

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ¹

Т. Карман

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Начнем с рассмотрения определения турбулентности, данного Тейлором: «Турбулентность есть нерегулярное движение, наблюдаемое в жидкостях и газах, когда они текут вдоль твердых поверхностей, или когда два слоя текут один по другому».

Ударение в этом определении лежит на слове «нерегулярное». Тейлор прибавляет далее: «Действительное движение обычно столь нерегулярно, что детали его мало известны».

Естественно возникает вопрос, почему же мы интересуемся столь нерегулярным явлением и какие у нас основания надеяться, что его изучение приведет к практическим результатам?

Но ведь турбулентность — далеко не единственное нерегулярное явление, которое физика пытается анализировать. Скорее можно утверждать, что регулярное движение встречается в природе как исключение. Даже ламинарное или струйное движение представляется регулярным только наблюдателю, рассматривающему мир молекул настолько издали и при помощи столь грубых инструментов, что он в состоянии видеть только усредненное движение материи и измерять только усредненные значения физических величин. Тогда только, несмотря на нерегулярный характер действительного движения, находит он простые отношения между усредненными физическими величинами и простые законы усредненного движения. Вместо слов «несмотря на нерегулярный характер» мы должны были бы сказать: «вследствие». Именно высокая степень нерегулярности, случайный характер молекулярных движений, и позволяет нам прилагать статистические методы и получать простые соотношения, не совершенно точные, но имеющие высокую степень приближения и удовлетворительные почти во всех случаях, за редкими исключениями.

Со времени исследований Рейнольдса мы знаем, что турбулентность есть статистическое явление. Выше было сказано, что турбулентность возникает при течении жидкости вдоль твердых поверхностей. Известно, что если жидкость обтекает тело, имеющее недостаточно «обтекаемую» форму, то за телом нередко возникают регулярные вихри. Осциллографируя скорость за телом, мы обнаруживаем периодические флуктуации ее, как это изображено на

¹ Journ. Roy. Aeron. Soc., 41, 1109, 1937. Перев. Н. Н. Андреева.

верхней части осциллограммы на рис. 1. Решетка в виде пчелиных сотов, изображенная на рис. 2, образует множество вихрей. По мере удаления от решетки вихри теряют свой регулярный характер, и осциллограммы в области нерегулярности также весьма нерегулярны (нижняя часть рис. 1). В этой области уже нет следов правильных систем вихрей, существовавших непосредственно за решеткой, нет и следов самой решетки. Перед нами равномерно распределенное вихревое движение; статистически в каждой точке этой области флюктуации скорости одни и те же, и их компоненты по разным направлениям имеют одинаковые значения. Для наблюдателя, движущегося вместе с усредненным потоком, все направления представляются равноценными. Такой тип потока имеет, как говорят, «изотропную турбулентность». В дальнейшем мы увидим, что это — простейший случай турбулентного движения.

Где бы в природе мы не наблюдали движения жидкости, мы всегда приходим к выводу, что струйное, т. е. не имеющее нерегулярностей, движение является редкостью; течение вод в реках, движения воздуха в атмосфере — движения турбулентного характера. Движения жидкостей, с которыми приходится встречаться инженеру, также в большинстве случаев турбулентны. Примерами ламинарного движения являются движения масла при смазке, воды или пара через малые отверстия и узкие трубки, потоки весьма вязких жидкостей, как, например, расплавленные металлы и стекло.

Естественно возникает вопрос, каков практический эффект наличия нерегулярности в движении; почему мы так интересуемся нерегулярным движением, налагающимся на среднее движение. Ответ в том, что наличие нерегулярного движения радикально изменяет порядок величины вязкого сопротивления, передачи теплоты и диффузии в жидкостях. Таким образом проблема турбулентности возникает практически во всех областях инженерного дела, в которых играют роль движения жидкостей, безразлично, является ли жидкость средой, в которой движется тело, или она сама движется внутри тех или иных неподвижных границ, или же в жидкости имеют место передача тепла, диффузия, смешение, растворение, испарение, сгорание и т. д.

2. МЕХАНИЗМ ДИФФУЗИИ

Влияние нерегулярного движения на трение может быть иллюстрировано следующим наглядным образом. Представим себе бойцов, марширующих по улице правильными параллельными колоннами. Если каждая колонна имеет один и тот же шаг, то порядок марша не нарушается. Представим теперь себе такое же количество людей, которые двигаются нерегулярно между бойцами, в среднем перемещаясь вместе с последними. Несомненно, если одна из колонн получит приказ опередить другие, это будет для нее затруднено наличием неправильно движущихся людей. В этом случае существует «внутреннее трение между колоннами». Прилагая эту картину к движению газа, состоящего из молекул, мы легко поймем процесс возникновения внутреннего трения между двумя слоями газа, сколь-

