогичным опытом измеряем разность между T_q и R ; она равна

$$\Delta_2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) [d(n_2 - n_0) + (n_0 - 1)\Delta d]. \quad (39)$$

Подставляя в уравнения (38) и (39) значения $(n_1 - n_0)$, $(n_2 - n_0)$ и Δd , данные уравнениями (21) и (36), находим

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= adp + bdq \\ \Delta_2 &= bdp + adq \end{aligned} \right\}, \quad (40)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{2\pi}{\lambda} \left[C_1 - \frac{\nu}{E} (n_0 - 1) \right] \\ b &= \frac{2\pi}{\lambda} \left[C_2 - \frac{\nu}{E} (n_0 - 1) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (41)$$

Постоянные a и b зависят от материала модели и длины волны источника света; они могут быть определены в угловых единицах вращения стеклянной пластинки C при испытании какого-либо эталона на растяжение.

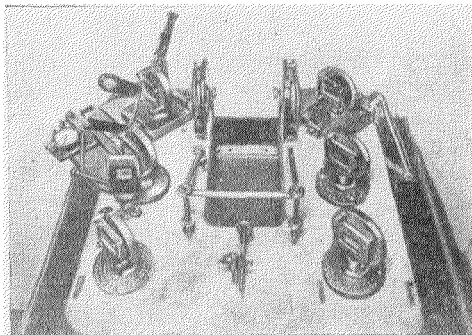


Рис. 38. Прибор Фавра (И. Г. А. Братц, Американское бюро заказов)

Зная Δ_1 , Δ_2 , d , a , b , можем решить уравнение (40) относительно p и q . Подобные измерения проводятся от точки к точке по всей пластине. Этим методом можно получить точные значения, если: 1) поверхности модели достаточно плоски и параллельны между собой (материал модели — стекло), 2) поляризационный интерферометр построен со всеми предосторожностями, 3) температура комнаты поддерживается постоянной. Фотография интерферометра, имеющегося в Американском бюро заказов, показана на рис. 38.

Танк¹⁵¹ дополнил способ интерферометра Фавра так, что он может быть приспособлен для измерения $p-q$ и $p+q$ от точки к точке модели.

27. Интерферометрический метод Фабри

В этом методе⁵² обе поверхности модели серебрятся (50%) и служат в качестве интерферометрических поверхностей. Пучок параллельного света проходит сквозь модель нормально к ее поверхности. Интерференция, имеющая место между лучами, прошедшими сквозь пластину, и лучами, претерпевшими два отражения (рис. 39), наблюдается через анализатор. Луч света, входящий в нагруженную модель, разбивается на две волны p и q , плоско поляризованные в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

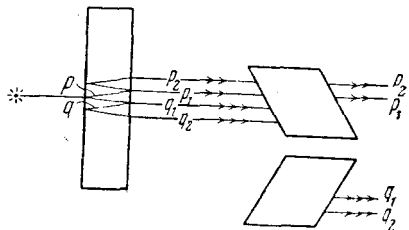


Рис. 39. Метод Фабри

Каждая из этих волн частично пропускается (p_1 и q_1) и частично отражается (p_2 и q_2) от второй поверхности. Отраженная волна (p_2 и q_2) претерпевает второе отражение (от первой поверхности) и затем выходит из модели в первом направлении вместе с p_1 и q_1 . Вращая анализатор, можно погасить одну пару лучей, например, q_1 и q_2 , так как оба эти луча поляризованы в направлениях, перпендикулярных к p_1 и p_2 ; при этом положении интерференция будет происходить между p_1 и p_2 . Поворачивая анализатор на 90° , можно наблюдать интерференцию между q_1 и q_2 .

Этот метод требует анализа каждой точки, так как направление плоскостей поляризации p и q в различных точках модели различно. Поверхности модели в методе интерферометра Фабри должны быть плоскими и параллельными друг другу.

28. Метод сходящегося света Гильтчера

Возвращаясь к нашему рассмотрению эллипсоида индексов (§ 8 и рис. 11), мы видим, что существуют две плоскости BOD и BOD' (на рис. 40), содержащие среднюю главную ось OB , которая пересекает эллипсоид по кругам. Нормали OQ и OQ' к этим плоскостям называются оптическими осями, угол между ними 2Ω называется углом между оптическими осями. Если разности между главными показателями преломления n_a, n_b, n_c малы, как это имеет место в фотоупругости, то можно показать, исходя из геометрических свойств эллипсоида, что:

$$\sin^2 \Omega = \frac{n_a - n_b}{n_a - n_c}, \quad \cos^2 \Omega = \frac{n_b - n_c}{n_a - n_c}. \quad (42)$$

Напомним также (§ 8), что какой-либо радиус ON на рис. 11 представляет возможное направление нормали к волне; плоскость,

проходящая через O перпендикулярно к ON , пересекает эллипсоид по эллипсу DE , полуоси которого OD и OE пропорциональны показателям преломления n_1 и n_2 обеих волн, проходящих сквозь двоякопреломляющую среду. Теперь, если θ_1 (рис. 11) есть угол между нормалью к волне и оптической осью OQ и если θ_2 — угол между нормалью к волне и оптической осью OQ' , то можно

показать, исходя опять-таки из геометрических свойств эллипсоида, что

$$n_1 - n_2 = (n_a - n_c) \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad (43)$$

если разности между показателями малы.

Из уравнения (10) имеем

$$\left. \begin{aligned} n_c - n_a &= C(\sigma_3 - \sigma_1) \\ n_a - n_b &= C(\sigma_1 - \sigma_2) \\ n_b - n_c &= C(\sigma_2 - \sigma_3) \end{aligned} \right\}, \quad (44)$$

так что согласно (42), (43), (44) и (9) имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_3 - \sigma_1 &= \frac{\lambda \Delta}{2\pi d C} \frac{1}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \\ \sigma_2 - \sigma_1 &= \frac{\lambda \Delta}{2\pi d C} \frac{\sin^2 \Omega}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \\ \sigma_3 - \sigma_2 &= \frac{\lambda \Delta}{2\pi d C} \frac{\cos^2 \Omega}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \end{aligned} \right\}. \quad (45)$$

Рис. 40. Эллипсоид индексов, показывающий круговые сечения

Мы только что видели, как можно измерить две величины, стоящие в правой части уравнения (45), кроме Ω , θ_1 и θ_2 . Следовательно, если определить эти три угла, то можно получить значения трех разностей главных напряжений. Если одно из трех главных напряжений равно нулю (двухмерное напряженное состояние), то два других определяются из уравнения (45).

Гильтчер измерял Ω , θ_1 и θ_2 , пользуясь сходящимся пучком поляризованного света; эти углы могут быть также измерены употребляющимся в петрографии универсальным вращающимся столиком.

29. Метод мембраны

Рассмотрим малую деформацию ε_x линейного отрезка PA (рис. 41) длины δx , параллельную оси x . Перемещение точки P в P' обозначим через u , перемещение точки A в A' будет равно $u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \delta x$. Следовательно, деформация PA равна

$$\varepsilon_x = \frac{P'A' - PA}{PA} = \frac{[(\delta x - u) + u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \delta x] - \delta x}{\delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (46)$$

Аналогично этому деформация ϵ_y , параллельная оси y , выражена через смещение v в направлении y , будет равна:

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (47)$$

Для получения соответствующего выражения деформации сдвига γ_{xy} в плоскости x, y рассмотрим изменение угла между смежными сторонами PA и PB элемента этой плоскости (рис. 42). P смещено в P' , A в A' , B в B' .

