

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

Физ101



ОБЩИЕ ОСНОВЫ КОЛОРИМЕТРИИ

М. М. Гуревич, Ленинград

В настоящее время существует много книг и статей, посвященных изложению основ колориметрии. Методы изложения, принятые в большинстве из них, не кажутся автору вполне удовлетворительными. Настоящая статья представляет собой попытку более систематического изложения вопроса, предназначенную в основном для физика и в особенности для фотометриста. В статье рассматривается модель цветоувствительного аппарата глаза, состоящая в соответствии с представлениями Юнга — Гельмгольца из двух или трех приемников с различными кривыми спектральной чувствительности. Разбираются цветоувствительные свойства модели. Исследуется возможность изучения такого аппарата, не связанная с измерением реакций приемников. На основе этого рассмотрения устанавливаются все законы колориметрии. Показываются рациональность и происхождение международной колориметрической системы М. О. К. 1931 г. (системы X, Y, Z).

I. ВВЕДЕНИЕ

1. Способность различать формы окружающих предметов — зрение — является одной из основных функций каждого организма, достигшего известной ступени своего развития. Различные представители животного мира по-разному разрешают эту задачу, достигая в ее решении той или иной степени совершенства. Можно указать довольно много величин, характеризующих степень совершенства зрительного аппарата. Одной из самых существенных величин этого рода является острота зрения или разрешающая сила глаза, обратно пропорциональная тому минимальному углу, под которым глаз может различить два объекта, например две точки. Разрешающая сила глаза связана с дроблением зрительного аппарата на большее или меньшее число отдельных воспринимающих элементов. Мы знаем, что в этом отношении глаз человека, а также глаза многих животных и насекомых достигли высокой степени совершенства. Однако предмет не должен обязательно иметь исчезающе малые размеры для того, чтобы быть невидимым. Защитная окраска под цвет окружающей обстановки дает возможность маскировать его присутствие. Этой возможностью широко пользуются природа и человек.

Таким образом одного дробления глаза на ряд отдельных цветоувствительных элементов недостаточно для полной и уверенной ориентировки в пространстве. Совершенно необходима какая-то чувствительность к различению контрастов, и чем эта чувствитель-

ность будет сильнее развита, тем совершеннее будет глаз. Поэтому минимальный контраст, который может быть замечен глазом, является другим, также весьма существенным признаком его совершенства. Однако понятие контраста оказывается значительно более сложным, чем понятие разрешающей силы.

Явление контраста можно разделить на два вида: контраст количественный и контраст качественный. Под количественным контрастом понимается такой контраст, при котором спектральный состав света, излучаемого предметом, совпадает со спектральным составом света, излучаемого фоном, а различие заключается только в величинах их яркостей. При качественном контрасте спектральный состав (качество) света, излучаемого предметом, отличается от спектрального состава (качества) света, излучаемого фоном. В первом случае составы излучений, которые освещают изображения предмета и фона, получаемые в глазу, будут одинаковы, а во втором различны.

Совершенно очевидно, что без способности различать количественный контраст не может работать ни один глаз. Известно, что в этом отношении глаз человека и других высокоразвитых животных также достиг высокой степени развития.

Но в громадном большинстве практических случаев спектральные составы излучений, посылаемых объектом и фоном, бывают различны. Возникает вопрос о том, как будет реагировать глаз на различие в спектральном составе попадающих в него излучений. Можно представить себе два принципиально различных ответа на этот вопрос. Во-первых, глаз может не воспринимать различия в спектральном составе излучений, испускаемых предметом и окружающим его фоном (цветнослепой глаз). Это не значит, конечно, что глаз такого предмета вовсе не увидит. Вообще говоря, предмет будет виден, но в этом случае глаз не сможет отличить контраста качественного от контраста количественного. Зрение такого глаза будет соответствовать простой фотографии, способной дать только большее или меньшее потемнение фотослоя при любом спектральном составе света. И подобно тому, как обычная фотография часто не замечает границ между белыми и синими поверхностями, так и цветнослепой глаз в ряде случаев не будет замечать контуров весьма больших по размеру предметов. Во-вторых, глаз может замечать различия в спектральном составе попадающих в него излучений и давать качественные оценки их, например, зеленый, желтый и т. д. (цветочувствительный глаз). Как правило, такой глаз будет всегда видеть предмет на окружающем его фоне, если спектральные составы идущих от них излучений будут различны.

2. Полностью цветнослепые глаза встречаются у человека чрезвычайно редко. Тем не менее мы вкратце остановимся на свойствах такого глаза, потому что это рассмотрение послужит нам отправным пунктом для разбора в дальнейшем свойств цветочувствительного глаза.

Мы можем представить себе, что цветнослепой глаз обладает нормальной кривой спектральной чувствительности (видности), на-

чинающейся около 400 *мμ*, достигающей максимума около 555 *мμ* и исчезающей около 750 *мμ*. Эта кривая, определяющая различия в световой оценке глазом одинаковых лучистых мощностей в различных частях спектра, ни в какой мере не определяет цветовых свойств глаза. В частности такой глаз может быть полностью цветнослепым. Модель такого глаза мы можем себе представить следующим образом. Пусть каждый светочувствительный элемент глаза представляет собой систему, подобную фотоэлементу со спектральной чувствительностью, которая совпадала бы с чувствительностью глаза. Большая или меньшая освещенность таких элементов будет давать соответственное возрастание или уменьшение фототоков и позволит глазу различать количественный контраст. Так как излучение любого спектрального состава будет вызывать в фотоэлементе ток одного направления большей или меньшей силы, то система, реагирующая только на величину фототока, не сможет отличить, когда фототок изменяется от количественного и когда от качественного изменения излучения. Реагируя только на величину фототока, глаз, соответствующий рассмотренной схеме, будет способен только количественно различать излучения и будет потому полностью цветнослепым.

Всю совокупность реакций такого глаза на все мыслимые излучения можно изобразить графически в виде одной линии, прямой или кривой безразлично.

Одну точку этой линии примем условно за нуль, а другую, также произвольно выбранную точку, примем за изображение какого-то единичного раздражения. Раздражение, в *n* раз более сильное или более слабое, чем единичное, изобразится точкой, в *n* раз более далекой или близкой к нулевой точке.

Таким образом многообразие раздражений, а вместе с тем и реакций цветнослепого глаза будет многообразием одного измерения.

3. Нормальный человеческий глаз различает в окружающей его обстановке множество цветов и оттенков, и этот факт ставит перед техникой и наукой вопрос о количественном выражении для цвета, которое позволило бы с достаточной точностью фиксировать цвет и воспроизводить его. Очевидно, что такая задача — основная задача колориметрии — может быть решена только на основе количественного изучения законов цветового восприятия глаза.

Прежде чем перейти к изложению основных фактов и соотношений из области цвета, следует сделать несколько общих замечаний о том, к чему мы будем относить понятие «цвет», а также согласиться относительно употребления некоторых терминов.

Принято говорить о цвете источников света, диффузно рассеивающих поверхностей (растительные и животные покровы, бумага, краски и лаки и т. п.) или о цвете прозрачных предметов (кристаллы, стекла и т. д.). Если первое обыкновенно хорошо согласуется с физической точкой зрения, то второе и третье не выдерживают критического разбора. Действительно, излучение, посылаемое источником, имеет некоторый определенный и свойственный ему спек-

ральный состав, которому соответствует определенный цвет. Что же касается светорассеивающих поверхностей или прозрачных тел, то никакого своего излучения они не испускают, отражая или пропуская световой поток, падающий на них со стороны. Если этот световой поток приближается по своему составу к дневному свету, то мы увидим предметы в их обычной окраске. Если же падающий световой поток оказывается монохроматическим (например, зеленым с длиной волны 546 $m\mu$) или приближается к нему по своему составу, то каковы бы ни были свойства поверхности (или прозрачного слоя), на которую он падает, цвет ее будет всегда совпадать с цветом излучения, т. е. в нашем случае будет всегда зеленым большей или меньшей яркости.

Таким образом мы естественно приходим к выводу, что единственным объектом, которому во всех случаях можно приписать цвет, является излучение или световой поток. Исходит ли он непосредственно от источника, прошел ли он по пути через светофильтр или отразился от поверхности, всегда он имеет некоторый спектральный состав, которому соответствует и определенный цвет. Договорившись относительно цвета светового потока, нетрудно распространить понятие цвета и на все остальные фотометрические величины. При этом сразу окажется, что цвет светимости будет отличаться от цвета освещенности практически во всех случаях, кроме случая идеально нейтрального отражения, при котором коэффициент отражения не зависит от длины волны.

Условившись говорить о цвете любой фотометрической величины, мы получаем возможность, кроме абсолютной меры, т. е. кроме числа люменов, фотов, стильбов и т. д., характеризовать каждую фотометрическую величину еще параметрами, определяющими ее цветность и зависящими от спектрального состава излучения. Часто, однако, бывает удобно отвлечься от определенной фотометрической величины и говорить о цвете вообще. В таких случаях мы будем различать в цвете две стороны: количественную и качественную. Количество (абсолютную величину) цвета мы будем в таких случаях называть «светлотой» цвета. Таким образом понятие «светлота» будет понятием, общим по отношению к количеству люменов, фотов, стильбов и т. д. соответственной фотометрической величины. Качественную сторону цвета, определяемую спектральным составом излучения и не связанную с его количеством (светлотой), мы будем называть «цветностью». Таким образом понятие «цветность» будет также общим по отношению ко всем фотометрическим величинам, но будет выражать только качественную сторону цвета.

II. ДВУХМЕРНОЕ ЦВЕТОВОСПРИЯТИЕ

4. Одной из наиболее вероятных гипотез о сущности цветового восприятия является, как известно, гипотеза Юнга — Гельмгольца — Максвелла, заключающаяся в том, что в аппарате нормального че-

ловеческого глаза допускается существование трех приемников или трех процессов, возбуждаемых по-разному монохроматическими излучениями. Предполагается, что, например, красный свет возбуждает по преимуществу один приемник, зеленый — другой, а синий — третий. Различное соотношение возбуждений этих трех приемников или процессов определяет психологическое различие восприятий, возбуждаемых различными излучениями, т. е. цвет. Выраженная в немногих словах гипотеза Юнга содержит в себе большие возможности развития. Прежде всего напрашивается обобщение на тот случай, когда число приемников или процессов, определяющих цвет, не равно трем, но любому целому числу, большему единицы.

Имея произвольное число n приемников, возбуждаемых различно, т. е. обладающих разными кривыми спектральной чувствительности, мы должны будем ввести обобщенное понятие о цвете как о сложной реакции совокупности всех n приемников, совокупности, состоящей из n простых реакций каждого из приемников в отдельности.

Таким образом можно утверждать, что n приемников определяют цвет как точку в пространстве n измерений. Все наши дальнейшие рассуждения, которые из практических интересов будут ограничиваться случаями двухмерного и трехмерного цветовых пространств, можно без принципиальных трудностей распространить на случай любого числа измерений.

Другое направление, в котором может быть обобщена теория Юнга, лежит в рассмотрении различных кривых спектральной чувствительности, которыми может обладать выбранное число приемников. Форма этих кривых определяет, как мы увидим, все свойства цветовосприятия системы.

Не вдаваясь ни в какие физиологические предположения о существовании процессов, определяющих форму кривой чувствительности, мы постараемся рассмотреть с чисто математической точки зрения те соотношения, которые должны возникнуть при совокупной работе нескольких (и в первую очередь двух и трех) приемников с различными спектральными свойствами.

Основной вопрос, который нас будет при этом занимать, будет состоять в следующем. Какими возможностями в различении неодинаковых по составу излучений обладает совокупность из нескольких приемников с несовпадающими кривыми чувствительности?

В качестве приемников мы будем рассматривать фотоэлементы с запирающим слоем как наиболее наглядный случай приемника, непосредственно превращающего излучение любого состава в электрический ток одного направления.

Для начала рассмотрим простейшую систему, состоящую из двух фотоэлементов.

5. Пусть кривые V_1 и V_2 (рис. 1) представляют собой спектральные характеристики двух фотоэлементов 1 и 2, каждый из которых соединен с гальванометром, как показано на рис. 2. Мы будем в дальнейшем предполагать, что оба наши фотоэлемента на-

ходятся в совершенно одинаковых условиях освещения, т. е. что падающие на них излучения в точности одинаковы. Рассмотрим, каким образом изменение излучения, падающего на фотоэлементы, связано с изменением показаний гальванометров, т. е. с реакцией нашей системы.