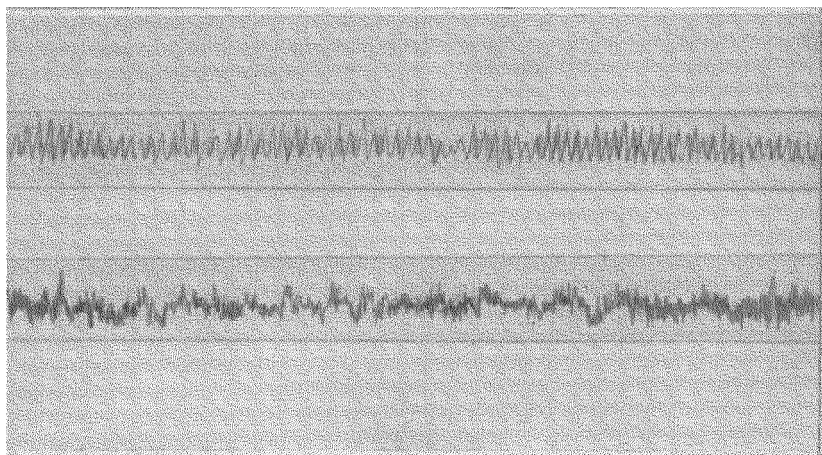


Рис. 1

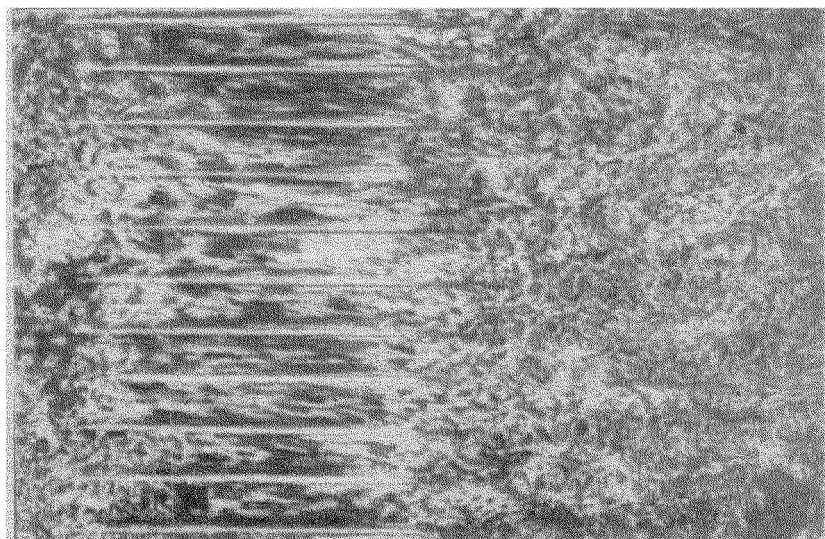


Рис. 2

злыми один по другому, так как молекулы из одного слоя будут проникать в соседние слои. Рассмотрим, однако, этот процесс проникания подробнее. Стремление к переходу молекулы из слоя в слой обусловлено наличием непрерывного молекулярного движения; столкновения между молекулами затрудняют этот переход. Проследим за судьбой некоторой группы молекул в одном из слоев; для простоты предположим, что молекулы движутся только перпендикулярно к слою. Эффект столкновения с другими молекулами мы подменим следующей схемой: все молекулы движется равными прыжками через разные промежутки времени, но пойдет ли данная молекула вправо или влево, обусловлено чистой случайностью. Если только в действительном состоянии газа столкновения случайны, то подобная схема довольно хорошо имитирует их.

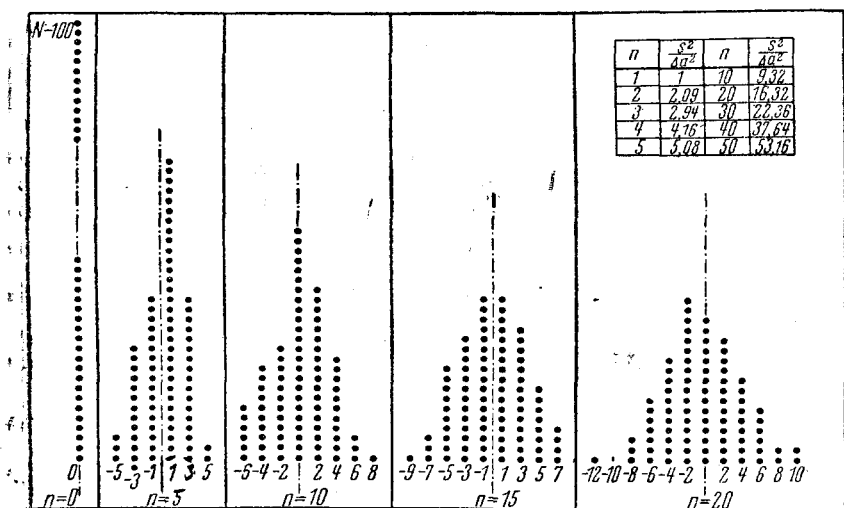


Рис. 3

Диаграмма на рис. 3 представляет распределение 100 молекул после некоторого числа прыжков и является результатом эксперимента: прыгнет ли молекула направо или налево, решалось метанием монеты. За меру диффузии молекул выберем среднее квадратов их расстояний от их начального положения за время $n \Delta t$, где Δt — промежуток времени между двумя последовательными прыжками, а n — число этих прыжков. Обозначим число молекул через N ; число молекул, прошедших на p прыжков в одном направлении, — через N_p ; наконец, длину одного прыжка — через Δa . Тогда среднее квадратов пройденных расстояний есть:

$$\overline{S^2} = \frac{(\Delta a)^2}{N} \sum_{p=-n}^{p=+n} N_p p^2. \quad (1)$$