Если расстояние по перпендикуляру от P' до PA есть v , то в первом приближении расстояние по перпендикуляру от A' до

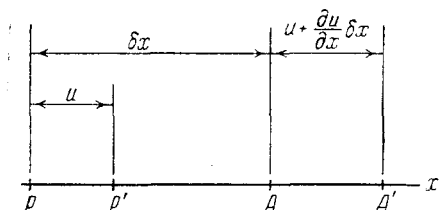


Рис. 41. Деформации и смещения вдоль оси x

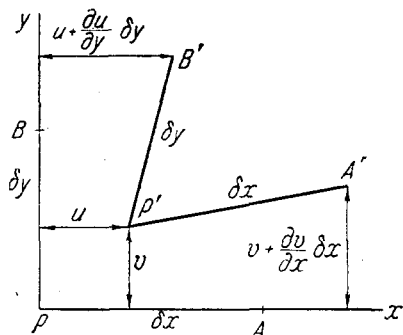


Рис. 42. Деформация сдвига в плоскости x, y

PA есть $v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \delta x$. Следовательно, синус угла между $P'A'$ и PA равен

$$\frac{\left(v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \delta x\right) - v}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

и так как угол мал, то $\frac{\partial v}{\partial x}$ можно положить равным углу между $P'A'$ и PA . Подобно этому $\frac{\partial u}{\partial y}$ есть угол между $P'B'$ и PB . Величина γ_{xy} равна суммарному изменению угла между двумя сторонами, т. е.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (48)$$

Очевидно, что три компоненты перемещения ϵ_x , ϵ_y и γ_{xy} не являются независимыми величинами, так как все они могут быть выражены через две компоненты смещения u и v . Чтобы найти соотношение между ними, дифференцируем уравнение (46) дважды по x , уравнение (47) дважды по y , уравнение (48) один раз по x и один раз по y . Складывая, получим

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (49)$$

Это выражение известно как уравнение совместности; оно выражает закон, управляющий возможными изменениями компонент перемещений вдоль пластины, или, иначе говоря, дает условие неразрывности материала.

Рассмотрим теперь законы, связывающие компоненты напряжений при условии, что усилия, действующие на элемент плоскости x, y , будут в равновесии. Такой элемент с действующими на него усилиями изображен на рис. 43.

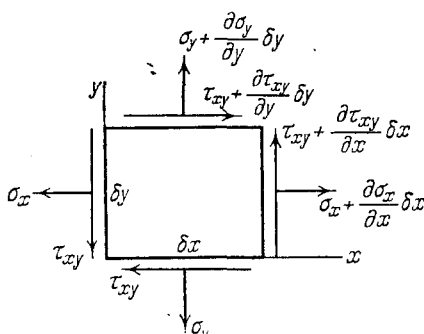


Рис. 43. Напряжения, действующие на прямоугольный элемент в плоскости x, y

Суммируя усилия в направлениях осей x, y , находим следующие уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Дифференцируя первое из уравнений (50) по x , второе по y и складывая их, получим

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (51)$$

Деформации связаны с напряжением законом Гука [уравнение (5)]. В случае плоского напряженного состояния имеем

$$\left. \begin{aligned} E \varepsilon_x &= \sigma_x - \nu \sigma_y \\ E \varepsilon_y &= \sigma_y - \nu \sigma_x \\ E \gamma_{xy} &= 2(1 + \nu) \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Подставляя уравнение (52) в (49) и используя (51), получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (53)$$

Далее из уравнений (17) и (18)

$$(\sigma_x + \sigma_y) = (p + q)$$

имеем уравнения Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (p + q) = 0; \quad (54)$$

последнее уравнение управляет изменением суммы главных напряжений. Ден Гартог⁵⁰, Био³¹ и Бинзено и Кох³⁶ обратили внимание на то, что уравнение (54) совпадает с уравнением мембраны, находящейся под действием сил, приложенных только к ее контуру. Эта аналогия используется следующим образом: в пластинке вырезается отверстие той же самой формы, что и контур модели; по краям отверстия строятся в каждой точке нормали к плоскости, пропорциональные по величине $p + q$. На это отверстие натягивается мембрана, причем таким образом, чтобы ее ординаты на краях отверстия совпадали с длинами пропорциональных значений $p + q$ нормалей. Тогда мембрана примет такую форму, что ее ординаты для всех точек отверстия будут также пропорциональны величине $p + q$ в каждой точке.

Этот метод легко осуществим и применяется для всех областей вблизи границы модели, для которой $p + q$ может быть заранее определено. Описываемый метод с успехом использовался Вейбелем^{177, 178} (рис. 44 и 45) с применением в качестве мембраны

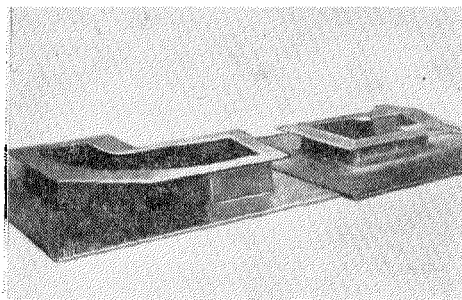


Рис. 44. Модели, применяемые в мембранной аналогии (Е. Е. Вейбель)

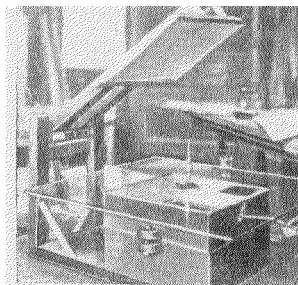


Рис. 45. Прибор мембранной аналогии (Университет в Мичигане)

мыльной пленки. Био и Смитс³⁵, Мак Гиверн и Суппер^{121, 122} употребляли тонкослойную резину.

30. Электрический метод

Если значения $p - q$ на контуре известны, то уравнение (54) может быть решено и другим способом.

Известно, например, что распределение потенциала в двумерном электрическом поле подчиняется тому же уравнению. Если вырезать отверстие в металлической пластинке одинаковой с моделью формы и приложить к каждой точке контура электрический потенциал, пропорциональный $p + q$, то потенциал в точках внутри отверстия будет пропорционален значению $p + q$ в этих точках.

Метод описан Бинзено и Кохом³⁶, Био³¹, Малаваром¹⁰⁰ и Мейером и Танком¹¹⁰.

31. Вычислительный метод

Либман⁹⁷ показал, что уравнение Лапласа может быть решено для данных значений на контуре модели методом последовательных приближений. В этом методе сетка, состоящая из системы ортогональных прямых, накладывается на исследуемую область; приближенные значения $p + q$ задаются в каждой точке пересечения линий. Либман указывает, что истинное значение функции в любой точке будет равно среднему из четырех значений в соседних точках пересечения. Этим способом можно шаг за шагом вычислить значения $p + q$ во всех точках области.

Шортли и Веллер¹⁴² изменили метод, желая достигнуть более быстрой сходимости вычисления.

V. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ФОТОУПРУГОСТИ

32. Гидродинамическая аналогия Гудие

Гудие⁷³ обратил внимание на полную аналогию между картинами фотоупругости и медленного движения вязкой жидкости при двумерном рассмотрении. Изопахи соответствуют линиям постоянной скорости вращения; линии, перпендикулярные к изопахам, соответствуют линиям постоянного гидростатического давления; изохромы соответствуют линиям постоянной величины деформаций сдвига в потоке; наконец, изостаты соответствуют линиям, указывающим ориентацию элементов, имеющих наибольшую деформацию сдвига.

Эта аналогия дает основу для способа решения гидродинамических задач методами фотоупругости.