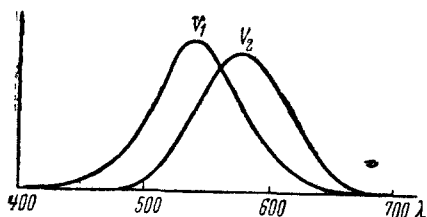


Рис. 1

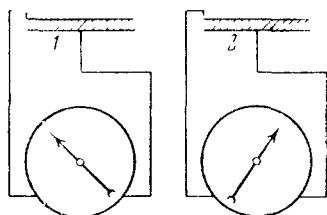


Рис. 2

Если изменение падающего излучения будет только количественным, т. е. если изменяться будет только освещенность фотоэлементов, а состав излучения будет оставаться постоянным, то показания обоих гальванометров будут изменяться пропорционально изменению освещенности, и отношение показаний останется также постоянным. Но если при изменении падающего на фотоэлементы излучения показания гальванометров изменились в различное число раз или, например, один гальванометр увеличил отклонение, а другой уменьшил, то мы можем с уверенностью утверждать, что состав падающего излучения изменился. Таким образом наша система сможет регистрировать не только количественные, но и качественные изменения падающего на нее излучения, т. е. окажется системой цветочувствительной. Рассмотрим подробнее «цветочувствительность» нашей системы.

Прежде всего, когда мы говорим о цветочувствительности системы фотоэлементов, то мы вводим какое-то новое понятие цвета, лишенное по сравнению с обычным понятием его психофизиологической части и содержащее только часть физико-математическую. В этом новом понимании цветом будет называться совокупность реакций (фототоков) системы приемников (фотоэлементов). Поэтому неизменным реакциям системы будет соответствовать постоянный цвет и обратно, изменение реакций связано с изменением цвета.

В дальнейшем мы будем непрерывно пользоваться понятием цвета в этом математическом смысле.

Величины α и β фототоков, возбуждаемых излучением в первом и втором фотоэлементах, могут быть представлены так:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \int E(\lambda) V_1(\lambda) d\lambda, \\ \beta &= \int E(\lambda) V_2(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $E(\lambda) d\lambda$ представляет монохроматическую освещенность фотоэлементов в спектральном интервале $\lambda, \lambda + d\lambda$, а $V_1(\lambda)$ и $V_2(\lambda)$ — спектральные характеристики фотоэлементов. Выражения (1) содержат в себе некоторые предположения о свойствах применяемых нами фотоэлементов, которые мы всегда будем считать выполненными. Эти предположения состоят в том, что, во-первых, фототоки, возбуждаемые действием на них различных частей спектра, суммируются (аддитивность), во-вторых, что фототоки пропорциональны падающей на них лучистой мощности.

Как мы уже отмечали, изменения в соотношении между фототоками α и β свидетельствуют об изменении спектрального состава $E(\lambda)$ -излучения, освещающего фотоэлементы. Однако не каждое изменение спектрального состава повлечет за собой изменение в величинах токов α и β .

Действительно, совокупность пар значений величин токов α и β является многообразием второго порядка, т. е. укладывается на плоскости. А совокупность различных видов функций $E(\lambda)$ является многообразием бесконечно высокого порядка. В самом деле, каждый конечный спектральный интервал, в котором задается функция $E(\lambda)$, может быть разбит на произвольно большое число более узких спектральных интервалов. Интенсивность излучения в каждом таком узком интервале может иметь произвольное положительное значение. Для характеристики всего излучения каждая такая интенсивность имеет значение независимой переменной, число которых может быть сделано как угодно большим. Поэтому общее число различных возможных функций $E(\lambda)$ будет бесконечностью какого угодно высокого порядка. Из этого следует, что одну и ту же пару значений токов α и β мы можем получить по формулам (1) при каком угодно большом числе функций $E(\lambda)$, т. е. при бесконечно большом числе составов излучения¹⁾. Все эти составы будут «восприниматься» нашей системой как совершенно одинаковые, полностью совпадающие и потому неотличимые друг от друга. Таким образом физически различные излучения могут быть объединены в группы по признаку тождественности их воздействия на нашу систему, которая оказывается лишенной возможности делать какие-либо различия между ними.

Условимся называть эти группы группами «одноцветных» излучений. Принимая во внимание аддитивность действия наших приемников, мы должны заключить, что при любых сочетаниях излучений, падающих на фотоэлементы, каждое излучение может быть заменено другим с ним одноцветным без всякого влияния на реакции системы.

¹⁾ Широко известна такая задача: существуют ли на земном шаре люди с совершенно одинаковым числом волос на голове. Положительный ответ на поставленный вопрос делается очевидным, если сообразить, что число людей на земном шаре значительно превышает число волос на голове у каждого. Совершенно так же стоит вопрос о существовании составов излучения, воспринимаемых как совершенно одинаковые совокупностью из нескольких фотоэлементов.

Принадлежность физически различных излучений к излучениям «одноцветным» определяется, очевидно, видом функций $V_1(\lambda)$ и $V_2(\lambda)$. При изменении этих последних группы одноцветных излучений перестраиваются. Те излучения, которые прежде были одноцветными, могут перестать быть ими, а излучения, производившие прежде различные воздействия на систему фотоэлементов, могут оказаться одноцветными.

6. Рассмотрим одну из возможных систем графического изображения «цветовосприятия» системы из двух фотоэлементов. Будем откладывать по оси абсцисс величины α токов, возбуждаемых излучением в одном фотоэлементе, а по оси ординат — величины β токов другого фотоэлемента. Каждому излучению, действующему на фотоэлементы, будет соответствовать пара значений величин α и β , которая определит на плоскости какую-то точку C_1 (рис. 3). Все одноцветные излучения вызовут в фотоэлементах те же токи и будут поэтому изображаться той же самой точкой C_1 , которая будет таким образом представлять некоторый «цвет». Каждое излучение, производящее иное действие на наши фотоэлементы, будет характеризоваться другой точкой на плоскости, т. е. будет соответствовать другому «цвету». Если изменение излучения, падающего на фотоэлементы, будет заключаться в изменении освещенности при неизменном спектральном составе, то фототоки α и β будут пропорционально изменяться в одно и то же число раз, и соответствующая точка на плоскости будет перемещаться по прямой линии, проходящей через начало координат, т. е. по радиусу-вектору. Объективному изменению освещенности фотоэлементов в K раз будет соответствовать изменение каждого из фототоков α и β тоже в K раз, т. е. изменение расстояния от точки C до начала координат в K раз.

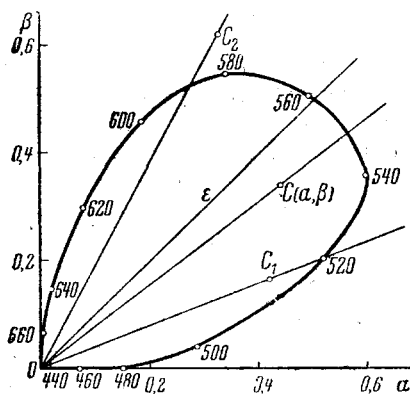


Рис. 3

Для примера нанесем на график α , β (рис. 3) точки, соответствующие монохроматическим излучениям различных длин волн. Будем считать, что монохроматические излучения создают на поверхности фотоэлементов одну и ту же и притом равную единице энергетическую освещенность. Соответствующие фототоки отложены на рис. 1 в виде кривых V_1 и V_2 , которые и помогут нам решить поставленную задачу.

Если мы нанесем точки α , β на рис. 3, то мы получим ряд точек, характеризующих цвета единичных энергетических освещенностей в разных длинах волн. Соединив эти точки плавной кривой,

будет соответствовать пара значений величин α и β , которая определит на плоскости какую-то точку C_1 (рис. 3). Все одноцветные излучения вызовут в фотоэлементах те же токи и будут поэтому изображаться той же самой точкой C_1 , которая будет таким образом представлять некоторый «цвет». Каждое излучение, производящее иное действие на наши фотоэлементы, будет характеризоваться другой точкой на плоскости, т. е. будет соответствовать другому «цвету». Если изменение излучения, падающего

мы получим графическую характеристику цветочувствительности нашей системы. Против каждой точки пометим длину волны соответствующего излучения. Рассматривая эту кривую, мы видим, что она пересекает каждый радиус-вектор, в том числе и тот, который проходит через точку C_1 . Определив длину волны λ , при которой происходит пересечение линии OC_1 с характеристической кривой (в нашем случае $\lambda \approx 520 m\mu$), мы утверждаем, что можно подобрать такую освещенность фотоэлементов излучением длины волны λ , что это излучение будет одноцветным с излучением, имеющим цвет C_1 . Иначе говоря, мы приходим к выводу, что для двухмерной системы цветосприятия в каждой группе одноцветных излучений имеется по крайней мере одно монохроматическое излучение. Длина волны этого монохроматического излучения в этом случае определяет цветность, т. е. качественную сторону цвета.

В качестве другого примера нанесем на наш цветовой график (рис. 3) цветность ϵ , соответствующую равноэнергетическому спектру, т. е. излучению, характеризуемому составом $E(\lambda) = \text{const}$.

Тогда выражения (1) покажут нам, что

$$\alpha_\epsilon = \text{const} \int V_1(\lambda) d\lambda \quad \text{и} \quad \beta_\epsilon = \text{const} \int V_2(\lambda) d\lambda.$$

Элементарный подсчет, проведенный для кривых V_1 и V_2 (рис. 1), даст величину отношения $\frac{\beta_\epsilon}{\alpha_\epsilon}$, которая и определит направление соответствующей прямой линии. Нанося ее на график, мы видим, что в нашем случае цветность равноэнергетического излучения совпадает с цветностью монохроматического излучения с длиной волны около $558 m\mu$.

7. Рассмотрим законы сложения цветов или законы смещения излучений, т. е. определим воздействие на нашу систему суммы двух излучений в зависимости от воздействия каждого из них в отдельности. Пусть одно излучение с составом $E_1(\lambda)$ характеризуется величинами фототоков α_1 и β_1 (точка C_1 на рис. 4), а другое — $E_2(\lambda)$ — величинами α_2 и β_2 (точка C_2). Оба излучения — $E_1(\lambda)$ и $E_2(\lambda)$, — действуя одновременно, составляют третье излучение

$$E(\lambda) = E_1(\lambda) + E_2(\lambda),$$

которое будет характеризоваться величинами фототоков α и β . Как легко видеть из (1),

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta &= \beta_1 + \beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Точка C , изображающая цвет смеси двух излучений, будет находиться по правилу параллелограмма, построенного

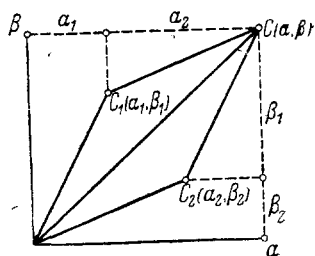


Рис. 4

на отрезках OC_1 и OC_2 . Геометрическое суммирование отрезков OC_1 и OC_2 , к которому мы прибегаем для нахождения цвета смеси двух цветов, изображаемых точками C_1 и C_2 , приводит нас к выводу о целесообразности векторного представления цвета. Вместо того чтобы изображать цвета точками, мы можем представлять цвета векторами, имеющими общее начало в начале координат O и конец в точке, служившей изображением цвета. В векторном изображении можно написать

$$C = C_1 + C_2. \quad (3)$$

Следует отметить, что возможность векторного изображения цветов обусловлена аддитивными свойствами приемников. Если бы приемники не обладали аддитивностью, то векторное сложение цветов было бы невозможно.

Если мы будем смешивать цвета C_1 и C_2 не в исходных количествах, а в произвольных иных, например $x C_1$ и $y C_2$, то при изменении x и y точка C будет перемещаться в соответствии с изменением суммы

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \alpha &= x\alpha_1 + y\alpha_2 \\ \beta &= x\beta_1 + y\beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В векторном представлении цвета мы могли бы написать для такого случая, что

$$C = x C_1 + y C_2, \quad (5)$$

где C_1 , C_2 и C изображали бы соответствующие цветам векторы. При этом величины x и y приобретают характер координат произвольного цвета.

Для того чтобы величины x и y могли быть координатами любого цвета, нам следует ввести в рассмотрение и их отрицательные значения.

Тогда выражение (5) будет соответствовать уже не только сложению, но и вычитанию цветов, т. е. действию, физически не выполнимому. Однако перенеся отрицательный член (он может быть только один) в левую часть равенства, мы снова вернемся к выполнимому действию сложения цветов.