Отношение $P_p = \frac{N_p}{N}$ называется вероятностью того, что некоторая молекула, совершив n прыжков, продвинется вперед на p прыжков. Теоретические значения P_p , точнее говоря, предельные значения для весьма больших N , даны в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1

n	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\Sigma P_p p^2$
1						$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$						1
2					$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$					2
3				$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$				3
4			$\frac{1}{16}$		$\frac{4}{16}$		$\frac{6}{16}$		$\frac{4}{16}$		$\frac{1}{16}$			4
5		$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{10}{32}$		$\frac{10}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$		5
6	$\frac{1}{64}$		$\frac{6}{64}$		$\frac{15}{64}$		$\frac{20}{64}$		$\frac{15}{64}$		$\frac{6}{64}$		$\frac{1}{64}$	6

Рис. 3 показывает, каковы значения $\frac{\overline{S^2}}{(\Delta a)^2}$, получающиеся из вышеописанного опыта. Мы видим, что для первых пяти прыжков экспериментальные значения этой величины равны приблизительно 1, 2, 3, 4, 5, как и указано в последнем столбце нашей таблицы. И действительно, в теории вероятностей доказывается, что если число молекул N и отношение $\frac{N}{n}$ велики, то $\frac{\overline{S^2}}{(\Delta a)^2}$ весьма близко к n , т. е. к числу прыжков. Отсюда $\overline{S^2} = \frac{(\Delta a)^2}{\Delta t} t$, т. е. приращение среднего квадратичного перемещения за единицу времени есть постоянная величина, равная

$$\frac{\overline{S^2}}{t} = \frac{\Delta a}{\Delta t} \Delta a. \quad (2)$$

В случае нерегулярного движения молекул газа формула эта может быть истолкована следующим образом: квадрат расстояния, пройденного в определенном направлении за единицу времени, пропорционален средней скорости молекул, в нашем случае $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ и длине пути между двумя столкновениями, т. е. Δa . Мы можем также сказать, что среднее квадратичное расстояние, пройденное за еди-

ницу времени, пропорционально квадрату среднего свободного пути, умноженному на число столкновений за единицу времени.

Величина $\frac{\bar{S}^2}{t}$, пропорциональная среднему свободному пути на среднюю скорость, есть мера смещения, и можно показать, что ламинарное трение, молекулярная теплопроводность и молекулярная диффузия пропорциональны этой величине.

В качестве первой иллюстрации рассмотрим два рода молекул, первоначально расположенных параллельными колоннами и так, что линия BC разделяет молекулы одного рода от молекул другого (рис. 4). Представим себе, что молекулы каждой колонны совершают прыжки по тому же закону, что и в предыдущем опыте, и подсчитаем число молекул, проникающих на чужую территорию за время t (подразумевается, что в счет идут только те молекулы, которые по истечении времени t окажутся на чужой территории).

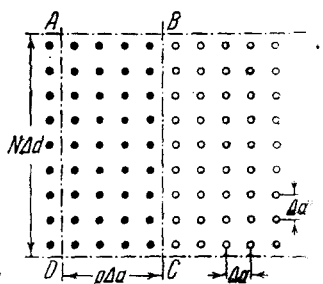


Рис. 4

Классификация молекул, которые по истечении времени $t = n\Delta t$ окажутся на чужой территории, может быть произведена следующим образом: те, которые прошли один прыжок, те, которые прошли два прыжка, и так далее, и, наконец, те, которые прошли n прыжков. Те молекулы, которые прошли p прыжков вперед и попали на чужую территорию, очевидно, были расположены в полосе фронта шириной $\rho\Delta a$. Если N обозначает число молекул, расположенных по фронту, то общее число молекул в полосе $ABCD$ есть pN_1 , а число тех, которые продвинулись на p прыжков, есть $P_p N$. Следовательно, полное число молекул, переселившихся на чужую территорию за время $n\Delta t$, есть $N \sum_{p=1}^n p P_p$. Расчет пока-

зывает, что для больших значений N величина эта пропорциональна $\sqrt{n}$, т. е. квадратному корню из протекшего времени. Отсюда следует, что доля переселенцев уменьшается пропорционально корню из времени. Нетрудно представить себе, что с течением времени полоса фронта населяется все более и более смешанным населением, так что дальнейшее переселение в обе стороны все меньше изменяет состав его. Говоря научным языком и называя процентное отношение одного сорта молекул к общему числу концентрацией, мы скажем, что концентрация убывает со временем, а следовательно, диффузия замедляется.

Рис. 5а, б, с, д, дают иллюстрацию этого процесса смешения. Рис. 5а изображает первоначальное распределение белых и черных молекул. На следующем рисунке процесс изображен упрощенно, в предположении, что каждая колонна движется через фронт как целое, но по закону случайности, определенному табл. 1. При

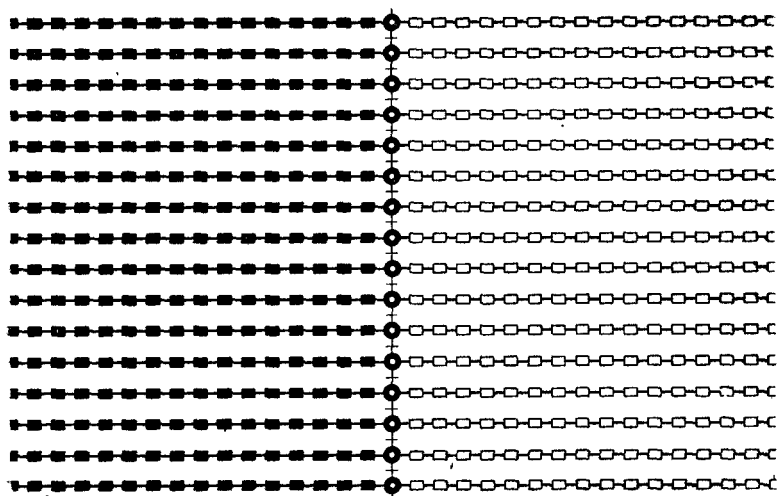


Рис. 5а

каждом прыжке колонна продвигается на 2 человека. Рис. 5*b* показывает расположение после трех прыжков, рис. 5*c* — после шести прыжков. На рис. 5*d* колонны переставлены так, чтобы было лучше видно получившееся распределение.