33. Гравитационная и термическая аналогия

Био³²⁻³⁴ показал, каким образом можно исследовать методом фотоупругости задачу о напряжениях, наступающих в теле благодаря действию сил тяжести и от изменения температуры, без фактического воспроизведения объемных сил и нагревания модели.

Напряжения, вызванные собственным весом тяжелого тела, могут быть вычислены из напряжений модели малых размеров той же формы, если к контуру этой модели приложить нормальное давление, меняющееся по линейному закону с толщиной.

Напряжения, вызванные стационарным потоком тепла в полном цилиндре, могут быть найдены исследованием напряжения плоской модели, имеющей форму сечения цилиндра. Эта модель должна быть разрезана по радиусу и образовавшаяся щель должна быть увеличена или деформирована на величину, которая может быть заранее вычислена. Вейбель¹⁷⁹ применил этот метод для случая различных поперечных сечений (см. рис. 46, вкладной лист III). Напряжения в толстом цилиндре при неустановившемся потоке могут быть определены с помощью плоской модели того же поперечного сечения, нагруженного по контуру.

Био и Смитс³⁵ исследовали этим способом термические и усадочные напряжения в плотинах.

34. Трехмерная фотоупругость

В предыдущих главах был описан метод фотоупругости для двумерной задачи. Упомянутые способы не могут быть применены без изменений для изучения трехмерного распределения напряжений, так как в этом случае величина и направление всех трех компонент напряжения изменяются вдоль линии распространения света. Наблюдается только эффект, «проинтегрированный» по всей длине луча; необходимо же исследовать оптические свойства в каждом элементе вдоль пути луча. До сих пор не

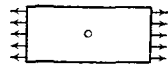
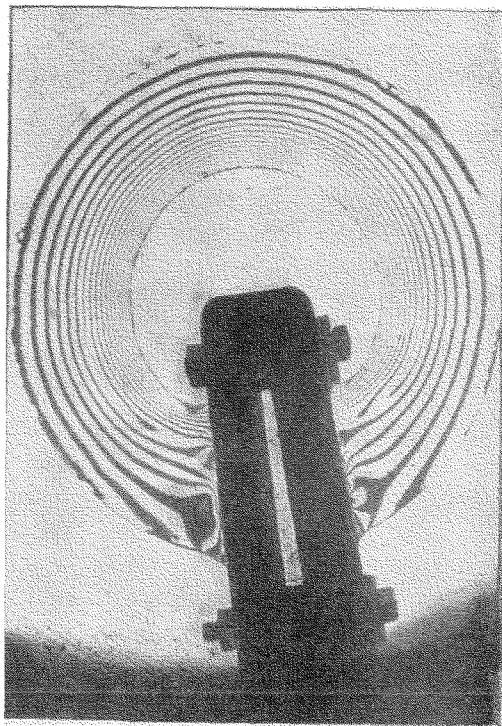


Рис. 46. Применение термической аналогии
Био (Е. Е. Вейбель)

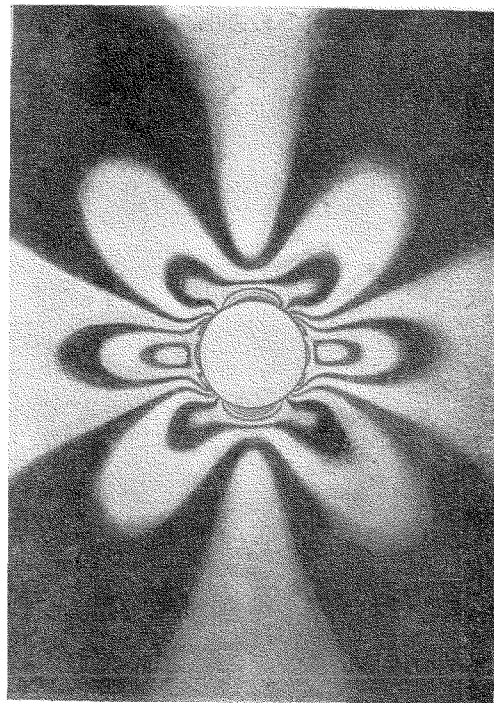


Рис. 48. Концентрация напряжений вокруг от-
верстия в растягиваемой полосе (М. М. Фрохт)

были предложены аналитические выражения, связывающие суммарный эффект с состоянием напряжения внутри тела.

Фавр⁵⁵ предложил наблюдать оптический эффект напряженного малого кубика, сделанного из фотоупругого материала и заделанного в наиболее интересные точки прозрачной модели, сделанной из материала, для которого оптический коэффициент напряжения равен нулю; однако, экспериментальные трудности подобного опыта, повидимому, непреодолимы.

Менаже¹⁰⁸ предложил способ, пригодный для ограниченного класса трехмерных задач. Успешное применение метода привело бы к определению напряжений на границах, вызванных силами, приложенными нормально к плоскости пластины. Опыт производится так: на полированную поверхность металла накладывается тонкий слой прозрачного материала, который становится двоякопреломляющим при деформации. Изгиб пластины в ее плоскости вызывает плоское напряженное состояние; происходящее благодаря напряжению двойное лучепреломление измеряется в свете, отраженном от полированной и металлической поверхности. Нам, однако, неизвестны удачные результаты применения этого метода.

Тимби и Гедрик¹⁶⁴ предложили другой способ для анализа напряжений на поверхностном слое. Они приклеивали к поверхности прозрачной модели тонкий слой поляроида. На него наклеивается слой фотоупругого материала. Свет, проходящий через модель, проходит сквозь поляроид так, что эллиптическая поляризация пропадает. Таким образом, через слой, двоякопреломляющего материала проходит только плоско поляризованная световая волна. Наблюдение выходящего пучка света дает представление о двумерном состоянии напряжения в поверхностном слое.

В 1851 г. Максвелл¹⁰⁴ произвел опыт, который лег в основу многообещающего метода трехмерной фотоупругости. Максвелл сделал пустотелый цилиндр из нагретой желатины и вращал внутреннюю поверхность цилиндра по отношению к наружной (на малый угол около оси цилиндра). При охлаждении в желатине возникло двойное лучепреломление, указывавшее на упругое распределение напряжений.

Максвелл не мог объяснить это явление, и опыт был забыт до 1935 г. Солакиан¹⁴⁵, повторяя опыт Максвелла, нагревал толстый цилиндрический стержень из мрамора, прилагая скручивающую пару сил к оси стержня; материал охлаждался при действии пары. После этого цилиндр разрезался на пластинки круглого сечения, которые исследовались в поляризованном свете. Получающаяся картина полос не соответствовала, однако, состоянию напряжений, предсказанному теорией кручения Сен-Венана, на что было указано Хетени⁷⁷.

Оппель¹²⁸ сделал подобный эксперимент с образцом троллона. К нагретому образцу прижимался металлический шар; затем образец охлаждался под нагрузкой. Оппель отмечает, что картина, появляющаяся при исследовании пластинок, вырезанных из охлажденного образца, соответствует состоянию упругих напряжений.

Последние эксперименты Хетени (см. § 12) и исследования Куске⁹³ объясняют описываемое явление. При высоких температурах приложенным усилиям сопротивляется упругий нерастворимый скелет. Когда материал охлаждается под нагрузкой, растворимая часть замерзает вокруг деформированного скелета и удерживает деформацию, когда нагрузка снимается. В результате материал находится в состоянии упругой деформации, имевшей место при высокой температуре. Это состояние не нарушается заметным образом при осторожном разрезании модели, так как равновесие между растворимой и нерастворимой частью существует в областях пространства порядка молекулы. Трудность в проведении исследования заключается в том, что в то время как модуль Юнга уменьшается при повышении температуры в отношении 640:1, относительный оптический коэффициент напряжения возрастает только в отношении 26:1. Деформация, нужная для получения большего значения двойного лучепреломления, настолько велика, что значительно изменяет форму модели.