На рис. 5 представлен случай, при котором цвет C не может быть получен из C_1 и C_2 ни при каких положительных значениях x и y , но может быть получен как сумма $C = x C_1 + (-y C_2)$. Иначе говоря, смесь из заданного цвета C и количества y цвета C_2 произведет на систему фотоэлементов такое же действие, как и количество x цвета C_1 .

$$C + y C_2 = x C_1.$$

Вообще говоря, всякое цветовое уравнение типа (5) указывает, что цвета или смеси цветов, стоящие в разных частях такого урав-

нения, являются одноцветными и могут полностью заменять друг друга в отношении действия на цветовоспринимающую систему.

Возвращаясь к системе уравнений (4), мы можем утверждать, что при любых значениях α , β , α_1 , β_1 и α_2 , β_2 (т. е. при любых цветах C , C_1 и C_2) эта система имеет одно определенное решение относительно x и y , если только

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (6)$$

или, иначе говоря, если

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} \neq \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Последнее условие сводится к тому, чтобы точки C_1 и C_2 не лежали бы на одном радиусе-векторе, т. е. чтобы векторы OC_1 и OC_2 не совпадали бы по направлению, или, что то же, чтобы цвета C_1 и C_2 не были бы качественно одинаковы. Окончательно мы приходим к такому утверждению: путем смешения двух произвольных, но качественно различных цветов C_1 и C_2 , взятых в надлежащих количествах, мы можем получить и притом единственным образом смесь, одноцветную с любым третьим цветом C . Количество одного из цветов может быть отрицательным.

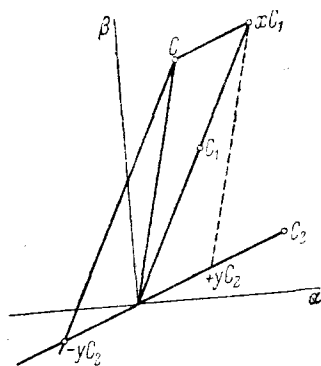


Рис. 5

III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ЦВЕТОВОСЧИЩАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

8. Рассматривая свойства системы двух фотоэлементов, обладающих различными спектральными чувствительностями, мы видели что:

а) Система обладает способностью отличать излучения различного спектрального состава и потому может считаться системой цветочувствительной. Система отличает качественные и количественные свойства цвета, которые мы называли «цветностью» и «светлотой».

б) Существуют группы одноцветных излучений, которые имеют различный спектральный состав, но производят совершенно одинаковые действия на нашу систему.

в) Смешивая в различных пропорциях два разных по качеству цвета, мы можем получить смесь, одноцветную с любым третьим цветом.

Все эти свойства системы двух фотоэлементов либо совпадают, либо вполне аналогичны общеизвестным цветовым свойствам глаза. Этот вполне естественный с точки зрения теории Юнга—Гельмгольца результат заставляет нас внимательнее относиться к сопоставлению

свойств глаза со свойствами системы фотоэлементов. При этом, однако, мы замечаем существенное методологическое различие, состоящее в том, что система фотоэлементов позволяет нам измерять токи, возбуждаемые в них светом, а глаз ничего эквивалентного такому измерению не дает. Гальванометры позволяют измерить кривую спектральной чувствительности каждого из фотоэлементов, составляющих систему, а глаз является нерасчленным инструментом, и самое существование трех приемников, определяющих его цветовые свойства, является только гипотезой. Естественно возникает вопрос, возможно ли при этом с достаточным основанием сопоставить цветочувствительность глаза с цветоразличительными свойствами системы фотоэлементов? Дальнейшее изложение должно служить обоснованием положительного ответа на этот вопрос.

В связи с этим нам придется в дальнейшем отказаться от измерения величин фототоков α и β и научиться характеризовать цвета при помощи таких приемов, которые мы применяем при визуальных наблюдениях. Единственный метод оценки, позволяющий глазу иметь достаточно точное суждение об излучении, заключается в производимой им оценке равенства или неравенства двух смежных фотометрических полей. При благоприятных условиях такие оценки могут быть произведены с точностью до долей процента. В связи с этим мы перестроим систему наших фотоэлементов так, чтобы она давала нам такую же возможность, и постараемся использовать эту возможность для количественной и качественной оценки цвета.

9. Представим себе, что вместо одной пары фотоэлементов, с которой мы до сих пор имели дело, мы имеем две совершенно такие же пары. Все свойства этих двух пар фотоэлементов и в первую очередь их спектральные чувствительности должны быть в точности одинаковыми. Но вместо четырех простых гальванометров замкнем наши четыре фотоэлемента на два дифференциальных гальванометра, как показано на рис. 6. При этом одинаковые фотоэлементы будут воздействовать на один гальванометр, и возникающие под влиянием света токи будут стремиться отклонять

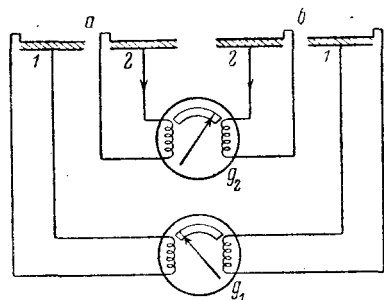


Рис. 6. Дифференциальное соединение двух цветочувствительных систем a и b , состоящих из двух фотоэлементов

стрелку в противоположные стороны. На шкалах обоих гальванометров пусть будет нанесено только по одному штриху, указывающему положение стрелки при отсутствии токов в приборе, или в том случае, когда обратные действия двух равных токов взаимно уничтожаются.

Такая система соединения фотоэлементов, которую можно назвать дифференциальной системой, позволит нам установить равенство или неравенство действия двух излучений, из

которых первое освещает одну, а второе — другую пару фотоэлементов. Равные действия обоих излучений мы будем иметь тогда, когда стрелки обоих дифференциальных гальванометров установятся на нулевые штрихи. Такое положение стрелок будет свидетельствовать о равенстве «цветов». Если же одна или обе стрелки дают показания, отличающиеся от нуля, то это значит, что «цвета» не одинаковы. В этом случае мы будем действовать совершенно аналогично тому, как мы бы действовали при помощи глаза, заставляя два сравниваемые излучения проходить через смежные части фотометрического поля.

При помощи дифференциальной системы мы сможем судить и о том, будет ли различие в цветах только количественным или также и качественным. Если гальванометры отклонились от нулевого положения в разные стороны, то очевидно, что различие в цветах качественное. За отклонение «в одну сторону» мы будем принимать такие отклонения, которые наблюдаются, если систему, находящуюся в равновесии, вывести из него затемнением одной пары фотоэлементов при помощи нейтрального фильтра, т. е. без изменения спектрального состава света. Если мы наблюдаем отклонение обоих гальванометров в одну сторону, то решение вопроса о том, одинаковы или различны цветности двух излучений, падающих на две пары фотоэлементов, несколько затрудняется. Однако и здесь для решения достаточно иметь в своем распоряжении нейтральный клин. Закрывая с его помощью одну из пар фотоэлементов, мы сможем привести к нулю показания одного гальванометра. Если при этом другой гальванометр также установится на нуль, то, значит, мы имели дело только с количественной разницей в цветах (цветности одинаковые). Если же другой гальванометр будет отклоняться от нуля, значит, различие качественное (цветности разные). Следует отметить, что в случае глаза малые различия в цветности полей сравнения могут быть обнаружены тоже только при условии равенства яркостей обеих частей поля. Значительная разница в яркостях не дает возможности их заметить.

10. Воспользуемся только что описанной дифференциальной схемой соединения двух одинаковых пар фотоэлементов для более подробного исследования законов смешения цветов. При этом исследовании мы будем пользоваться только возможностью устанавливать равновесие на двух дифференциальных гальванометрах. Метод исследования законов смешения напрашивается сам собой. Мы используем для этого два обстоятельства. Во-первых, установленную нами (см. § 7) возможность путем смешения двух разнокачественных цветов воспроизводить любой третий цвет и, во-вторых, то очевидное обстоятельство, что всякое излучение является смесью большого числа более слабых монохроматических излучений. Будем поэтому поступать следующим образом. Выберем два разных по качеству цвета — назовем их основными цветами C_1 и C_2 — и будем смешивать их в различных пропорциях на поверхности первой пары фотоэлементов. Вторую пару фотоэлементов будем освещать моно-

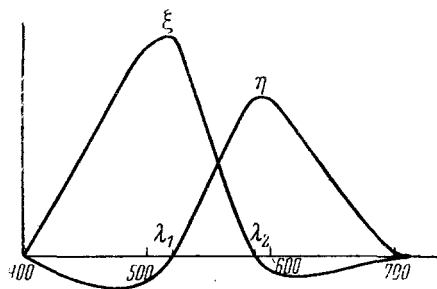


Рис. 7

хроматическими излучениями, создавая энергетически равные единицы освещенности в разных длинах волн. Соответствующие им цвета обозначим (см. § 7) буквой C_λ . Количества цветов C_1 и C_2 , которые необходимо смешать на первой паре для получения равновесия, обозначим через $\xi(\lambda)$ и $\eta(\lambda)$ и напишем уравнение

$$C_\lambda = \xi(\lambda) C_1 + \eta(\lambda) C_2. \quad (7)$$

С изменением длины волны λ величины ξ и η будут меняться. Эти изменения удобно изобразить графически в виде кривых линий (рис. 7), которые часто называют кривыми смешения потому, что они указывают, в каких количествах следует смешать основные цвета, чтобы получить цвета, неотличимые от чистых монохроматических.

Форму кривых смешения нетрудно установить по рис. 3. Для этого достаточно нанести на него основные цвета C_1 и C_2 , провести через них и начало координат две новые оси, по отношению к которым и определять величины ξ и η . Так например, для $\lambda = 510 \text{ м}\mu$, как видно из чертежа, $\xi(510) = 1,1$; $\eta(510) = -0,1$. Законность такого построения подтверждается установленным правилом параллелограмма (§ 7). Найдя функции $\xi(\lambda)$ и $\eta(\lambda)$, мы можем нанести их в виде одной кривой (рис. 8), подобной кривой рис. 3 на прямоугольные оси.

Из выражений (1) видно, что для монохроматического цвета C_λ

$$\left. \begin{aligned} \alpha_\lambda &= V_1(\lambda), \\ \beta_\lambda &= V_2(\lambda), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где α_λ и β_λ — координаты цвета C_λ .

Подстановка (8) в координатное выражение, соответствующее соотношению (7), дает

$$\left. \begin{aligned} V_1(\lambda) &= \xi(\lambda) \alpha_1 + \eta(\lambda) \alpha_2, \\ V_2(\lambda) &= \xi(\lambda) \beta_1 + \eta(\lambda) \beta_2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Последние равенства устанавливают линейную связь между кривыми спектральной чувствительности V_1 и V_2 фотоэлементов и кривыми смешения ξ и η .

Имея значения $\xi(\lambda)$ и $\eta(\lambda)$, мы можем определить количества x и y цветов C_1 и C_2 , в которых они должны быть смешаны, для того чтобы смесь была неотличима от любого

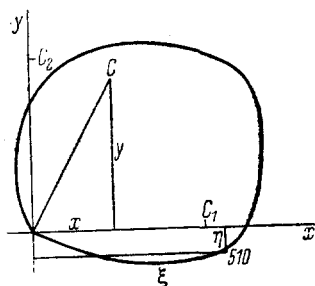


Рис. 8. Характеристическая кривая двухмерного цветовосприятия

цвета C , имеющего известный спектральный состав $\varepsilon(\lambda)$, т. е. мы можем найти коэффициенты x и y в уравнении

$$C = xC_1 + yC_2. \quad (5)$$

Как нетрудно видеть,

$$\begin{aligned} x &= \int E(\lambda) \xi(\lambda) d\lambda, \\ y &= \int E(\lambda) \eta(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (10)$$

где $E(\lambda) d\lambda$ представляет монохроматическую освещенность, создаваемую цветом C в интервале длин волн $\lambda, \lambda + d\lambda$.

Мы видим, что формулы (10) могут заменить нам выражения (1), причем x и y становятся на место α и β , а $\xi(\lambda)$ и $\eta(\lambda)$ играют роль чувствительностей фотоэлементов $V_1(\lambda)$ и $V_2(\lambda)$. Ничто не мешает нам рассматривать величины x и y как координаты цвета C относительно выбранных за основные цвета C_1 и C_2 (см. рис. 8).