Для того чтобы найти дифференциальный закон диффузии, рассмотрим начальное состояние, в котором градиент концентрации постоянен, как это изображено на рис. 6. В этом случае достаточно рассматривать переселение молекул, расположенных в тре-

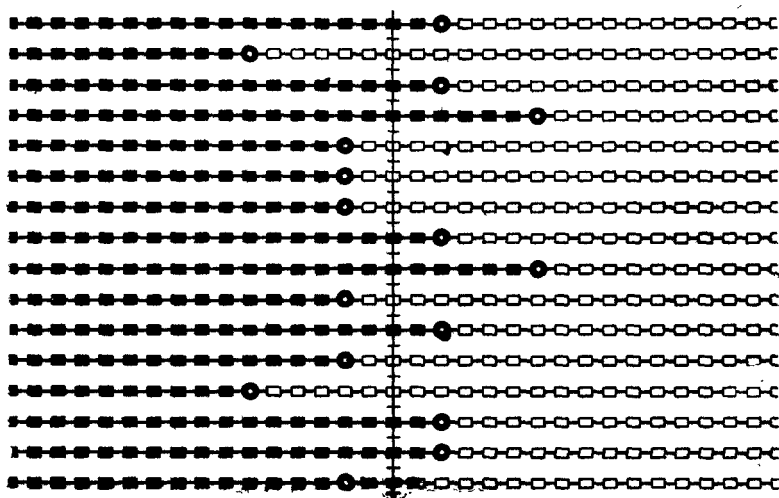


Рис. 5b

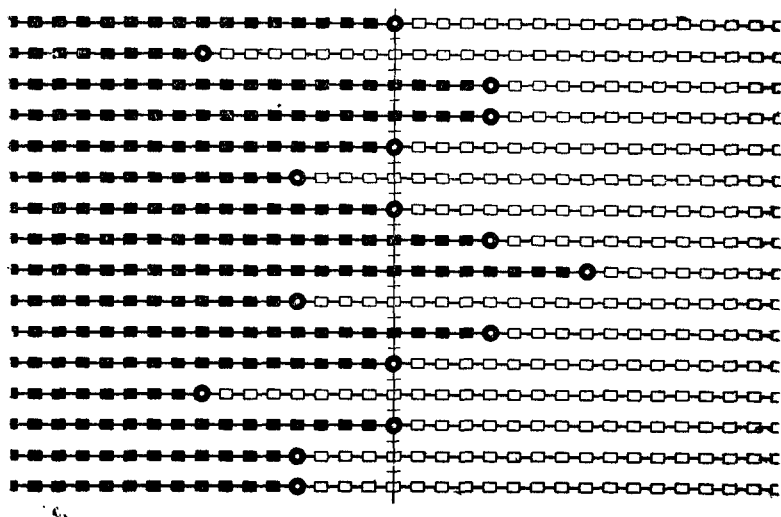


Рис. 5с

угольных пространствах, указанных на рисунке, так как это есть стационарное состояние, в котором переселение молекул в обе стороны взаимно уравнивается (расположение молекул на этом рисунке упорядочено в том же смысле, как это сделано на рис. 5).

Молекулы, переходящие через границу за время $t = n\Delta t$, могут быть и в этом случае классифицированы по числу прыжков, на которое они продвигаются за время $n\Delta t$.

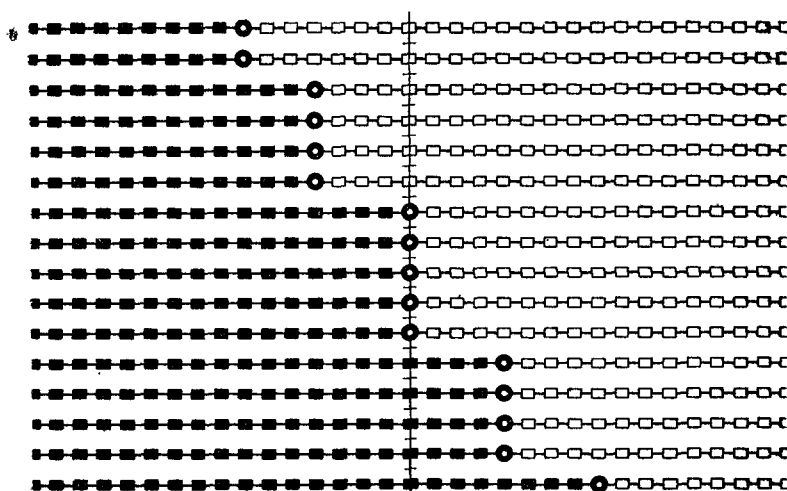


Рис. 5d

Из молекул, продвижение которых за это время есть $p \Delta a$, только те могут перейти границу, которые в момент $t = 0$ находились от нее ближе чем $p \Delta a$, т. е. те, которые расположены в треугольнике ABC . Если число N молекул одного рода возрастает на $\frac{dN}{da}$ от колонны к колонне, то площадь ABC равна $p^2 \Delta a \Delta b \frac{dN}{da}$ (где Δb есть среднее расстояние между молекулами одной колонны), а число молекул на этой площади есть $p^2 \frac{\Delta N}{\Delta a}$. Следовательно, полное число молекул, переходящих границу за время $n \Delta t$, равно $\frac{dN}{da} \sum_{p=1}^n p^2 P_p$. Но мы видели, что $\frac{\bar{S}^2}{(\Delta a)^2} = \sum_{p=1}^n p^2 P_p$. Поэтому число