Интерпретация двойного лучепреломления, получающегося в вырезанной пластинке, гораздо сложнее соответствующей расщипки в двумерном случае. В общем случае главная плоскость оптической симметрии не совпадает с плоскостью среза, так что относительная разность фаз не будет мерой разности между главными показателями преломления и, следовательно, не будет пропорциональна разности главных напряжений. Три разности главных напряжений могут быть определены, как показал Гильтчер⁸¹ дополнительными измерениями, для каждой точки срезанного слоя, угла между оптическими осями 2Ω и углов θ_1 и θ_2 между нормалью к срезу и оптической осью (см. § 8 и 28).

35. Специальные случаи трехмерной задачи

Есть несколько случаев¹¹⁴, для которых нет необходимости измерять три угла Ω , θ_1 и θ_2 .

В наиболее важном из них распределение напряжений имеет плоскость симметрии. Это бывает в том случае, когда модель и система усилий геометрически симметричны по отношению к некоторой плоскости. Плоскость симметрии есть в этом случае плоскость главных напряжений; таким образом относительная разность фаз для слоя, вырезанного по этой поверхности, пропорциональна одной из трех разностей главных напряжений. Плоскость, в которой лежат оптические оси, будет параллельна или перпендикулярна к плоскости симметрии. В последнем случае биссектриса угла между оптическими осями либо параллельна, либо перпендикулярна плоскости среза. Следовательно, $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$, или $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \Omega$, или $\theta_1 = \theta_2 = \Omega$, в зависимости от того, какая плоскость симметрии совпадает с плоскостью среза. Если измерить θ_1 и Ω в дополнение к Δ , то можно согласно (45) вычислить три разности главных напряжений.

В призматическом или цилиндрическом стержне, подверженном кручению по Сен-Венану¹⁾, одно из главных напряжений в точке стержня будет равно нулю, остальные два равны друг другу и противоположны по знаку. Направление нулевого главного напряжения перпендикулярно к образующей цилиндра, другие два направления главных напряжений образуют угол в 45° с образующей. Это состояние напряжения соответствует двухосному кристаллу с углом между оптическими осями $\frac{\pi}{2}$, так как оптические оси параллельны и перпендикулярны к образующей. Срез стержня нормально к образующей дает разность фаз, равную нулю для нормально падающего луча; однако срез, сделанный под другим углом к образующей, дает разности фаз, из которых можно вычислить главные напряжения. Для вычисления необходимо знать углы θ_1 и θ_2 , которые нормаль к волне образует с оптической осью. Один из этих углов будет постоянным; он равен углу между осью стержня и нормалью к срезу; другой будет изменяться от точки к точке сечения. Для каждой точки среза надо найти только лишь этот угол θ_2 и разность фаз Δ . Уравнение (45) позволяет непосредственно вычислить главные напряжения, если известны: длина волны λ , толщина вырезанной пластинки d и оптический коэффициент C . Хетени⁷⁸ обратил внимание, что срез под углом в 45° дает наибольшее количество полос; надо отметить, однако, что полосы не указывают геометрических мест равных разностей главных напряжений. Необходимо знать угол θ_2 для каждой точки в срезе под углом в 45° . Угол θ_2 может быть определен следующим путем: пусть O будет точка на срезе под 45° ; для этой точки ищется θ_2 . Нормаль к срезу в точке O и линия, параллельная образующей стержня в той же точке O , определяют плоскость, которая пересекает плоскость среза по линии OA . Пусть OB — ось поляризации в срезе в точке O (она определена из системы изоклин обычным путем) и пусть угол $AOB = \alpha$. Можно показать¹¹⁴, что

$$\sin \theta_2 = (1 + \cos 2\alpha)^{1/2}.$$

Подобные формулы пригодны и для сечений, срезанных под другим углом.

36. Определение σ_3 , σ_2 и σ_1 в трехмерной задаче

Гильтчер⁸¹ указал, что, измеряя Δ , Ω , θ_1 и θ_2 для достаточного числа различных сечений, можно получить только направления трех главных напряжений и их разности для всех точек, за исключением точек свободного контура. Для определения главных напряжений в общем случае необходимо измерять n_a , n_b и n_c или применить другие неоптические измерения.

Существует три стандартных метода для измерения главных показателей преломления, но ни один из них, повидимому, не

¹⁾ Timoshenko, Theory of Elasticity, New York, p. 228, 1934.

удовлетворителен для современных методов исследования фотоупругости в трех измерениях.

В методе Стокса¹⁾ срез помещается на линейчатую решетку; последняя наблюдается через микроскоп. Вследствие двойного лучепреломления пластинки каждое семейство параллельных линий будет видно в фокусе в двух положениях объектива микроскопа. Три показателя преломления могут быть вычислены из относительных положений фокуса. Однако, фотоупругое двойное лучепреломление так мало, что этот метод мало применим.

Метод призмы²⁾ требует вырезывания малой призмы из модели для каждой точки, в которой необходимо определить напряжения.

Методы полного отражения³⁾ очень точны, но они позволяют измерить оптические свойства в поверхностном слое образца. Однако, свойства на поверхности не дают оптических характеристик внутренних точек образца.

Куске⁹³ заметил, что, нагревая срезанную пластинку и измеряя изменение по толщине, можно получить достаточно данных (вместе с ранее полученными) для вычисления σ_3 , σ_2 и σ_1 .

37. Динамические задачи

Метод фотоупругости применялся при решении трех динамических задач: 1) исследования постоянного напряженного состояния, 2) исследования периодического изменения напряжений и 3) исследования мгновенного состояния напряжений.

Фрост и Уиткомб⁷¹ исследовали напряжения во вращающемся диске при постоянной угловой скорости. Это — случаи, когда напряжения не меняются во времени.

Исследования периодически изменяющихся напряжений во вращающихся зубчатых колесах были проведены Гаймсом и Бодом⁸². Напряжения в вибрирующих балках изучались Ривилли¹³⁶ и Мюрреем¹¹⁹. На рис. 47 (см. вкладной лист IV) изображена фотография Мюррея консольной балки с колебаниями в 60 периодов в секунду. Мгновенные напряжения, возникающие при ударе, рассматривались Тузи¹⁶⁹, Тузи и Низида^{170, 171}, Фрохтом⁶⁵ и Тувенином¹⁶³. Мюррей¹¹⁹ указал на трудности, которые встречаются при исследованиях мгновенных состояний напряжения.

38. Области применения метода фотоупругости

Метод фотоупругости был использован при решении широкого класса задач в областях машиностроения, стальных и бетонных конструкций, горного дела, кораблестроения, воздухоплавания, испытания материалов, физических исследований, стекольной промышленности, механики почв и фундаментов, железнодорожного

1) Walker, Analytical Theory of Light, p. 225, 1904.

2) То же, стр. 230.

3) То же, стр. 242.