11. Однако в то время, как величины α и β , представлявшие собой токи от двух фотоэлементов, были как бы естественными координатами цвета, величины x и y , введенные уравнениями (5) и (10), заключают в себе значительную долю произвола, состоящего в неопределенности выбора основных цветов C_1 и C_2 . В связи с этой неопределенностью, естественно, возникает мысль о том, что случайный выбор может оказаться не наилучшим. Для того чтобы сделать в дальнейшем наиболее рациональный выбор, следует прежде всего разобраться в изменениях, связанных с переходом к другим основным цветам. Поэтому рассмотрим, как изменятся функции смещения $\xi(\lambda)$ и $\eta(\lambda)$, а также координаты цвета x и y , если вместо цветов C_1 и C_2 мы выберем за основные два других, тоже качественно различных цвета C' и C'' .

Согласно § 7 мы можем всегда написать

$$\begin{aligned} C_1 &= a_1 C' + b_1 C'', \\ C_2 &= a_2 C' + b_2 C'', \end{aligned} \quad (11)$$

где a_1, b_1, a_2 и b_2 — количества, в которых должны быть смешаны цвета C' и C'' , чтобы смесь была эквивалентна цветам C_1 и C_2 .

Подставляя (11) в (7), для чего мы согласно тому же § 7 имеем полное основание, мы получим

$$\begin{aligned} C &= \xi(\lambda) C_1 + \eta(\lambda) C_2 = \xi(\lambda) (a_1 C' + b_1 C'') + \\ &+ \eta(\lambda) (a_2 C' + b_2 C'') = [a_1 \xi(\lambda) + a_2 \eta(\lambda)] C' + \\ &+ [b_1 \xi(\lambda) + b_2 \eta(\lambda)] C''. \end{aligned}$$

Обозначив через $\xi'(\lambda)$ и $\eta'(\lambda)$ количества цветов C' и C'' , в которых они должны быть смешаны для получения чистого моно-

хроматического цвета C_λ постоянной энергетической мощности, мы сможем написать, исходя из последнего равенства,

$$\left. \begin{aligned} \xi'(\lambda) &= a_1 \xi(\lambda) + a_2 \eta(\lambda), \\ \eta'(\lambda) &= b_1 \xi(\lambda) + b_2 \eta(\lambda), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Так как коэффициенты a_1 , b_1 , a_2 и b_2 не зависят от длины волны, то соотношения (12) указывают, что новые кривые смещения являются линейными функциями от старых кривых.

Произвольный цвет C может быть получен путем смещения C' и C'' в количествах, которые мы обозначим через x' и y' . Подставляя (11) в (5), мы легко получим выражения

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_1 x + a_2 y, \\ y' &= b_1 x + b_2 y, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

представляющие собой так же, как и уравнения (12), преобразования для перехода от одной системы прямолинейных координат на плоскости к другой, имеющей то же начало (свободный член отсутствует).

Сопоставляя выражения (1) с (9) и (10), мы можем написать, что

$$\begin{aligned} \alpha &= \int E(\lambda) V_1(\lambda) d\lambda = \alpha_1 x + \alpha_2 y \\ \text{и} \quad \beta &= \int E(\lambda) V_2(\lambda) d\lambda = \beta_1 x + \beta_2 y, \end{aligned} \quad (14)$$

где α и β , α_1 и β_1 , α_2 и β_2 , — как и прежде, фототоки, возникающие в фотоэлементах 1 и 2 под влиянием произвольного цвета C и основных цветов C_1 и C_2 .

Мы видим, что выражение (14) по форме полностью совпадает с (13) и что, следовательно, величины α и β , являющиеся линейными функциями от x и y , можно рассматривать как частный случай цветовых координат, определяемых соответственным выбором координатной системы, т. е. основных цветов.

IV. КОЛИЧЕСТВО ЦВЕТА

12. Из двух предыдущих глав мы видели, что цвет определяется величинами α и β токов, возникающих под его влиянием в фотоэлементах, или количествами x и y основных цветов C_1 и C_2 , которые надо смешать на одной паре фотоэлементов, чтобы привести в положение равновесия дифференциальную схему. В обоих случаях мы имели возможность различать цвета между собой и устанавливать, является ли различие качественным или только количественным. В каждом цвете мы различали эти две стороны. Качество цвета определялось отношением координат $\frac{\alpha}{\beta}$ или $\frac{x}{y}$, которое и позволяло сопоставлять между собой качества различных цветов. С количественной стороны дело обстоит сложнее.

Если два цвета совпадают по качеству (цветности), то количественное их сопоставление не представляет труда. Оно получится как отношение одноименных координат этих двух цветов или как отношение длин соответствующих им радиусов векторов. Эти отношения не зависят от выбора основных цветов.

Сложность заключается в количественном сопоставлении цветов, не совпадающих по качеству. Графически такие цвета изображаются точками, лежащими на различных радиусах-векторах. Отношения одноименных координат не будут давать одинаковых величин и, кроме того, будут зависеть от выбора направления координатных осей. Отношение длин радиусов векторов явно не годится, так как оно зависит от масштаба, в котором основные цвета откладываются на осях (очевидно, что нас может интересовать только такое количественное соотношение, которое не зависело бы от случайных обстоятельств такого рода). Соотношения, установленные нами до сих пор, не дают критерия для суждения о количественном соотношении между различными по качеству цветами. Для возможности таких сопоставлений, не зависящих от выбора координат, нам придется создать какое-то дополнительное условие. Это условие должно дать нам возможность количественно сопоставить и наши основные цвета C_1 и C_2 , которые мы до сих пор из-за отсутствия других возможностей принимали за единицы, т. е. за количества, в каких-то отношениях эквивалентные.

Для того чтобы удовлетворить требованию независимости количественного признака от выбора координат, примем за меру количества цвета функцию от фототоков α и β , возникающих в фотоэлементах под действием интересующего нас цвета. Так как фототоки α и β пропорциональны освещенности на поверхностях фотоэлементов, то мы будем в дальнейшем обозначать количество цвета через $E(\alpha, \beta)$.

С первого взгляда может показаться, что за меру количества цвета можно взять почти что любую функцию от фототоков. Однако такие допущения находились бы в противоречии с нашими прежними предположениями.

Действительно, прежде всего мы должны считать, что количество цвета изменяется прямо пропорционально количественному изменению постоянного по составу излучения. Но при этом величины α и β изменяются пропорционально излучению. Поэтому мы должны положить, что количество цвета меняется прямо пропорционально одновременному изменению фототоков и должно обращаться в нуль вместе с ними.

Таким образом $E(\alpha, \beta)$ должно быть функцией однородной и притом первой степени. Кроме того, фотометрист и светотехник не могут представить себе, чтобы количества смешиваемых цветов не складывались бы алгебраически, т. е. цветовому равенству:

$$C_1 + C_2 = C$$

должно соответствовать равенство

$$E(\alpha_1, \beta_1) + E(\alpha_2, \beta_2) = E(\alpha, \beta),$$

где $E(\alpha_1, \beta_1)$ и $E(\alpha_2, \beta_2)$ представляют собой количества смешиваемых цветов C_1 и C_2 , а $E(\alpha, \beta)$ — количество суммарного цвета C . Но так как согласно (2) $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ и $\beta = \beta_1 + \beta_2$, то

$$E(\alpha_1, \beta_1) + E(\alpha_2, \beta_2) = E(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2).$$

Последнее выражение может быть удовлетворено только при том условии, что

$$E(\alpha, \beta) = p\alpha + q\beta, \quad (15)$$

где p и q — некоторые постоянные коэффициенты.

Чтобы не возвращаться к необходимости измерения фототоков α и β , операции, не имеющей никакого визуального соответствия, обратимся снова к дифференциальной схеме, изображенной на рис. 6. При этом возможны различные случаи.

а) Мы можем выбрать за меру количества цвета ток α от первого фотоэлемента, т. е. положить в (15) $q = 0$. Дифференциальная схема даст нам простую возможность устанавливать количественные соотношения между любыми цветами, освещающими 1-ю и 2-ю пары фотоэлементов. Цвета будут количественно одинаковы, если гальванометр g_1 будет находиться в нулевом положении. Отклонение его вправо или влево будет говорить о том, количество какого цвета больше. При этом показания другого гальванометра g_2 не будут иметь никакого значения для сравнения количества цветов. Если при нулевом положении гальванометра g_1 гальванометр g_2 тоже окажется в нулевом положении, то это будет свидетельствовать о том, что цвета одинаковы не только в количественном, но и в качественном отношении, т. е. о том, что мы имеем дело с одноцветными излучениями.

б) Если мы примем ток β от второго фотоэлемента за меру количества цвета, т. е. в выражении (15) положим $p = 0$, то указателем равенства или неравенства количества двух цветов будет служить гальванометр g_2 . В остальном этот случай не будет отличаться от первого.

в) Если за меру количества цвета мы возьмем произвольную

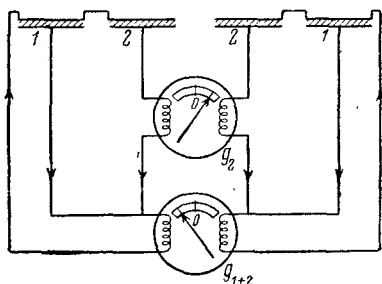


Рис. 9

линейную функцию фототоков $p\alpha + q\beta$, то схема, изображенная на рис. 6, уже не сможет нас удовлетворить. Однако нетрудно себе представить такое изменение этой схемы, которое позволит устанавливать количественное равенство цветов и по такому признаку. Для случая, например, когда $p = q = 1$, соответствующая схема изображена на рис. 9, где через гальванометр g_{1+2} проходят оба то-

ка α и β , и который дает поэтому возможность сравнивать количества цветов, если за меру этого количества принята сумма $\alpha + \beta$.

В общем случае количество цвета оценивается выражением (15) при любых значениях коэффициентов p и q . Выражение (15) позволяет дать количественную оценку основным цветам C_1 (α_1, β_1) и C_2 (α_2, β_2).

Из (15) следует, что

$$\begin{aligned} E_1 &= p\alpha_1 + q\beta_1 = L, \\ E_2 &= p\alpha_2 + q\beta_2 = M, \end{aligned} \quad (16)$$

где L и M — количественные коэффициенты основных цветов C_1 и C_2 .

Количество E произвольного цвета может быть написано так:

$$E = xL + yM, \quad (17)$$

где x и y — координаты цвета из уравнения (5).

Если на нашу систему падают монохроматические потоки с различными длинами волн λ , создающие на фотоэлементах энергетические освещенности, равные единице, то количество E_λ цвета C_λ ($\alpha_\lambda, \beta_\lambda$) будет определяться следующими зависимостями:

$$E_\lambda = p\alpha_\lambda + q\beta_\lambda = pV_1(\lambda) + qV_2(\lambda) = V(\lambda), \quad (18)$$

где $V_1(\lambda)$ и $V_2(\lambda)$ — спектральные чувствительности каждого из двух фотоэлементов, а $V(\lambda)$ представляет собой количественную оценку монохроматического излучения, мощность которого равна единице, т. е. является количественной спектральной чувствительностью системы фотоэлементов. Если вместо монохроматического света мы осветим фотоэлементы цветом $C(\alpha, \beta)$ произвольного состава $E(\lambda)$, так что $E(\lambda)d\lambda$ будет представлять монохроматическую освещенность, создаваемую им в интервале длин волн $\lambda, \lambda + d\lambda$, то ввиду аддитивных свойств приемников (фотоэлементов) количественная оценка E всего излучения может быть определена таким образом [см. уравнения (1)]:

$$\begin{aligned} E &= p\alpha + q\beta = p \int E(\lambda) V_1(\lambda) d\lambda + q \int E(\lambda) V_2(\lambda) d\lambda = \\ &= \int E(\lambda) [pV_1(\lambda) + qV_2(\lambda)] d\lambda = \int E(\lambda) V(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (19)$$

Последнее выражение совпадает с общепринятой фотометрической оценкой количества излучения, если допустить, что $V(\lambda)$ совпадает с чувствительностью среднего человеческого глаза.

Подставляя (9) в (18) и принимая, что через α_1, β_1 и α_2, β_2 обозначены фототоки, соответствующие основным цветам C_1 и C_2 , находим, что

$$V(\lambda) = (p\alpha_1 + q\beta_1) \xi(\lambda) + (p\alpha_2 + q\beta_2) \eta(\lambda) = L \xi(\lambda) + M \eta(\lambda), \quad (20)$$

где L и M — количественные коэффициенты основных цветов C_1 и C_2 .

При переходе к другой паре основных цветов C' и C'' функции смещения изменяются и согласно (12) переходят в $\xi'(\lambda)$ и $\eta'(\lambda)$. Количественные коэффициенты основных цветов L и M также изменяются и переходят в L' и M' , которые могут быть определены из уравнения (11)

$$L = a_1 L' + b_1 M' \quad \text{и} \quad M = a_2 L' + b_2 M'. \quad (21)$$

$+ q\beta = \text{const}$ переходит в уравнение прямой $Lx + My = \text{const}$. Иначе говоря, обе формулы относятся к одному семейству по отношению к различным осям координат.