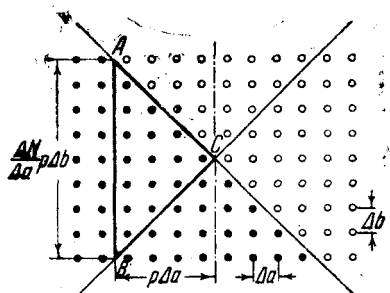


Рис. 6

молекул, переходящих границу за время t , равно $\frac{1}{2} \frac{\bar{S}^2}{(\Delta a)^2} \frac{dN}{da}$, а за единицу времени равно $\frac{1}{2} \frac{\bar{S}^2}{t (\Delta a)^2} \frac{dN}{da}$.

Распространяя наше рассуждение на объем и обозначив через N объемную плотность какой-нибудь физической величины, переносимой молекулами, находим, что поток этой величины через единицу поверхности равен $\frac{1}{2} \frac{\bar{S}^2}{t} \frac{dN}{dx}$.

параметр $\frac{1}{2} \frac{\bar{S}^2}{t}$ назовем коэффициентом диффузии или обмена.

Законы столкновения молекул реального газа, как, например, воздуха, много сложнее, чем вышеприведенные условия. Соответственно и различные коэффициенты обмена, как, например, коэффициент переноса количества движения (трения), теплопроводности, диффузии взвешенных частиц, численно не равны $\frac{\bar{S}^2}{2t}$, однако все же пропорциональны этой величине.

В случае молекулярного или ламинарного трения коэффициент обмена количеством движения есть не что иное, как коэффициент кинематической вязкости. Мы можем изложить результаты обсуждения наших двух примеров следующим образом. Везде, где процесс обмена начинается от прерывного распределения, как в первом примере, количество продиффундировавшего вещества пропорционально $\sqrt{t}$; там же, где, как во втором примере, мы имеем стационарное состояние, мерой переноса является величина $\frac{\bar{S}^2}{2t}$, умноженная на градиент переносимой величины.

Если бы теплопроводность и диффузия взвешенных частиц управлялись только молекулярным механизмом, для этих процессов

сохраняли бы силу подобные же законы. Но в случае турбулентного движения носители количества движения или тепла не так отчетливо определены, как в случае молекулярного механизма. Однако мы все же в состоянии вычислить соответственные коэффициенты обмена из наблюдений коэффициентов турбулентного трения турбулентной теплопроводности, турбулентной диффузии и исходом из предположения, что эти коэффициенты являются мерой среднего квадратичного расстояния, проходимого жидкими массами, например вихрями, являющимися переносчиками интересующих нас величин в турбулентном обмене.

Рассмотрим, например, тензор напряжения, равный количеству движения, переносимому через единицу площади в единицу времени; интересующая нас компонента $\tau = \epsilon \frac{\partial(\rho u)}{\partial y}$, где u — средняя скорость, y — координата, перпендикулярная к u , ρ — плотность жидкости. Величину ϵ назовем коэффициентом турбулентного обмена и отождествим ее с $\frac{\overline{S^2}}{2t}$, где S есть проходимое вихрями расстояние, или степень их взаимного проникновения. Как увидим ниже, вследствие больших размеров объектов, определяющих турбулентный обмен, законы последнего более сложны, чем законы молекулярного обмена, и вообще говоря, $\frac{\overline{S^2}}{2t}$ не только меняется от явления к явлению, но и в одном и том же явлении не сохраняется неизменным. Тем не менее введение коэффициента турбулентного обмена весьма облегчает общее понимание явления.

3. ПРИМЕРЫ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА

Первым результатом в этой области является тот факт, что коэффициент турбулентного обмена во всех случаях, за исключением непосредственной близости стенок, значительно более высокого порядка, чем коэффициент молекулярного обмена.

Достаточно немногих примеров, чтобы показать, как велика разница этих двух коэффициентов обмена.

В качестве первого примера рассмотрим точечный источник газа. Пусть, например, этот газ несет с собой тепло или взвешенные частицы — дым. Количество тепла или дыма, испускаемое в единицу времени, пусть будет постоянным; величину диффузии на некотором расстоянии от источника будем измерять сечением, через которое проходит, скажем, 90% истекающей величины; пусть, наконец, скорость истечения есть 30 фут. в 1 сек. В случае ламинарной диффузии радиус сечения струи, содержащей 90% общего количества подаваемого струей тепла или дыма (тяжестью частиц дыма пренебрегаем), будет $\frac{1}{2}$ дм. на расстоянии 30 фут. и 5 дм. на расстоянии 3 000 фут. Но при малейшей турбулентности струи тепло и дым будут рассеиваться гораздо быстрее, чем дают эти цифры. Облако дыма, получающееся от взрыва снаряда, является другим таким примером. Считая взрывающийся снаряд точечным

источником и измеряя диаметр видимой части газового клуба, мы можем определить среднее квадратичное расстояние, проходимое частицами, выброшенными из центра. Рис. 7 дает значения $\overline{S^2}$ в зависимости от времени, полученные из опыта. Пунктирная же линия указывает $\overline{S^2}$ в функции времени для молекулярной диффузии, причем шкала ординат увеличена в 10 000 раз.