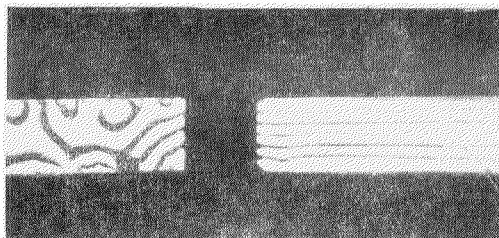


Рис. 47. Фотография полос консольной балки, вибрирующей при 60 колебаниях в секунду (В. М. Мюррей)

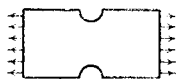
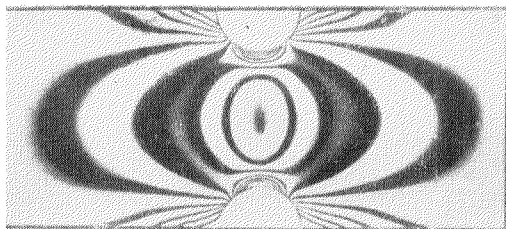


Рис. 49. Концентрация напряжений при круговых надрезах в полосе при растяжении (М. М. Фрехт)

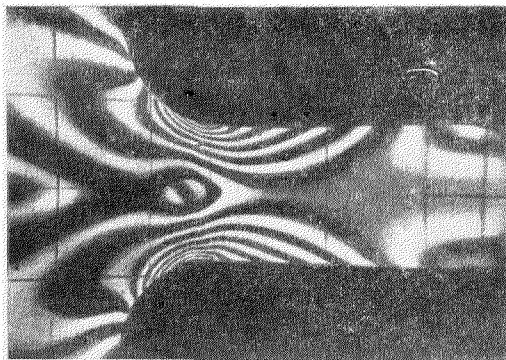


Рис. 50. Концентрация напряжений в галтелях консольной балки (Е. Е. Вейбель)

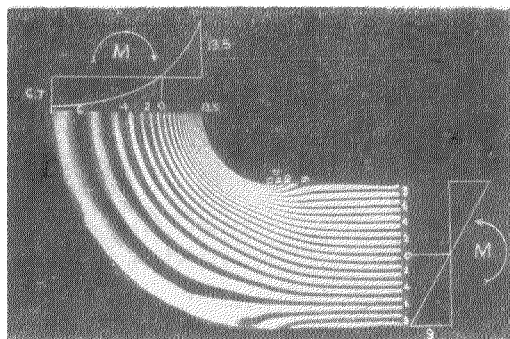


Рис. 51. Кривой брус при частом изгибе
(Е. Е. Вейбель)

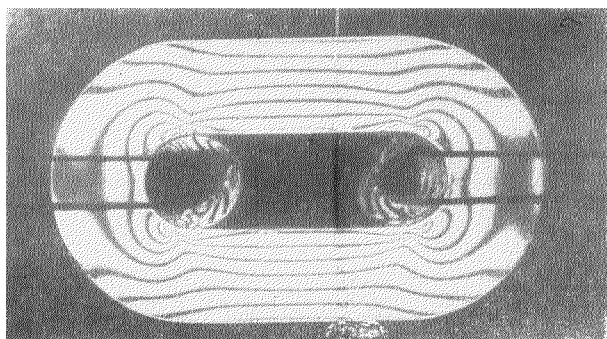
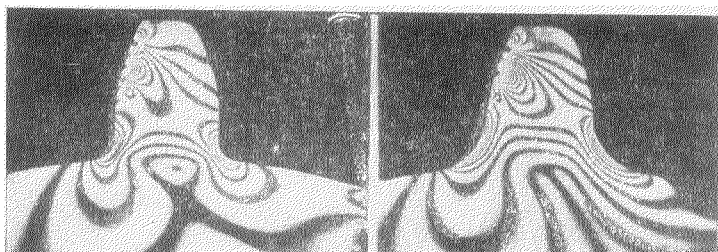


Рис. 52. Звено цепи (В. М. Мюррей)



(a)

(b)

Рис. 53. Напряжения в зубчатых колесах
(Р. И. Долан)



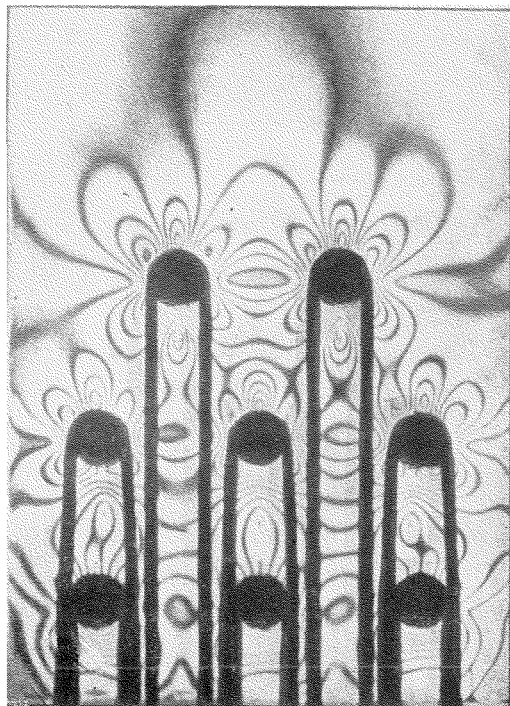


Рис. 54. Напряжения в теле пластины, связанной
заклепочным швом

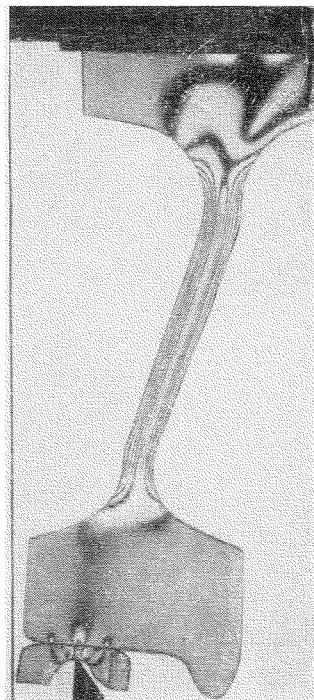
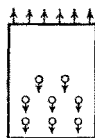


Рис 56 Напряжения в колесе железнодорож-
ного вагона (Р. И. Долан) I—втулка, II—обод
колеса



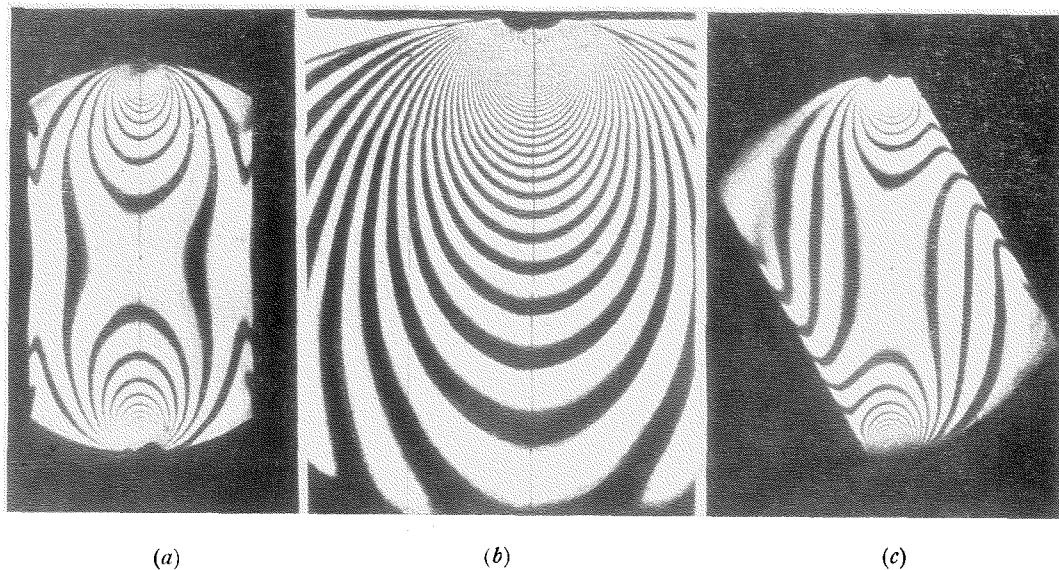
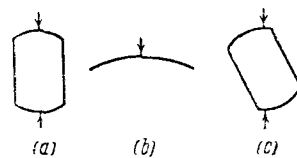