На рис. 10 представлены оси α , β и x , y (проходящие через основные цвета C_1 и C_2) и семейство равноколичественных прямых, обозначенных цифрами 0, 1, 2, 3 и т. д. Таким образом точки, лежащие на прямой, обозначенной цифрой 5, например точка C или C_2 , изображают цвета, превосходящие по количеству в 5 раз цвета, изображаемые точками прямой 1. Если при этом сравниваемые цвета изображаются точками, лежащими на одном радиусе-векторе, то качество этих цветов одинаково, если на разных, то качество их различно. Та прямая из рассмотренного нами семейства, которая проходит через начало координат, соответствует цветам с нулевым количеством и может быть представлена выражением $Lx + My = 0$. Единственный реальный цвет такого рода — черный цвет, изображаемый началом координат, соответствует полному отсутствию какого-либо света. Все другие точки этой прямой не имеют соответствующих им реальных цветов. В дальнейшем мы подробнее остановимся на этих так называемых мнимых цветах.

Возвращаясь к прямой линии равноколичественного семейства, соответствующей нулевому количеству, отметим, что она разделяет цветовую плоскость на две части. В одной части будут расположены цвета с положительными количествами, в другой — с отрицательными. Последние будут полностью относиться к числу цветов мнимых.

14. Каждое реальное излучение состоит из большего или меньшего числа более или менее слабых монохроматических составных частей. Монохроматические цвета изображаются в случае постоянной мощности излучений кривой линией, подобной той, которая изображена на рис. 10. В случае двухмерного цветовосприятия совокупность радиусов-векторов, направленных на все точки этой кривой, исчерпывает совокупность качеств цвета любого состава. Действительно, смесь двух любых чистых (монохроматических) цветов дает по правилу параллелограмма цвет, качество которого изображается направлением, лежащим между направлениями исходных векторов. Поэтому при любом числе повторений такой операции мы будем иметь результирующую, совпадающую по качеству с каким-то чистым монохроматическим цветом.

Проведем из начала координат две прямые, касательные к кривой спектральных цветов. На рис. 10 это будут координатные оси, т. е. прямые $\beta = 0$ и $\alpha = 0$, или относительно осей x и y

$$x\alpha_1 + y\alpha_2 = 0 \text{ и } x\beta_1 + y\beta_2 = 0.$$

Каждый реальный цвет будет изображаться вектором, лежащим внутри угла между этими прямыми. Всякое направление, лежащее вне этого угла, не будет иметь никакого реального соответствия. Но для геометрических и математических построений эти направления могут быть весьма удобны. Мы можем условиться распростра-

нить и на них цветовые соответствия, но при этом придется относящиеся к ним цвета считать мнимыми.

15. Мы видели, что все количественные соотношения инвариантны относительно преобразования координат, т. е. относительно выбора основных цветов. Это делает все пары основных цветов принципиально совершенно равноценными, и выбор той или иной пары диктуется соображениями чисто практического непринципиального порядка. К числу таких практических обстоятельств относится большая или меньшая трудность вычисления величин, с которыми приходится оперировать на практике (практика имеет дело с трехмерным цветовосприятием, но характер всех соотношений сохраняется и в нашем случае, имеющем преимущество большей простоты). Совершенно очевидно, что вычисление координат цвета, т. е. интегралов (10), будет существенно облегчено, если подинтегральная величина не будет изменять знака, т. е. если все элементы интеграла будут положительными. Это упрощение наступит тогда, когда функции $\xi'(\lambda)$ и $\eta'(\lambda)$, взятые по отношению к новым основным цветам C' и C'' , будут иметь только положительные значения. Из рис. 10 нетрудно заключить, что такое положение будет иметь место только тогда, когда координатные оси x' и y' пройдут вне области, захватываемой монохроматическими цветами. Иными словами, для достижения указанного удобства необходимо, чтобы цвета C' и C'' были бы мнимыми. Однако это условие оставляет еще очень большой произвол в выборе основных цветов. Посмотрим, нельзя ли воспользоваться этим произволом для получения дополнительных упрощений в величинах, с которыми нам придется оперировать.

Обращаясь к формуле (22), определяющей количество цвета, мы замечаем, что величины L и M связаны с выбором основных цветов. Выберем новый основной цвет C' так, чтобы, оставаясь мнимым и не нарушая поэтому первого условия, он дал бы нам $L' = 0$. Это сделать нетрудно, если поместить C' на прямой $p\alpha + q\beta = 0$. Тогда выражение (22) превратится в более простое

$$E = M'y' = M' \int E(\lambda) \eta'(\lambda) d\lambda. \quad (25)$$

Сравнивая последнее соотношение с выражением (19), мы видим, что

$$V(\lambda) = M' \eta'(\lambda).$$

Если позаботиться еще и о том, чтобы другой основной цвет C'' , оставаясь также мнимым, лежал бы на прямой $p\alpha + q\beta = 1$, то величина M' , очевидно, окажется равной единице, и мы получим окончательно

$$V(\lambda) = \eta'(\lambda). \quad (26)$$

Таким образом подходящим выбором основных цветов можно добиться совпадения одной из функций смещения с общей спектральной чувствительностью системы фотоэлементов. Так как $L' = 0$, а $M' = 1$, то выражение (22) дает нам

$$E = y', \quad (27)$$

т. е. что количество любого цвета совпадает при этом с одной из его координат. Оставшуюся неопределенной длину радиуса-вектора OC' мы можем определить, исходя из дополнительного требования

$$\int \xi'(\lambda) d\lambda = \int \tau'(\lambda) d\lambda, \quad (28)$$

которое обеспечивает удобное положение на плоскости x', y' радиуса-вектора, соответствующего равноэнергетическому (белому) цвету $E(\lambda) = \text{const}$, который мы попрежнему обозначим буквой E .

Значением постоянных p и q , определяющих через (15) количество E цвета, будет задаваться направление семейства равноколичественных прямых. Изменение p и q , повлечет за собой изменение основных цветов, которые мы должны выбрать за основные, желая воспользоваться удобством выражений (26) и (27).

Если в частном случае $p = 0$, $q = 1$, то семейство равноколичественных прямых будет параллельно оси α и спектральная чувствительность системы будет совпадать с чувствительностью второго фотоэлемента.

VI. ТРЕХМЕРНОЕ ЦВЕТОВОСПРИЯТИЕ

16. Система из трех фотоэлементов, имеющих различные спектральные чувствительности, также обладает возможностями различения спектральных составов и при этом, очевидно, возможностями большими, чем система из двух фотоэлементов. Однако метод разбора этих возможностей может быть применен прежний, что значительно облегчит его проведение.

Следуя прежнему методу рассмотрения, предположим, что кривые спектральной чувствительности фотоэлементов нам известны и пусть это будут функции $V_1(\lambda)$, $V_2(\lambda)$ и $V_3(\lambda)$.

Совершенно естественно, что имея возможность измерить три фототока, возникающие под действием падающего излучения (рис. 11), мы можем характеризовать каждое излучение тремя величинами

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \int E(\lambda) V_1(\lambda) d\lambda, \\ \beta &= \int E(\lambda) V_2(\lambda) d\lambda \\ \text{и} \\ \gamma &= \int E(\lambda) V_3(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

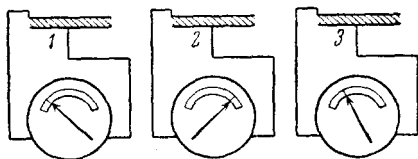


Рис. 11. Цветочувствительная система из трех фотоэлементов

где $E(\lambda)$ характеризует спектральный состав излучения, а $E(\lambda) d\lambda$ есть энергетическая освещенность фотоэлементов в интервале λ , $\lambda + d\lambda$.

Имея в своем распоряжении три величины α , β и γ , характеризующие каждое излучение, мы можем рассматривать их как координаты точки в любой системе косоугольных пространственных координат. Полученное пространство назовем «цветовым» про-

пространством. Каждому излучению соответствует определенная точка этого пространства, т. е. определенный «цвет».

Обратное положение несправедливо. Каждой точке цветового пространства, т. е. каждому цвету, не соответствует какое-либо определенное излучение. В качестве правила можно высказать положение, что каждому цвету соответствует бесчисленное множество излучений, образующих группу «одноцветных» излучений, неотличимых одно от другого при помощи рассматриваемой системы фотоэлементов. Группы одноцветных излучений определяются видом функций $V_1(\lambda)$, $V_2(\lambda)$ и $V_3(\lambda)$.

Изменение излучения, состоящее в пропорциональном уменьшении или увеличении мощности излучений по всему спектру, вызовет согласно (29) пропорциональные изменения всех трех координат и будет изображаться перемещением точки цветового пространства по прямой линии, проходящей через начало координат (по радиусу-вектору).

Начало координат ($\alpha = \beta = \gamma = 0$) соответствует отсутствию всякого излучения и представляет собой черный цвет, в который переходит всякий цвет при беспредельном ослаблении излучения.

Следует, однако, убедиться в том, что совокупность точек, соответствующих различным излучениям, действительно заполняет какое-то пространство, а не располагается, например, на проходящей через начало координат плоскости или даже прямой линии.

Если кривые чувствительности фотоэлементов $V_1(\lambda)$, $V_2(\lambda)$ и $V_3(\lambda)$ отличались бы друг от друга только постоянным множителем, так что $K_1 V_1 = K_2 V_2 = K_3 V_3$ (K_1 , K_2 и K_3 не зависят от λ), то мы имели бы всегда $K_1 \alpha = K_2 \beta = K_3 \gamma$ независимо от вида функции $E(\lambda)$. При этом точки, соответствующие любым излучениям, располагаются в пространстве α , β , γ на одном радиусе-векторе, выражаемом последним уравнением. В этом случае мы имели бы цветное пространство одного измерения.

Если кривые чувствительности фотоэлементов были бы связаны одним уравнением вида $K_1 V_1 + K_2 V_2 + K_3 V_3 = 0$ (K_1 , K_2 и K_3 не зависят от λ), то при любой функции $E(\lambda)$ мы имели бы всегда соотношение $K_1 \alpha + K_2 \beta + K_3 \gamma = 0$. При этом цветное пространство выродилось бы в плоскость, проходящую через начало координат и изображаемую последним соотношением. Это был бы случай цветового пространства с двумя измерениями.

Во всех остальных случаях, т. е. в тех случаях, когда функции V_1 , V_2 и V_3 линейно независимы, точки, изображающие различные излучения, действительно занимают часть пространства. При этом легко подобрать три цвета, изображаемые точками, не лежащими в одной плоскости с началом координат.

При помощи нашей системы из трех фотоэлементов и трех гальванометров мы можем проследить законы смешения цветов, т. е. найти ту точку C цветового пространства с координатами α , β и γ , которая соответствует смеси трех излучений. Пусть одно из этих излучений изображается точкой $C_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, другое — $C_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

и третье $C_3 (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$. Так как общая спектральная характеристика $E(\lambda)$ смеси излучений является суммой характеристик смешиваемых излучений $E(\lambda) = E_1(\lambda) + E_2(\lambda) + E_3(\lambda)$, то из (29) очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ \beta &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \\ \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Таким образом мы получаем для пространственного смешения цветов правило параллелепипеда, соответствующее правилу параллелограмма на плоскости. Если радиусы-векторы цветов C_1 , C_2 и C_3 не лежат в одной плоскости, то смешивая их в определенных пропорциях $x C_1 + y C_2 + z C_3$, мы сможем получить любой цвет с любыми координатами α , β и γ . Действительно, три уравнения

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= x \alpha_1 + y \alpha_2 + z \alpha_3, \\ \beta &= x \beta_1 + y \beta_2 + z \beta_3, \\ \gamma &= x \gamma_1 + y \gamma_2 + z \gamma_3. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

могут быть решены относительно x , y и z , и при том единственным образом, при любых α , β и γ , если только

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (32)$$

Условие (32) эквивалентно требованию, чтобы радиусы-векторы C_1 , C_2 и C_3 не лежали бы в одной плоскости. Отыскав величины x , y , z , мы можем написать

$$C = x C_1 + y C_2 + z C_3. \quad (33)$$

Одно или два числа из трех чисел x , y , z могут оказаться отрицательными.