Ясно, что только турбулентный характер движения воды в реке

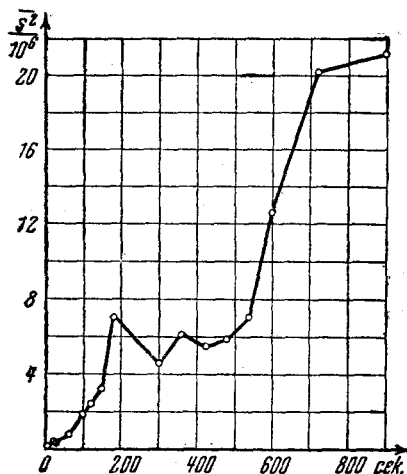


Рис. 7а

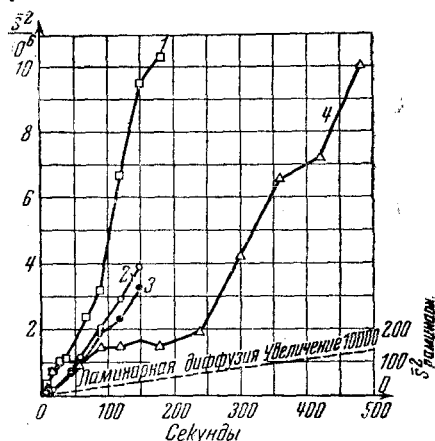


Рис. 7б

или воздуха при ветре и обусловливает перемещение в реке ила, а в воздухе — облаков пыли. Пусть a есть средний диаметр частиц ила; мы можем оценить, исходя из предположения о величине коэффициента турбулентного обмена, как далеко будут перенесены частицы пыли, поднятые ветром [рис. 8 и 9 представляют фотографии пыльных бурь, сделанные Soil Conservation Service (Организация для борьбы с разрушением почвы)]. Известно, что скорость падения малых шаровых частиц хорошо передается законом Стокса

$$w = \frac{2}{9} \eta \frac{a^2 g}{\nu}, \quad (3)$$

где $\eta = \frac{\rho_s - \rho_a}{\rho_a}$, а ρ_s и ρ_a — соответственно, плотности твердых частиц и воздуха. С другой стороны, среднее квадратичное расстояние, на которое перенесутся частицы за время t вследствие турбулентности, определяется коэффициентом турбулентного обмена по формуле

$$h = \sqrt{\overline{Z^2}} = 2\epsilon t. \quad (4)$$

Положив $h = \omega t$, находим

$$t = \frac{2\epsilon}{w^2} = \frac{81 \nu^2}{2\eta^2 g^2 a^4}, \quad (5)$$

и эта формула дает нам оценку времени, в течение которого частицы остаются взвешенными в воздухе. Отсюда, обозначив через U среднюю скорость ветра, находим и расстояние переноса

$$l = Ut \sim \frac{40 \varepsilon v^2 U}{\eta^2 g^2 l^4}. \quad (6)$$



Рис 8

Коэффициент турбулентного обмена изменяется в широких пределах в зависимости от силы и структуры ветра. Нижеследующие вычисления были сделаны в предположении $\varepsilon = 10^4$ и $\varepsilon = 10^5$. Значение ε для ветров средней силы лежит именно в этих пределах,

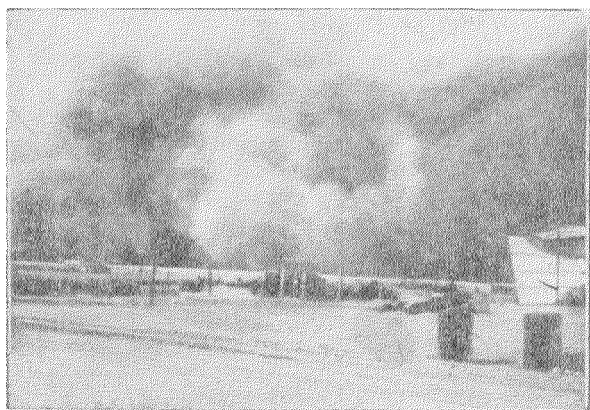


Рис. 9

за исключением первых нескольких футов над поверхностью земли, где ϵ убавляется с высотой (т бл. 2).

ТАБЛИЦА 2

Диаметр частиц в мм	Скорость падения см в 1 сек.	Время полета	Расстояние в милях при ветре 15 м/сек.	Максимальный подъем
0,001	0,00824	9—90 лет	2,5—25·10 ⁸ миль	3,8—38 миль
0,01	0,824	8—80 час.	250—2 500 миль	200—2 000 фут.
0,1	82,4	0,3—3 сек.	150—1,500 фут.	2—20 фут.
1,0	8,240	0,0003—0,003 сек.	0,2—2 дюйм.	0,3—3 дюйм.