Рис. 55. Исследование напряжения в мостовых катках (И. Г. А. Братиц): (a) каток, нагруженный centrally, (b) увеличенный вид области вблизи концентрированной нагрузки, (c) каток, нагруженный вблизи края



дела и многих других областях инженерной и прикладной физики. Литература, по которой можно ознакомиться с приложениями метода фотоупругости в различных областях, приведена ниже:

Арочные мосты ^{23, 107, 127}	Подпорные стенки ⁴²
Мостовые фермы ²²	Пластины с отверстиями ¹⁴⁹
Колеса вагонов ^{47, 141}	Вращающиеся диски ⁷¹
Напряжение в бетоне ^{98, 148}	Резиновая промышленность ^{161, 162}
Плюгины ^{33, 41, 160}	Винтовые нарезки ^{74, 86}
Испытания на усталость ^{131, 132}	Напряжения от усадки ³⁵
Плоские стержни ¹⁶⁴	Механика почвы ⁸⁴
Потоки жидкости ^{73, 133, 139}	Концентрация напряжений ^{67, 63, 137, 175, 176, 177}
Зубчатые колеса ^{57, 82}	Детали машин ^{35, 42, 153, 159, 168}
Стекланные изделия ^{85, 154, 155}	Термические напряжения ^{31, 32, 133, 179}
Различные конструкции ⁸⁷	Кручение ^{77, 78}
Клинья и шпонки ¹⁴⁷	Туннели ¹⁴³
Испытание материалов ^{93, 101, 120, 156}	Сварные соединения ^{46, 48, 144}
Железобетон ^{30, 102}	

Некоторые типичные фотографии приводятся на вкладных листах, Рис. 48, 49 и 50 показывают характерную картину распределения напряжения вблизи отверстий и галтелей. На рис. 51 изображен брус при чистом изгибе. На рис. 52 показаны полосы нагруженного звена цепи. Напряжения в зубчатых колесах показаны на

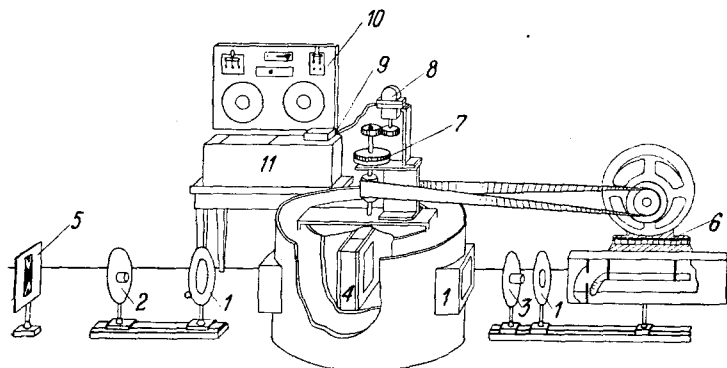


Рис. 57. Прибор полярископ-центрифуга (Р. Б. Буги. ⁴²)

1 — линза, 2 — анализатор, 3 — поляризатор, 4 — вращающаяся коробка, 5 — фото-пластинка, 6 — ртутная трубка, 7 — синхронный выключатель, 8 — тахометр, 9 — вольтметр, 10 — контроль мотора, 11 — стробоскопический контроль света

рис. 53. Напряжения в теле пластины, связанной заклепочным швом, даны на рис. 54. Рис. 55 (а) и (с) иллюстрируют исследования мостовых катков. На рис. 55 (а) изображен каток, нагруженный вдоль оси; рис. 55 (б) показывает в увеличенном виде область вблизи приложения сосредоточенной нагрузки. На рис. 55 (с) изображен каток, нагруженный вблизи края.

Фото, полученное при исследовании напряжений в колесе железнодорожного вагона при различных условиях нагрузки, показано на рис. 56.

Интересное приспособление для фотоупругого исследования напряжений, появляющихся в результате действия силы тяжести,

дано Буки, Солакианом и Балдином⁴². Модель вращается на центрифуге, благодаря чему на точки модели действуют силы, подобные гравитационным; картина полос наблюдается стробоскопом (рис. 57).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Baud, Schweizer Archiv für angew. Wiss. und Techn., **4**, 1—15, 48—53, 1938.
2. R. V. Baud, Schweizerische Bauzeitung, **100**, 1932.
3. E. G. Coker, Gen. Elec. Rev., **23**, 870—877, 1920; **23**, 966—973, 1920; **24**, 82—88, 1921; **24**, 222—226, 1921; **24**, 455—466, 1921.
4. E. G. Coker, J. Frank. Inst., **199**, 289—331, 1925.
5. E. G. Coker and L. N. G. Filon, A Treatise on Photoelasticity (Cambridge University Press, Cambridge, 1931).
6. L. N. G. Filon, Manual of Photo-Elasticity for Engineers (Cambridge University Press, Cambridge, 1936).
7. L. Föppl, Z. techn. Physik, **15**, 430—436, 1934.
8. L. Föppl, Der Bauingenieur, **19**, 341—345, 1938.
9. L. Föppl u. H. Neuber, Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik (R. Oldenbourg, München u. Berlin, 1935).
10. P. Laurent et A. Popoff, Rev. de Métallurgie, **35**, 363—378, 407—424, 448—474, 1938.
11. G. Mesmer, Die Messtechnik, **11**, 217—221, 238—241, 1935.
12. A. Mesnager, Détermination expérimentale des efforts intérieurs dans les solides, Fascicule X du Mémorial des sciences physiques (Gauthier-Villars, Paris, 1929).
13. G. Oberti, Rendiconti Seminario di matematico e fisica d. R. Univ. Milano, **6**, 217—251, 1932.
14. G. Oberti, Indagini sperimentali sulle costruzioni con l'uso dei modelli, Atti, Ricerche e Studi, R. Politecnico di Milano, Hoepli, Milano, 1935.
15. G. Oberti, Energia elettrica, **13**, 16—23, 1936.
16. Photoelastic Journal, New York.
17. M. Salvadori, Annali dei Lavori Pubblici, **75**, 90—110, 1937.
18. V. Tesar, La Technique Moderne, **30**, 259—265, 1938.
19. E. E. Weibel, Developments in Photoelasticity, S. Timoshenko, 60 th Anniversary Volume (Macmillan Company, New York, N. Y., 1938), p. 257—267.
20. I. Arakawa, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **5**, 117—136, 1923.
21. I. Arakawa, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **7**, 160—180, 1925.
22. L. Baes, L'Ossature Métallique, **5**, 457, 1936; **6**, 432, 1937.
23. L. Baes, La Technique des Travaux, **13**, 442, 1937.
24. R. V. Baud, J. Opt. Soc. Am. and Rev. Sci. Inst., **18**, 422—437, 1929.
25. R. V. Baud, J. Opt. Soc. Am., **21**, 119—122, 1931.
26. R. V. Baud, J. Frank. Inst., **211**, 457—474, 1931.
27. R. V. Baud and W. D. Wright, J. Opt. Soc. Am., **20**, 381—395, 1930.
28. R. V. Baud u. F. Tank, Schweizerische Bauzeitung, **111**, 176—177, 1938.
29. L. Bergmann, V. D. I. Z., **81**, 878—882, 1937.
30. A. H. Beyer and A. G. Solakian, Proc. Am. Soc. Civil Eng., **59**, 1121—1132, 1933.
31. M. A. Biot, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **B53**, 13—15, 1933.
32. M. A. Biot, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **B54**, 14—18, 1934.
33. M. A. Biot, J. App. Mech., **2**, 41—45, 1935.
34. M. A. Biot, Phil. Mag., **19**, 540—549, 1925.
35. M. A. Biot et H. Smits, Bull. Tech., № 4, p. 10; Bull. tech. de l'Union des ing. sortis des Écoles spéciales de Louvain, 1933.
36. C. B. Bienzeno and J. J. Koch, Ingenieur Archiv, **4**, 384—393, 1933.
37. P. H. Black, Univ. of Illinois Engineering Experiment Station, Bull. 288, 1—29, 1936.