Итак, если дана система из трех фотоэлементов с линейно независимыми кривыми спектральной чувствительности, то такая система обладает цветочувствительностью, и притом эта цветочувствительность подчиняется закону Грассмана, который полнее всего излагается в следующей форме:

1) существуют линейно независимые совокупности из трех цветов и

2) каждые четыре цвета всегда находятся в линейной зависимости и при том единственной.

Закон Грассмана устанавливает трехмерность цветового пространства.

17. Составим дифференциальную схему соединения двух совершенно одинаковых систем из трех фотоэлементов (рис. 12), аналогично тому, как мы включали две одинаковые пары фотоэлементов.

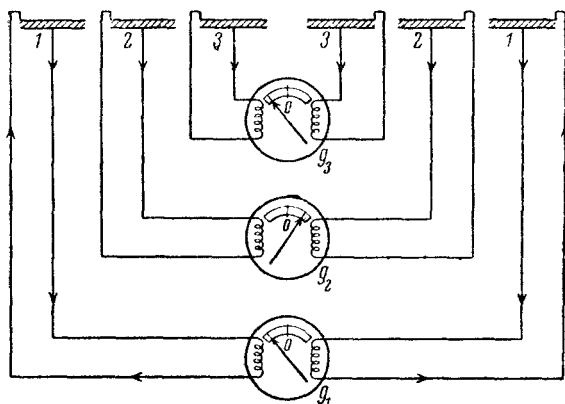


Рис. 12. Дифференциальная схема включения двух систем из трех фотоэлементов

Пусть правая часть схемы освещается одним, а левая другим излучением. Если при этом все три дифференциальные гальванометра G_1 , G_2 и G_3 будут давать нулевые показания, то это будет обозначать, что два сравниваемых излучения являются одноцветными. Если гальванометры не будут находиться в нулевом положении, но смогут быть в него приведены путем усиления или ослабления освещенности одной из половин дифференциальной схемы, происходящего без изменения спектрального состава излучения, то значит цвета исходных излучений отличались только светлотой и совпадали по цветности (по качеству). Если никакое усиление или ослабление освещенности, не нарушающее спектрального состава излучения, не может привести сразу все три гальванометра в нулевое положение, то это значит, что излучения, освещающие правую и левую стороны дифференциальной схемы, отличны по цветности (т. е. по качеству).

Выбрав три линейно независимых цвета C_1 , C_2 и C_3 , мы можем согласно (33) составить из них и произвольного цвета C два одноцветных излучения. Пользуясь тремя дифференциальными гальванометрами как индикаторами, мы сможем экспериментально найти величины x , y и z . Приняв цвета C_1 , C_2 и C_3 за основные, мы можем каждый цвет характеризовать не фототоками α , β и γ , но величинами x , y и z , которые превращаются таким образом в координаты цвета.

Прежде чем перейти к более подробному разбору цветочувствительности человеческого глаза, отметим некоторые общие свойства цветочувствительной системы из трех фотоэлементов. Подбн-

рая цветовые равновесия между монохроматическими (чистыми) цветами C_λ , создающими энергетические освещенности, равные единице в разных длинах волн, и основными цветами C_1 , C_2 и C_3 , мы можем найти три функции смещения $\xi(\lambda)$, $\eta(\lambda)$ и $\zeta(\lambda)$ так, что

$$C_\lambda = \xi(\lambda) C_1 + \eta(\lambda) C_2 + \zeta(\lambda) C_3. \quad (34)$$

Будучи нанесены на отдельный график (рис. 13), эти функции дают кривые, называемые кривыми смещения. Функции $\xi(\lambda)$, $\eta(\lambda)$ и $\zeta(\lambda)$ можно одновременно рассматривать как параметрическое выражение некоторой характеристической кривой в пространстве x , y , z , выражающей цветовые свойства нашей системы из трех фотоэлементов. Коническая поверхность, имеющая вершину в начале координат и характеристическую кривую в качестве направляющей для боковой поверхности, охватывает часть цветового пространства. Нетрудно сообразить, что все реальные цвета будут изображаться точками, лежащими в той части пространства, которая охватывается этой поверхностью,

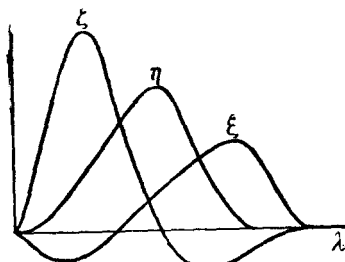


Рис. 13

Координаты x , y , z цвета излучения, имеющего состав $E(\lambda)$, будут выражаться по отношению к основным цветам C_1 , C_2 и C_3 интегралами

$$\left. \begin{aligned} x &= \int E(\lambda) \xi(\lambda) d\lambda, \\ y &= \int E(\lambda) \eta(\lambda) d\lambda, \\ z &= \int E(\lambda) \zeta(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Если вместо цветов C_1 , C_2 и C_3 мы примем за основные новые цвета C' , C'' и C''' и если старые основания связаны с новыми соотношениями

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= a_1 C' + b_1 C'' + c_1 C''', \\ C_2 &= a_2 C' + b_2 C'' + c_2 C''', \\ C_3 &= a_3 C' + b_3 C'' + c_3 C''', \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

то вместо (33) и (34) мы напишем

$$C = x' C' + y' C'' + z' C''' \quad (37)$$

и

$$C_\lambda = \xi'(\lambda) C' + \eta'(\lambda) C'' + \zeta(\lambda) C''', \quad (38)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ y' &= b_1 x + b_2 y + b_3 z, \\ z' &= c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \xi'(\lambda) &= a_1 \xi(\lambda) + a_2 \eta(\lambda) + a_3 \zeta(\lambda), \\ \eta'(\lambda) &= b_1 \xi(\lambda) + b_2 \eta(\lambda) + b_3 \zeta(\lambda), \\ \zeta'(\lambda) &= c_1 \xi(\lambda) + c_2 \eta(\lambda) + c_3 \zeta(\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Новые функции смещения представляют собой, таким образом, линейные комбинации из старых функций смещения.

Новые координаты x' , y' и z' относительно новых основных цветов C' , C'' и C''' могут быть выражены и в форме интегралов

$$\left. \begin{aligned} x' &= \int E(\lambda) \xi'(\lambda) d\lambda, \\ y' &= \int E(\lambda) \eta'(\lambda) d\lambda, \\ z' &= \int E(\lambda) \zeta'(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Последние выражения, которые легко получаются при подстановке (35) и (40) в (39), по форме совпадают с соотношениями (35). Это совершенно естественно, так как (35) и (41) представляют координаты цвета, отнесенные к двум совершенно равноправным системам основных цветов C_1 , C_2 , C_3 и C' , C'' , C''' .

18. Переходя к разбору количественных соотношений между цветами, мы можем повторить, что когда сравнению подлежат цвета, одинаковые по качеству, т. е. изображаемые точками одного радиуса-вектора, вопрос решается просто. Отношение координат этих цветов дает ответ на поставленный вопрос.

Но в общем случае такого простого решения не имеется. Будем искать меру количества цвета в виде функции от трех фототоков α , β , γ и обозначим ее через $E(\alpha, \beta, \gamma)$. Это допущение обеспечивает независимость количества цвета от выбора системы координат. Для того чтобы не было противоречий с предшествующими предположениями, мы должны считать, что $E(\alpha, \beta, \gamma)$ изменяется прямо-пропорционально изменению α , β , γ и что, кроме того,

$$E(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + E(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = E(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2). \quad (42)$$

Последнее соотношение является следствием постулированной нами аддитивности количеств смешиваемых цветов. Оно может быть удовлетворено только при том условии, что $E(\alpha, \beta, \gamma)$ будет линейной однородной функцией, т. е.

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = p\alpha + q\beta + r\gamma. \quad (43)$$

Основные цвета C_1 , C_2 и C_3 получают при этом определенные количественные значения

$$\left. \begin{aligned} \text{для } C_1 E(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1) &= L = p\alpha_1 + q\beta_1 + r\gamma_1, \\ \text{для } C_2 E(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2) &= M = p\alpha_2 + q\beta_2 + r\gamma_2, \\ \text{для } C_3 E(\alpha_3 \beta_3 \gamma_3) &= N = p\alpha_3 + q\beta_3 + r\gamma_3. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Количество E каждого цвета, имеющего относительно C_1, C_2 и C_3 координаты x, y и z , найдется сразу

$$E = xL + yM + zN. \quad (45)$$

Чистые монохроматические цвета C_λ , имеющие согласно (34) координаты $\xi(\lambda)$, $\eta(\lambda)$ и $\zeta(\lambda)$, будут количественно расцениваться так:

$$E_\lambda = \xi(\lambda)L + \eta(\lambda)M + \zeta(\lambda)N = V(\lambda), \quad (46)$$

где $V(\lambda)$ представляет собой количественную меру равноэнергетических монохроматических излучений, т. е. определяет количественную спектральную чувствительность всей системы.

С другой стороны, согласно (43)

$$V(\lambda) = E_\lambda = p\sigma_\lambda + q\gamma_\lambda + r\gamma_\lambda = pV_1(\lambda) + qV_2(\lambda) + rV_3(\lambda) \quad (47)$$

и для цвета любого состава $E(\lambda)$

$$E = \int E(\lambda) v(\lambda) d\lambda. \quad (48)$$

Если мы имеем большое число близких по своим свойствам совокупностей из трех фотоэлементов, соединенных в схему с близкими значениями величины p, q и r , то мы сможем наблюдать разные функции $V(\lambda)$. При этом различие может происходить как за счет несовпадения V_1, V_2 и V_3 , так и за счет несовпадения коэффициентов p, q и r . Если различие базируется на несовпадении кривых V_1, V_2 и V_3 , то такие системы будут отличаться при установлении одноцветности различных по составу излучений. Если же различия происходят только из-за несовпадения коэффициентов p, q и r , то это повлечет за собой различия в количественной оценке разнокачественных цветов (расхождения между наблюдателями при гетерохромном фотометрировании).

При новых основных цветах C', C'' и C''' координаты x, y, z переходят в x', y', z' согласно (39), а количественные коэффициенты L, M, N переходят в L', M', N' , причем (36) дают

$$\left. \begin{aligned} L &= a_1L' + b_1M' + c_1N', \\ M &= a_2L' + b_2M' + c_2N', \\ N &= a_3L' + b_3M' + c_3N'. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Количество E цвета C , независящее от выбора основных цветов, может быть представлено через x', y', z' и L', M', N' следующим образом:

$$E = x'L' + y'M' + zN'. \quad (50)$$

Подставляя (44) в (46) и сопоставляя с (47), мы найдем

$$\left. \begin{aligned} V_1(\lambda) &= \alpha_1 \xi(\lambda) + \alpha_2 \eta(\lambda) + \alpha_3 \zeta(\lambda), \\ V_2(\lambda) &= \beta_1 \xi(\lambda) + \beta_2 \eta(\lambda) + \beta_3 \zeta(\lambda), \\ V_3(\lambda) &= \gamma_1 \xi(\lambda) + \gamma_2 \eta(\lambda) + \gamma_3 \zeta(\lambda), \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

т. е. кривые смещения $\xi(\lambda)$, $\eta(\lambda)$ и $\zeta(\lambda)$ являются линейными комбинациями из кривых чувствительностей трех фотоэлементов $V_1(\lambda), V_2(\lambda)$ и $V_3(\lambda)$.

19. В трехмерном пространстве α, β, γ (или x, y, z) выражены $p\alpha + q\beta + r\gamma = \text{const}$ (или $Lx + My + Nz = \text{const}$) изображаемое семейство параллельных плоскостей, представляющих собой геометрические места равноколичественных цветов. Та плоскость этого семейства, которая проходит через начало координат, соответствует цветам с нулевым количеством. Кроме начала координат, все цвета этой плоскости являются мнимыми. Если мы выберем два новых основных цвета C' и C'' так, чтобы они лежали в этой плоскости, то очевидно, что соответствующие им количественные коэффициенты L' и N' обратятся в нули.

Если, кроме того, мы поместим третий основной цвет C'' в плоскости с количеством, равным единице ($M' = 1$), то (50) превратится в

$$E = y'. \quad (52)$$

Сопоставляя (48) с (41), мы видим, что при таком выборе основных цветов

$$V(\lambda) = \eta'(\lambda). \quad (53)$$

Иными словами, одна из функций смешения совпадет с общей спектральной чувствительностью системы.