Цифры последней строки имеют только академический интерес, так как для таких больших частиц закон Стокса уже теряет силу. Сомнительны и цифры первой строки, хотя бы потому, что ν принято независимым от высоты. Тем не менее табл. 2 дает яркое представление о том, как сильно меняется время полета в зависимости от изменения величины частиц. Этим объясняется, почему величина частиц, находимых в пыльных бурях, лежит в относительно узких пределах. Но малые частицы остаются взвешенными весьма долгое время, отличным примером чему является известный факт, что частицы золы, выброшенные при извержении вулкана Кракатоа, оставались в высоких слоях атмосферы долгие годы и были занесены даже в Англию и Арктику.

4. КОГДА ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ДЕЙСТВУЕТ ВО ВРЕД АВИАИНЖЕНЕРУ?

Поверхностное трение является, пожалуй, самым важным фактором, ограничивающим скорость современного аэроплана. Некоторые типы современных крыльев аэродинамически настолько совершенны, что не менее 60% их лобового сопротивления обусловлено поверхностным трением. Тот факт, что сопротивление воздуха вызывается поверхностным трением и инерционным сопротивлением среды (современное название его «сопротивление формы»), был известен еще Ньютону. Из соображений размерности он показал, что сопротивление поверхностного трения пропорционально первой степени скорости, тогда как инерционная часть сопротивления пропорциональна второй степени ее. Экспериментальные исследования поверхностного трения относятся к 18-му столетию. Бофуа первый произвел измерения трения у плоских поверхностей; систематические измерения Фроуда хорошо известны. Что характеристическим параметром проблемы является число Рейнольдса (скорость потока на

ширину пластинки, деленная на кинематический коэффициент вязкости), было указано лордом Релеем. Теоретическое же объяснение механизма поверхностного трения относится к сравнительно новому времени. Наше современное представление о поверхностном трении согласно с ньютоновским в отношении закона, им управляющего: для данного по форме потока трение действительно пропорционально скорости. Но сама форма потока около тела не зависит от скорости, только пока силы инерции малы по сравнению с силами вязкости, т. е. только в случае малых чисел Рейнольдса. В этом случае закон Стокса правильно определяет силу сопротивления. Когда же силами инерции пренебрегать нельзя, картина потока резко меняется. Представим себе, например, плоскую пластинку, стоящую по направлению потока, скорость которого в отсутствие пластинки предполагается повсюду постоянной по величине и направлению. Мы знаем, что действие сил вязкости сосредоточивается только в области, близкой к пластинке, в так называемом пограничном слое. Согласно известному закону механики потеря количества движения в пограничном слое равна силе вязкого сопротивления. Обозначим через U скорость потока относительно пластинки, через δ — толщину пограничного слоя; тогда сила сопротивления, действующая на единицу ширины пластинки (считая ширину в направлении потока), равна

$$F = \alpha \rho \delta U^2,$$

где ρ — плотность жидкости и α — коэффициент, зависящий от распределения скорости в пограничном слое. Если в пограничном слое течение ламинарно, то сила трения на единицу длины пропорциональна градиенту скорости перпендикулярно пластинке и равна $\frac{\beta \mu U}{\delta}$, где β — новый коэффициент вязкости. Следовательно,

$$F = \beta \mu U \int_0^x \frac{dx}{\delta}. \quad (7)$$

Из сравнения этих двух выражений следует, что

$$\alpha U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} = \beta \nu \frac{U}{\delta}$$

или

$$\delta^2 = 2 \frac{\beta}{\alpha} \nu \frac{x}{U}. \quad (8)$$

С увеличением скорости поток «прижимается» к пластинке. Сила сопротивления пропорциональна $U^{\frac{3}{2}}$ и $\sqrt{\rho \mu}$, что указывает на зависимость поверхностного трения не только от сил вязкости, или сил инерции, но от обоих. Приняв во внимание, что $\frac{x}{U}$ есть время t , в течение которого поток проходит по пластинке от передней кромки до места x , мы можем написать уравнение (8) в виде

$\frac{\partial^2}{f} = \nu \cdot \text{const.}$ [Здесь ярко выступает аналогия с основным законом молекулярной диффузии, рассмотренным в § 1, а следовательно, толщина пограничного слоя может быть рассматриваема как мера проникновения действия поверхностного трения внутрь невозмущенного потока.

Читатель, знакомый с обычной теорией пограничного слоя, легко обнаружит здесь основные результаты этой теории. Определив значение коэффициентов формы α и β , теория приводит к выражению коэффициента, стоящего в выражении

$$F = C_f \frac{\rho U^2}{2},$$

в виде

$$C_f = 1,33 \sqrt{R_x}, \quad (9)$$

где $R_x = \frac{U_x}{\nu}$. Для крыльев современных аэропланов число Рейнольдса около $25 \cdot 10^6$. Следовательно, коэффициент поверхностного трения у таких поверхностей есть

$$C_f = 0,00053,$$

если только турбулентность не входит в игру. Но для того же числа Рейнольдса действительное значение C_f , определяемое наличием турбулентности, есть $C_f = 0,0025$.

Теория, которая лежит в основе нашего современного знания турбулентного трения, далеко не так разработана, как теория ламинарного трения.