38. L. Blanche et F. Temmermann, Soc. roy. Belge des ingénieurs et des industriels, № 9, 823—863, 1937.
39. A. V. Blom, Koll. Z., **80**, 212—215, 1937.
40. J. H. A. Brahtz, Rev. Sci. Inst., **5**, 80—83, 1934.
41. J. H. A. Brahtz, Proc. Am. Soc. Civil Eng., **61**, 983—1020, 1935.
42. P. B. Bucky, A. G. Solakian and L. S. Baldin, Civil. Eng., **5**, 287—290, 1935.
43. R. B. Carleton, Rev. Sci. Inst., **5**, 30—32, 1934.
44. E. G. Coker, Engineering (London), **90**, 1—4, 1911.
45. E. G. Coker, Engineering (London), **129**, 465—467, 1930.
46. E. G. Coker and R. Russel, Institution of Naval Architects, **5**, 1—8, 1933.
47. E. G. Coker and M. Salvadori, Proc. Inst. Mech. Eng., **131**, 493—512, 1935.
48. E. G. Coker and B. P. Haigh, Trans. Roy. Inst. Architects, **77**, 193—207, 1935.
49. J. W. Cookson and H. Osterberg, Physics, **7**, 166, 1936.
50. J. P. Den Hartog, Z. angew. Math. und Mech., **11**, 156, 1931.
51. R. G. Edmonds and B. T. Mc Minn, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., **54**, 77—82, 1932.
52. C. Fabry, C. R., Paris, **190**, 457—460, 1930.
53. H. Favre, Schweizerische Bauzeitung, **90**, 1927.
54. H. Favre, Rev. d'Optique, **8**, 193—213, 241—261, 289—307, 1929.
55. H. Favre, C. R., Paris, **190**, 1182—1184, 1930.
56. H. Favre, Rev. d'Optique, **11**, 1—21, 1932.
57. B. Ferretti, Nuovo Cimento, **15**, 77—87, 1938.
58. L. N. Filon, Engineering (London), **116**, 511—512, 1923.
59. L. N. Filon, Phil. Mag., **22**, 187—206, 1936.
60. L. N. Filon and H. T. Jessop, Trans. Roy. Soc., London, **A223**, 89—125, 1923.
61. L. Föppl, Sitz. d. math. Naturwiss., Abt. Bayerischen Akad., München, 247—265, 1928.
62. L. Föppl, V. D. I. Z., **81**, 137—141, 1937.
63. P. Frenkel, Travaux architecture-constructions, **19**, 33—38, 149—155, 182—187, 1935.
64. M. M. Frocht, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., **53**, 135—153, 1931.
65. M. M. Frocht, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., **54**, 54—59, 1932.
66. M. M. Frocht, J. Frank. Inst., **216**, 73—89, 1933.
67. M. M. Frocht, J. App. Mech., **2**, A67, A68, 1935.
68. M. M. Frocht, Mech. Eng., **58**, 485—489, 1936.
69. M. M. Frocht, J. App. Mech., **5**, 24—28, 1938.
70. M. M. Frocht, Proc. of the 5th Intern. Congress for App. Mech., Cambridge, Massachusetts, 1938.
71. T. H. Frost and K. F. Whitcomb, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., **53**, 1—11, 1931.
72. A. Goetz, Rev. Sci. Inst., **5**, 84, 1934.
73. J. N. Goodier, Phil. Mag., **17**, 554, 1934.
74. S. G. Hall, Univ. of Illinois Engineering Experiment Station Bulletin, № 245, 1932.
75. F. C. Harris, Proc. Roy. Soc., London, **106**, 718—723, 1924.
76. F. C. Harris, and B. R. Seth, Proc. Phys. Soc., London, **48**, 477—487, 1936.
77. M. Hetényi, Proc. of the 5th Intern. Congress for App. Mech., Cambridge, Massachusetts, 1938.
78. M. Hetényi, J. App. Mech., **5**, A149—A155, 1938.
79. M. Hetényi, Machine Design, **10**, 40—1, 1938.
80. W. Herzog u. G. Szivessy, Physik. Z., **38**, 129—133, 1937.
81. R. Hiltcher, Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, **9**, 91—103, 1938.
82. W. H. Himes and R. V. Baud, Iron and Steel Engineer, **6**, 372—380, 1929.

83. O. J. Horger, *J. App. Phys.*, **9**, 457—464, 1938.
84. B. K. Hough, *Proc. Am. Soc. Civil Eng.*, **63**, 1340—1357, 1937.
85. A. W. Hull and E. E. Burger, *Rev. Sci. Inst.*, **7**, 98—100, 1936.
86. H. Jehle, *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, **7**, 19—30, 1936.
87. A. Jona, *Aeronautica*, **15**, 180—193, 1935.
88. J. Kuno, *Phil. Mag.*, **12**, 503—511, 1931.
89. J. Kuno, *Phil. Mag.*, **13**, 810—824, 1932.
90. J. Kuno, *Phil. Mag.*, **16**, 353—362, 1933.
91. J. Kuno, *Phil. Mag.*, **19**, 457—466, 1935.
92. J. Kuno, *Phil. Mag.*, **23**, 63—64, 1937.
93. A. Kuske, *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, **9**, 139—149, 1938.
94. A. Kuske, *V. D. I. Z.*, **82**, 1455—1458, 1938.
95. M. v. Laue, *Sitz. der Preussischen Akad. der Wiss., Berlin*, **21**, 377—382, 1931.
96. G. H. Lee and C. W. Armstrong, *J. App. Mech.*, **5**, 11—12, 1938.
97. H. Liebm ann, *Sitz. der math.-phys. Klasse der Bayerischen Akad., München*, p. 385, 1918.
98. G. Mabboux, *Rev. d'Optique*, **11**, 501—507, 1932.
99. C. W. Mc Gregor, *Physics*, **5**, 140—145, 1934.
100. L. Malavard, C. R., Paris, **206**, 38—39, 1938.
101. H. B. Maris, *J. Opt. Soc. Am.*, **15**, 194—200, 1927.
102. H. E. Martin, *Trans. Liverpool Eng. Soc.*, **36**, 59—98, 1915.
103. T. V. Matthew, *J. Roy. Tech. College Glasgow*, **4**, 121—134, 1937.
104. J. C. Maxwell, *Trans. Roy. Soc., Edinburgh*, **20**, 87, 1850.
105. G. Mesmer, *Z. Tech. Mech. Thermodynamik, V. D. I.*, **1**, 1930.
106. A. Mesnager, *Ann. des Ponts et Chaussées*, **4**, 128—190, 1901.
107. A. Mesnager, *Ann. des Ponts et Chaussées*, **16**, 133—186, 1913.
108. A. Mesnager, C. R., Paris, **190**, 1249, 1930.
109. H. Meyer, *Ingenieur-Archiv*, **7**, 273—293, 1936.
110. H. Meyer and F. Tank, *Helv. Phys. Acta*, **8**, 315—317, 1935.
111. R. D. Mindlin, *Rev. Sci. Inst.*, **5**, 224—228, 1934.
112. R. D. Mindlin, *J. Opt. Soc. Am.*, **27**, 288—291, 1937.
113. R. D. Mindlin, *J. App. Mech.*, **4**, A 170—172, 1937.
114. R. D. Mindlin, Eighth Semi-Annual Meeting, Eastern Photoelasticity Conference, N. Y., 1938.
115. H. Mueller, *Physics*, **6**, 179—184, 1935.
116. H. Mueller, *Phys. Rev.*, **47**, 947—957, 1935.
117. H. Mueller, *Phys. Rev.*, **52**, 223—229, 1937.
118. H. Mueller, *Z. Krist.*, **99**, 122—141, 1938.
119. W. M. Murray, Eighth Semi-Annual Meeting, Eastern Photoelasticity Conference, N. Y., 1938.
120. H. Mussmann, *Ann. Physik*, **31**, 121—144, 1938.
121. J. G. Mc Givern and H. L. Supper, *J. Frank. Inst.*, **217**, 491, 1934.
122. J. G. Mc Givern and H. L. Supper, *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, **56**, 601—604, 1934.
123. J. G. Mc Nally and S. E. Sheppard, *J. Phys. Chem.*, **35**, 2498—2507, 1931.
124. Masataka Nisida, *Sci. Pap. Inst. Phys. Chem. Research*, **22**, 269—283, 1933.
125. H. Neuber, *Proc. Roy. Soc., London*, **141**, 314—324, 1933.
126. H. Neuber, *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, **56**, 733—737, 1934.
127. G. Oberti, *Energia Elettrica*, **13**, 578—584, 1936.
128. G. Oppel, *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, **7**, 240—248, 1936.
129. G. Oppel, *Nat. Advisory Com. for Aeronautics-Technical Mem.*, № 824, 1937.
130. G. Oppel, *V. D. I. Z.*, **81**, 803—804, 1937.
131. R. E. Peterson and A. M. Wahl, *J. App. Mech., Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, **57**, A 1—A 11, 1935.