Выбрав какие-то два направления в плоскости $p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$ за направления основных цветностей, мы всегда можем так поместить на них цвета C' и C'' , чтобы их смесь с единичным количеством цвета C'' давала бы любой цвет. Можно в частности потребовать, чтобы смесь основных цветов давала бы «ахроматический» или «белый» цвет. Удобнее всего принять за белый цвет равноэнергетического излучения ($E(\lambda) = \text{const}$). Нетрудно видеть, что согласно (41) его координаты

$$x'_E = \int \xi'(\lambda) d\lambda; \quad y'_E = \int \eta'(\lambda) d\lambda; \quad z'_E = \int \zeta'(\lambda) d\lambda.$$

Для того чтобы смесь основных цветов давала бы цвет, неотличимый от цвета E , т. е. для того чтобы

$$C' + C'' + C''' = E,$$

необходимо и достаточно, чтобы $x'_E = y'_E = z'_E$, т. е. чтобы

$$\int \xi' \lambda d\lambda = \int \eta' d\lambda = \int \zeta' d\lambda. \quad (54)$$

Этим условием устанавливается масштаб по осям (OC' и OC'''), т. е. определяется положение основных цветов C' и C''' .

VII. ЦВЕТОВУЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ НОРМАЛЬНОГО ГЛАЗА

20. Приступая к разбору цветочувствительных свойств нормального человеческого глаза, мы должны сделать несколько предварительных замечаний.

Известно, что глаз представляет собой весьма сложный орган, позволяющий человеку различать контуры предметов, их цвета,

глубину их расположения при чрезвычайно широких изменениях внешних условий освещения от темной осенней ночи, когда освещенность измеряется тысячными и десятитысячными долями люкса, до яркого летнего дня с освещенностью порядка десятков тысяч люкс. Известно также, что такая широта диапазона определяется наличием в глазу двух родов светочувствительных элементов — палочек и колбочек.

Число палочек в глазу гораздо больше, чем число колбочек; они располагаются вокруг желтого пятна, которое само содержит их сравнительно очень мало. Главную массу чувствительных элементов желтого пятна составляют колбочки, особенно в центральной его части, образующей так называемое центральное углубление, где палочки практически отсутствуют. Палочки осуществляют видение при малых освещенностях (так называемое сумеречное зрение), а колбочки дают возможность видеть днем, когда очень чувствительные палочки находятся в состоянии полного ослепления.

Цветочувствительность является одним из характерных свойств аппарата дневного зрения — колбочек. Поэтому все цветовые измерения и все исследования цветовых свойств глаз производятся: 1) при достаточно высоком уровне яркости поля зрения, включающем палочковый аппарат, и 2) при достаточно малом размере поля зрения, обеспечивающем работу одного только центрального углубления.

Кроме того, следует помнить, что наш разбор относится только к физико-математической стороне цветовосприятия и совершенно не затрагивает весьма существенной психофизиологической области, определяющей целый ряд явлений совершенно другого порядка. Сюда относится, например, вопрос о том, почему желтый цвет, имеющий малую относительную яркость, представляется нашему глазу, находящемуся в обычных условиях, качественно отличным от яркого желтого. Эта разница настолько существенна, что нашла свое отражение в языке, имеющем для этого случая специальное наименование — коричневый цвет. Целый ряд вопросов этого рода (например, очень широко распространенное разделение цветов на «холодные» и «теплые», все вопросы, связанные с явлением адаптации или утомления) останется совершенно нами не затронутым. Мы ограничимся только рассмотрением законов смещения цветов и их качественной и количественной характеристикой при указанных выше специализированных условиях — достаточно высокая яркость и малое поле зрения.

Для громадного числа задач научной и технической колориметрии этого будет достаточно.

21. В основу нашего рассмотрения мы положим закон Грассмана, установленный экспериментально относительно цветовосприятия глаза и имеющий, как мы видели, место для трехмерной цветовоспринимающей системы. Обратно, закон Грассмана позволяет утверждать, что система цветовосприятия нормального глаза является системой трехмерной и позволяет характеризовать каждый цвет

тремя координатами, определяющими его как смесь трех основных линейно независимых цветов.

С оговорками относительно размеров поля зрения и уровня яркости все выводы, сделанные нами относительно трехмерной системы, могут быть целиком применены к глазу.

Основой для построения системы цветовосприятия человеческого глаза должны служить кривые смещения, полученные как средние из исследования достаточно большого числа нормальных в цветовом отношении наблюдателей.

Кривые смещения получаются в общих чертах следующим образом. Выбираем три линейно независимых цвета за основные. Одну половину достаточно малого поля зрения освещаем монохроматическим светом с сохранением достаточно высокого уровня яркости. Энергетическая мера этого монохроматического излучения должна быть известна. На другой половине поля зрения стремимся смешать три основных цвета в такой пропорции, чтобы обе части поля зрения сделались бы неотличимыми одна от другой, и определяем эти пропорции (коэффициенты) в каких-то условных единицах. Для некоторых длин волн это не удастся. Тогда приходится один (или два) из основных цветов направлять на то поле, которое освещается исследуемым монохроматическим светом, и таким способом добиваться получения полного фотометрического и цветового равновесия. При этом одному (или двум) из трех коэффициентов смещения приписывается отрицательный знак. Путем деления величин полученных коэффициентов на энергетическое количество монохроматического излучения мы относим их к единице излучения.

Три коэффициента, определенные по всему видимому спектру, составляют три кривые смещения $\xi(\lambda)$, $\eta(\lambda)$ и $\zeta(\lambda)$, которые позволяют построить в цветовом пространстве кривую двойной кривизны, характеризующую цветовые свойства глаза.

За оси координат мы примем три любые прямые, не лежащие в одной плоскости, на которых в произвольном масштабе отложим выбранные нами основные цвета. Для среднего глаза мы получим тогда следующую картину. Концы нашей характеристической кривой будут упираться в начало координат. Отрезки, прилегающие к концам, являются прямолинейными. У коротковолнового конца характеристической кривой прямолинейный участок простирается примерно до $\lambda = 420$ мμ, а на длинноволновом конце — до 700 мμ.

Прямолинейные участки кривой обозначают, что монохроматические излучения с длиной волны 420 мμ и короче все имеют одинаковую цветность, так же как и излучения, соответствующие длинам волн 700 мμ и длиннее.

Участок характеристической кривой, прилегающей к последнему прямолинейному отрезку и простирающейся примерно до 570—580 мμ, лежит в плоскости, проходящей через начало координат. Таким образом все цвета спектра, промежуточные между 700 и 570 мμ, могут быть получены путем смещения этих двух в некоторой определенной пропорции. Только средняя часть характеристической кри-

вой между длинами волн 420 и 570 м μ имеет двоякую кривизну, т. е. оказывается по существу пространственной кривой.

Более подробно форма характеристической кривой может быть прослежена на рис. 14, где представлены проекции этой кривой на две плоскости.

Сама кривая получена следующим образом. Представим себе прямоугольную систему пространственных координат и будем откладывать по каждой из осей значение одного из коэффициентов трех кривых смещения r , g , b , полученных для основных цветов, соответствующих монохроматическим излучениям с длинами волн 700, 546,1 и 435,8 м μ . Каждой длине волны соответствуют три коэффициента кривых смещения, которые определяют положение одной точки характеристической кривой. Изменяя длину волны, мы получим ряд точек в пространстве, определяющих всю характеристическую кривую.

Пятый, шестой и седьмой столбцы первой таблицы, приложенной к резолюциям по колориметрии, принятым Конгрессом 1931 г., дают кривые смещения относительно указанных основных цветов. Эти числа $\bar{r}$, $\bar{g}$, $\bar{b}$, установленные на основе измерений Райта и Гильда, полностью определяют цветочувствительные свойства среднего человеческого глаза (так называемый стандартный наблюдатель 1931 г.). На рис. 14 представлены две проекции характеристической кривой на плоскости $\bar{b}\bar{g}$ и $\bar{g}\bar{r}$.

Первая из них дана сплошной линией, вторая — пунктирной. Числа, расположенные вдоль этих кривых, обозначают соответствующие длины волн в м μ . Единицы, в которых измеряются количества монохроматических излучений 435,8, 546,1 и 700 м μ , выбраны таким образом, чтобы смесь их, взятая в равных количествах, давала бы цвет, совпадающий с цветом равноэнергетического излучения.

Коническая поверхность, имеющая вершину в начале координат и характеристическую кривую в качестве образующей, представляет собой ту поверхность цветового пространства, на которой располагаются монохроматические (как иногда говорят «чистые») цвета. Если дополнить эту незамкнутую поверхность плоскостью, проходящей через начало координат и два прямолинейные конца характеристической кривой, то полость нашего конуса выделит ту часть цветового пространства, в которой расположатся все реальные

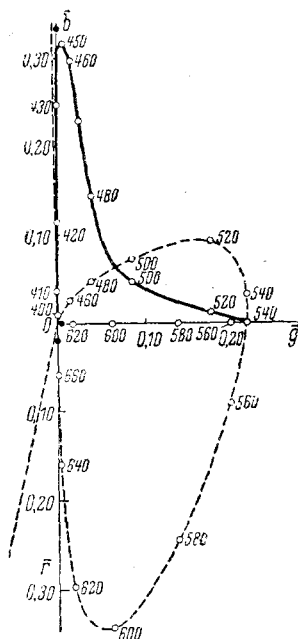


Рис. 14

цвета. Каждому цвету со сложным спектральным составом будет соответствовать точка внутри этой полости. Если пересечь координатные оси плоскостью, в точках равноотстоящих от начала координат, то сечение этой плоскости с координатными плоскостями и с конусом реальных цветов будет иметь вид, представленный на рис. 15. Точки r , g , b , являющиеся вершинами равностороннего треугольника, образующегося от пересечения плоскостей координат, соответствуют монохроматическим излучениям 700, 546,1 и 435,8 μ .

Этим устанавливается их связь с геометрическим местом монохроматических излучений. Центр равностороннего треугольника соответствует белому цвету равноэнергетического излучения.

22. Вопрос относительно количественной оценки, которую глаз дает различным цветам, следует разобрать совершенно особо. В случае системы из нескольких приемников мы могли поступать как угодно. Мы могли соединять их в произвольные схемы или просто составлять какую-то линейную функцию нескольких переменных — реакций приемников — и принимать ее условно за количественную меру цвета. В случае глаза мы должны считаться с экспериментально установленными фактами. Закон Грассмана, указывающий на то, что наша система трехмерная, не дает никаких указаний на количественные зависимости. Обратимся к соответствующему эксперименту. Пусть на фотометрической скамье расположены два разных по цвету источника A и B с двух сторон от фотометрической головки. Обеспечим подходящий размер поля зрения и его яркость.

Наблюдая в окуляр, начнем перемещать один из источников, скажем, B , оставляя другой источник и самую головку неподвижными. Тогда цвет одной части поля зрения — от источника A — будет оставаться неизменным, а цвет другой части — от источника B — будет изменяться. При этом изменение цвета от B будет чисто количественным, так как его спектральный состав остается постоянным. В цветовом пространстве наш эксперимент будет представляться таким образом: какой-то цвет A остается неизменным. Другой цвет — B — перемещается вдоль по своему радиусу-вектору, то приближаясь к началу координат (поле темнеет), то удаляясь от него (поле становится более светлым). Не представляет никакого труда путем перемещения источника B дойти до таких его положений, при которых ни у кого не будет сомнения в том, что поле от B в одном случае темнее, а в другом светлее, чем поле от A . А если это так, то несомненно, что где-то между этими крайними положениями источника B существует такое его положение, при котором оба поля должны казаться одинаково яркими. И действительно, после некоторого навыка наблюдатель начинает устанавливать какое-то не очень определенное положение фотометрического равновесия с гораздо большей точностью, чем этого можно было ожидать в начале. Чем больше различие в цветах между источниками A и B , тем затруднительнее отыскание положения равновесия, тем больше

случайная ошибка сравнения. При малом различии в окраске полей точность сравнения мало уступает точности измерений, производимых при вполне одинаковом цвете обеих частей поля зрения.

Однако размер погрешности сравнения не является принципиально существенным, так как случайные ошибки сопровождают каждое измерение. Существенно то, что глаз может количественно сопоставлять разноцветные излучения.

Следующий принципиальный вопрос будет состоять в том, является ли эта возможность количественного сравнения пригодной для физических построений или нет; прежде всего удовлетворяют ли полученные методом разноцветного фотометрирования величины аксиоме: две величины, порознь равные третьей, равны между собой. Прямые опыты, поставленные для решения этого вопроса, дают на него положительный ответ¹⁾. Таким образом описанный выше опыт со сравнением разноцветных излучений становится эквивалентным вводимшемуся нами выше какому-то условному признаку количественного равенства качественно различных цветов.