132. R. E. Peterson and A. M. Wahl, *J. App. Mech.*, **3**, A15—A22, 1936.
133. H. Poritsky, *Physics*, **5**, 406—411, 1934.
134. G. M. Pugno, *Atti della Accad. della Science di Torino*, **71**, 55—71, 1935.
135. G. M. Pugno, *Atti della Acad. della Science di Torino*, **71**, 110—115, 1935.
136. Ravilly, *Publications scientifiques du Ministère de l'air*, Paris, № 120, 1938.
137. J. J. Ryan and L. J. Fischer, *J. Frank. Inst.*, **225**, 513—526, 1938.
138. Ch. Sadron, C. R., Paris, **197**, 1293—1296, 1933.
139. Ch. Sadron and E. D. Alcock, *Guggenheim Aeronautical Laboratory, California Institute of Technology, Publ. № 44*, 1934.
140. M. Salvadori, *Annali dei Lavori Pubblici*, **7**, 865—879, 1050—1091, 1934.
141. M. Salvadori, *Ricerchi d'Igegneria*, **3**, 113—118, 1935.
142. G. H. Shortley and R. Weiler, *J. App. Phys.*, **9**, 334—348, 1938.
143. J. E. Soehrens, R. T. Cass and J. E. Sower, *Civil Eng.*, **6**, 594—595, 1936.
144. A. G. Solakian, *J. Am. Welding Soc.*, **13**, 22—29, 1934.
145. A. G. Solakian, *Mech. Eng.*, **57**, 767—771, 1935.
146. A. G. Solakian, *Photoelastic J.*, **1**, 14—17, 1938.
147. A. G. Solakian and G. B. Karelitz, *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, **54**, 97—123, 1931.
148. H. Souillot, *Tech. des Travaux*, **19**, 157—159, 1935.
149. M. Suquet, *Ann. des Ponts et Chaussées*, **104**, 34—39, 1934.
150. F. Tank, *Schweizerische Bauzeitung*, **104**, 45—48, 1935.
151. F. Tank, *Helv. Phys. Acta*, **9**, 611—616, 1936.
152. F. Tank, R. V. Baud and E. Schiltknecht, *Schweizerische Bauzeitung*, **109**, 249—252, 1937.
153. F. Tank, R. V. Baud and E. Schiltknecht, *Génie civil*, **111**, 482—483, 1937.
154. P. Tarbés, C. R., Paris, **195**, 222—224, 1932.
155. M. H. L. Tardy, *Rev. d'Optique*, **8**, 59—69, 1929.
156. F. Temmermann et L. Blanche, *Ossature métallique*, **7**, 132—137, 1938.
157. V. Tesar, *Rev. d'Optique*, **11**, 97—104, 1932.
158. V. Tesar, *Ass. Int. des Ponts et Charpentes*, **1**, 497—505, 1932.
159. V. Tesar, *Int. Verein. der Brücken- und Hochbau*, **4**, 543—570, 1936.
160. V. Tesar, *Ann. des Ponts et Chaussées*, **107**, 627—662, 1937.
161. W. E. Thibodeau and A. T. McPherson, *Nat. Bur. Stand. J. Research*, **13**, 887—896, 1934.
162. W. E. Thibodeau and L. A. Wood, *Nat. Bur. Stand. J. Research*, **20**, 393—409, 1938.
163. J. Thouvenin, C. R., Paris, **201**, 769—771, 1935.
164. E. K. Timby and I. G. Hedrick, *Eng. News-Record*, **121**, 179—181, 1938.
165. Z. Tuzi, *Inst. Phys.-Chem. Research Japan*, **7**, 79—96, 1927.
166. Z. Tuzi, *Sci. Pap. Inst. Phys.-Chem. Research Japan*, **7**, 97—103, 1927.
167. Z. Tuzi, *Sci. Pap. Inst. Phys.-Chem. Research Japan*, **12**, 21—69, 1929.
168. Z. Tuzi, *Sci. Pap. Inst. Phys.-Chem. Research Japan*, **16**, 140—146, 1931.
169. Z. Tuzi, *Sci. Pap. Inst. Phys.-Chem. Research Japan*, **8**, 247—267, 1928.
170. Z. Tuzi and M. Nisida, *Sci. Pap. Inst. Phys.-Chem. Research Japan*, **26**, 277—309, 1935.
171. Z. Tuzi and M. Nisida, *Phil. Mag.*, **21**, 448—473, 1936.
172. Z. Tuzi and M. Nisida, *Sci. Pap. Inst. Phys.-Chem. Research Japan*, **31**, 99—107, 1937.
173. R. von Mises, *Z. angew. Math.-Mech.*, **18**, 74—76, 1938.

174. R. von Mises, Über den singulären Punkt zweiter Ordnung im ebenen Spannungsfeld, S. Timoshenko, 60 th Anniversary Volume (Macmillan Company, New York), p. 147—154.
 175. R. W. Vose, J. App. Mech., **2**, A99—A102, 1935.
 176. A. M. Wahl and R. Beeuwkes, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., **56**, 617—625, 1934.
 177. E. E. Weibel, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., **56**, 637—658, 1934.
 178. E. E. Weibel, Ass. Int. des Ponts et Charpentes, Mémoires, **3**, 421—438, 1935.
 179. E. E. Weibel, Proc. 5th Int. Cong. for App. Mech., Cambridge, Massachusetts, 1938.
 180. G. Wertheim, Ann. de Chimie et de Phys., **60**, 156, 1854.
 181. H. E. Wessman, Civil Engineering, **8**, 614, 1938.
-