Отличие состоит только в том, что в случае глаза условие количественного равенства не задается нами по произволу, а устанавливается глазом в силу того или иного внутреннего устройства, и в том, что точность сравнения понижается с увеличением различия в сравниваемых цветах.

Разбиравшийся опыт соответствует тому, что принято называть сравнением цветов по их яркости. Иначе говоря, так называемая яркость цвета становится мерой его количества.

Если мы теперь сопоставим правила, введенные нами для количества цвета, со свойствами яркости цвета, установленными экспериментально, то мы сразу заметим их полное соответствие.

Действительно, мы имели:

1. Прямую пропорциональность между количеством цвета и излучением при неизменном спектральном составе.

Это же справедливо для яркости цвета.

2. Суммирование количества цвета при смешении цветов.

Закон аддитивности яркости установлен экспериментально.

3. Количество каждого цвета может быть определено из цветового уравнения путем замены цветов их количественными коэффициентами.

Таким же способом может быть установлена и яркость цвета через яркостные коэффициенты основных цветов.

Экспериментально это сделано теми же авторами (Экснер, Кольрауш). Отсюда следует, что в известных пределах изменения внешних условий освещения, обеспечивающих достаточную яркость поля зрения и для достаточно малых центральных частей сетчатки,

¹⁾ F. Exner, Sitz. Akad. Wiss. Wien, IIa, 129, 27, 1920; K. W. F. Kohlrausch, Physik. Z., 21, 423, 1920; C. I. Schaefer, Physik. Z., 26, 58, 908, 1925.

впечатление яркости в глазу определяется линейной и однородной функцией от реакций трех входящих в него приемников.

23. Если сравнить по количеству (по яркости) три основных цвета, принятые нами для цветового пространства, изображенного на рис. 14, то окажется, что они очень далеки от равенства между собой. Оказывается, что яркостные (количественные) коэффициенты красного (700 тм), зеленого (546,1 тм) и синего (435,8 тм) находятся в отношении $1:4,5907:0,0601$. Иначе говоря, если мы захотим получить «белый» цвет с равноэнергетического спектра, то яркости монохроматических излучений 700, 546,1 и 435,8 тм основных цветов, которые мы должны будем смешать с этой целью (на рис. 14 эти количества изображаются одинаковыми отрезками на осях $\bar{r}$, $\bar{g}$, $\bar{b}$), будут измеряться числами $1:4,5907$ и $0,0601$. Мы могли бы, конечно, изменить масштаб и изображать основные цвета не равными отрезками, а такими, чтобы их длина была бы пропорциональна их количественной мере. Тогда равными отрезками на осях определялись бы количественно равные цвета. Но такой масштаб был бы крайне неудобен, потому что вектор белого цвета лежал бы при этом вплотную около плоскости $\bar{r}\bar{g}$, занимая в плоскости рис. 15 (эта плоскость сечет оси координат на равных расстояниях от начала, т. е. в разбираемом случае она является плоскостью количественно равных цветов) положение E' . При этом все цветовое пространство оказывается занятым пурпурными и синими цветами, а все красные, желтые и зеленые оказываются сжатыми к плоскости $\bar{r}\bar{g}$, что весьма неудобно с точки зрения возможности использования графических методов. Следует заметить, что кривая спектральных цветов получит на этой плоскости совершенно другой вид, и только точки r , g и b сохраняют свои положения. Считаясь с этими неудобствами, приходится принимать за основные цвета и изображать одинаковыми отрезками не равноколичественные цвета, но такие, которые в смеси образуют белый. Тогда этот белый цвет располагается в центре треугольника, и пространство распределяется более равномерно между различными цветовыми тонами.

Если мы захотим отметить на осях r , g , b рис. 14 цвета, равные по своему количеству, то мы должны будем отложить от начала координат отрезки, обратно пропорциональные количественным коэффициентам. Эти отрезки должны иметь длины, относящиеся, как $1:0,21783:166,4$. Три отмеченные точки определяют плоскость равноколичественных цветов. Каждая плоскость, ей параллельная, будет также равноколичественной плоскостью, но соответствующей другому количеству цвета. Плоскость этого семейства, проходящая через начало координат, пересекает плоскости $\bar{r}\bar{g}$ и $\bar{g}\bar{b}$ по прямым линиям (следам), показанным пунктиром на чертеже. Намеченная плоскость будет содержать в себе все цвета с нулевыми количественными (яркостными) коэффициентами.

Нетрудно также нанести на рис. 15 след от пересечения нулевой плоскости с плоскостью равностороннего треугольника. Следы

рис. 14 пересекут плоскость рис. 15 в точках A и B . Соединяющая их пунктирная прямая является сечением плоскости треугольника с «нулевой» плоскостью (иногда эту прямую называют «алихна»).

Две координатные оси международной системы X, Y, Z , а именно X и Z , лежат в «нулевой» плоскости, следовательно должны пересечься с прямой AB (алихной). Принципиально направление этих осей может быть произвольным. Однако практически удобно расположить другую координатную плоскость, именно плоскость XY так, чтобы она совпадала с плоскостью длинноволнового участка характеристической кривой (580—760 $m\mu$). Такое расположение обеспечит нулевые значения координаты z на всем этом довольно значительном участке спектра и повлечет за

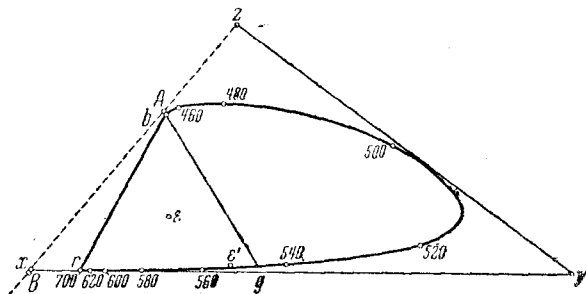


Рис. 15

собой заметное упрощение расчетов. На рис. 15 последнее требование определяет положение линии XY и вместе с уже намеченной линией XZ задает положение оси X . Координатная плоскость ZY выбрана более или менее произвольно. Никаких особых преимуществ ее положение не имеет. Она почти касается конуса спектральных цветов по линии, соответствующей $\lambda = 504 m\mu$. Выбрав ее положение относительно конуса монохроматических цветов, мы тем самым определяем оставшиеся еще неопределенными положения осей Y и Z .

Имея в качестве скелета координатный трехгранник $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ и установленную экспериментальным путем характеристическую кривую (рис. 14), мы можем вычислить по отношению к ним положение осей X, Y и Z , выбранных на основе изложенных соображений. Все три оси, как лежащие вне конуса спектральных цветов, не соответствуют никаким реальным цветам. Тем не менее мы можем использовать эти мнимые цвета для составления цветовых уравнений. В частности мы можем установить, какой длины следует взять вектора по осям X, Y и Z для того, чтобы суммы их имели направления, совпадающие с направлениями осей $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$, и одинаковую длину.

Сложив эти три вектора, мы получим с одной стороны белый цвет ϵ и с другой — длины векторов, направленных по X, Y, Z , которые надо сложить, чтобы получить белый цвет. После этого ничто не мешает нам взять эти последние суммарные длины векторов по каждой из осей за основные цвета и выражать все цвета через них.

Следующий шаг может быть таким.

Берем новую прямоугольную систему пространственных координат и начинаем строить на ней новую форму того же самого цветового пространства. Для этого отложим на осях в равных масштабах новые основные

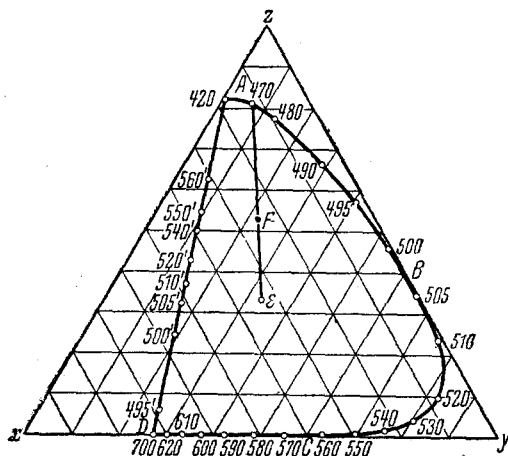


Рис. 16. Сечение цветового пространства плоскостью, отсекающей равные отрезки на осях X, Y, Z (масштабы на осях X, Y, Z выбраны так, чтобы цвет ϵ лежал в «центре» треугольника)

с координатными плоскостями равносторонний треугольник xyz (рис. 16). Белый цвет ϵ равноэнергетического излучения окажется снова в «центре» треугольника. Геометрическое место спектральных цветов будет лежать внутри треугольника, и сторона zy будет почти касаться его попрежнему при длине волны $504 \text{ м}\mu$, а сторона xz будет совпадать с прямолинейным участком длинноволнового конца кривой цветов.

Этот же треугольник, трансформированный в прямоугольный (рис. 17), оказывается значительно удобнее для практического использования. На плоскость этого треугольника, кроме точки ϵ , нанесены положения цветностей, соответствующих стандартным источникам A, B и C .

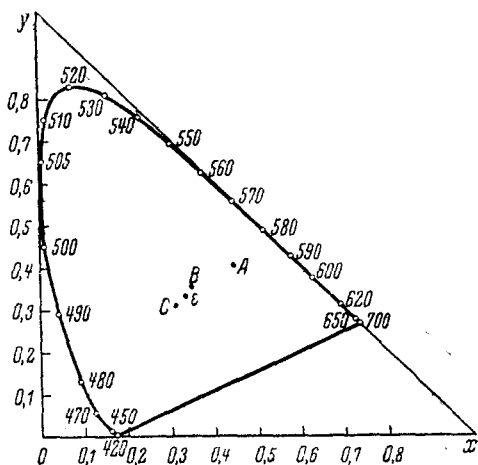


Рис. 17. Ортогональная проекция треугольника рис. 16 на плоскость XOY

новые основные цвета, найденные для осей X, Y, Z . Это позволит нам перенести старое цветовое пространство в новую координатную систему, так как для каждого цвета будут известны его новые координаты. Характеристическая кривая примет новую форму, не изменив своих цветовых свойств, которые, очевидно, не могут зависеть от выбора тех или других основных цветов. Плоскость, секущая новые координатные оси на равных расстояниях от начала, образует при встрече

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ньютон, Оптика, Госуд. издат-во, М.—Л., 1927, Перевод С. И. Вавилова, Первая книга, Часть II, Предложения IV, VII, стр. 107—128.
2. Th. Young, Lectures on natural philosophy, London, 1807, Vol. I, p. 439.
3. H. v. Helmholtz, Handb. d. physiolog. Optic, 3. Aufl., B. II, 1911, 52, 172.
4. J. C. Maxwell, Scintif. Pap., Vol. I, p. 126—154.
5. J. C. Maxwell, Scintif. Pap., Vol. I, p. 119—125.
6. J. C. Maxwell, Scintif. Pap., Vol. I, p. 410—444.
7. J. C. Maxwell, Scintif. Pap., Vol. II, p. 267—279.
8. H. Grassmann, Zur Theorie der Farbenmischung, Gesam. Abh. Leipzig, 1902, B. II, 161—173.
9. H. Grassmann, Bemerkungen zur Theorie der Farbenmischung, Gesam. Abh. Leipzig, 1902, B. II, 213—221.
10. E. Schrödinger, Ann. d. Phys., **63**, 397—456, 481—620, 1920.
11. E. Schrödinger, Müller-Pouillet, Lehrb. d. Physik, 1926, B. II, 456—560.
12. Deane B. Judd, Bur. Stand. Journ. Res., **4**, 515—548, 1930.
13. Deane B. Judd, J. O. S. A., **23**, Nr. 10, 359—374, 1933.
14. J. Guild, Proc. Optic. Convention, V. I, 61—147, 1926.
15. J. Guild, Phil. Trans., **A 230**, 149—187, 1931.
16. W. D. Wright, Trans. Optic. Soc., **30**, 141—164, 1928—1929.
17. W. D. Wright, Trans. Optic. Soc., **31**, 201—218, 1929—1930.
18. Н. Д. Нюберг, Математические основы задачи измерения цвета, Статья в книге Н. Т. Федорова «Современное состояние колориметрии», ГТТИ, 1933, стр. 141—169.

Более подробные указания на литературу по вопросам колориметрии можно найти в книге Н. Т. Федорова «Современное состояние колориметрии», ГТТИ, 1933, а также в статье S. Rösch, Darstellung der Farbenlehre für die Zwecke des Mineralogen, Fortschr. e. Mineralog., Kristallogr. u. Petrogr., Bd. 13, 74—234, 1929, которая содержит около тысячи названий работ по колориметрии.