Мы определяем перенос количества движения через плоскость, параллельную вектору средней скорости, как компоненту тензора напряжения, вызванного турбулентным трением; его математическое выражение есть — $\rho \overline{uv}$, где $\overline{uv}$ — среднее произведения компоненты скорости по направлению потока на компоненту скорости, нормальной к вышеупомянутой плоскости. Отсюда компонента полного тензора трения есть

$$\tau = \mu \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \rho \overline{uv}. \quad (10)$$

Вводя сюда коэффициент турбулентного обмена, имеем

$$\tau = \nu + \epsilon \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}. \quad (11)$$

Полная теория турбулентного трения должна была бы дать как распределение флуктуаций скорости, так и распределение средней скорости, или, что в сущности то же самое, величину и распределение коэффициента турбулентного обмена ϵ . Нет еще ни одной настолько развитой теории, которая могла бы дать это, не прибегая к произвольным и иногда неудовлетворительным гипотезам. Однако нижеследующие факты представляются достаточно надежно установленными совместным применением экспериментальных и теоре-

О П Е Ч А Т К А
по вине переводчика

стр.	строка	напечатано	следует читать
33	28 сверху	где β — новый коэффициент вязкости.	где β — новый коэффициент, а μ — коэффициент вязкости.

тических — по большей части из теории размерностей — положений. Прежде всего, мы рассмотрим случай совершенно гладких плоских поверхностей:

а) В непосредственной близости стены ламинарное трение значительно перевешивает турбулентное; здесь

$$\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \gg -\rho uv.$$

Мы будем называть этот слой ламинарным подслоем. Его толщина δ_i находится из соотношения $\frac{\delta_i}{\nu} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \text{const}$, где τ — трение на единицу площади, действующее на стену. Обозначив скорость при $y = \delta_i$ через U^* , мы можем приближенно положить

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{U^*}{\delta_i},$$

поэтому число Рейнольдса в подслое есть $R_1 = \frac{U^* \delta_i}{\nu}$ и постоянно по длине пластинки; значит, оно является характеристическим числом для ламинарного подслоя. Значение его $R \sim 200 - 300$.

б) За ламинарным подслоем следует переходная область некоторой толщины, за пределами которой коэффициент турбулентного обмена пропорционален расстоянию от стены. Следовательно, градиент средней скорости $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ обратно пропорционален расстоянию от стены. Из опыта мы находим

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{k} y \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \quad (12)$$

где k — универсальная постоянная, близкая к 0,4. Проинтегрировав (12), находим распределение средней скорости

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \left[A + \frac{1}{k} \lg \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \right]. \quad (13)$$

Сравнивая (12) с (11), видим, что физический смысл (12) заключается в том, что коэффициент турбулентного обмена возрастает с расстоянием от стены. В самом деле, $\varepsilon = ky \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$.

Уравнение (12) имеет силу в области, где изменения τ малы. Но с возрастающим y τ убывает и обращается практически в нуль на внешней границе пограничного слоя. В настоящее время еще не существует теории, которая позволила бы нам вычислить распределение $\bar{u}$ во внешней части пограничного слоя¹.

с) К счастью, уравнения (12) и (13) достаточны для вычисления коэффициента поверхностного трения, а также для вычисления

¹ Попытку в этом направлении делает Howarth, Proc. Roy. Soc. A. 154, p. 364, 1936.

приближенной толщины пограничного слоя в функции числа Рейнольдса. Так как теория турбулентного поверхностного трения, основанная на (12) и (13), была подробно разработана в ряде монографий за последние годы, достаточно изложить полученные результаты. Коэффициент полного поверхностного трения дается формулой

$$\frac{0,242}{\sqrt{C_f}} = \lg(RC_f), \quad (14)$$

где $R = \frac{Ul}{\nu}$ (l — протяжение потока по его направлению). Коэффициент местного поверхностного трения (на единицу длины на расстоянии x от передней кромки пластинки) получается из (14)

$$c_f = \frac{C_f}{1 + 0,36\sqrt{C_f}}, \quad (15)$$

где C_f — величина, получающаяся из (14), в предположении $R = \frac{Ux}{\nu}$; толщина пограничного слоя легко вычисляется из знания c_f

$$\delta = 0,38 x \sqrt{c_f}.$$

Величина c_f слабо убывает с x ; поэтому толщина турбулентного пограничного слоя вырастает почти пропорционально x , тогда как толщина ламинарного пограничного слоя растет пропорционально $\sqrt{x}$.

Формула (14) впервые дана автором этих строк; постоянная в этой формуле была вычислена Шенгерром (Schönherr). Шлихтинг (Schlichting) нашел, что эмпирическая формула

$$C_f = \frac{0,455}{(\lg R)^{2,58}} \quad (16)$$

хорошо заменяет (14) во всей области практически важных чисел Рейнольдса. Ее преимущество — в явной зависимости C_f от числа Рейнольдса.

Результаты, изложенные в пунктах а), б) и с), полезны при различных расчетах и в особенности при экстраполяции по данным испытаний в аэродинамических трубах. Если, например, известна доля поверхностного трения в полном сопротивлении, уменьшение последнего, зависящее от числа Рейнольдса, может быть оценено по формуле, приведенной выше. Правда, есть еще и неучтенные до сих пор факторы, действующие вместе с уже известными, и чтобы дать верную картину всего нашего знания о поверхностном трении, об этом следует упомянуть.

Полное сопротивление трения у гладких поверхностей состоит из трения в передней части поверхности, где пограничный слой

ламинарен, и трения в задней, где мы имеем дело с турбулентным пограничным слоем. Если $R = \frac{Ul}{\nu}$ (где l — полная ширина поверхности в направлении потока) велико, то можно пренебречь трением в ламинарной части слоя. Для меньших значений ($10^5 < R < 10^6$) оба сопротивления одного порядка, и, выражая сопротивление в функции числа Рейнольдса, мы встретим так называемую переходную область, в которой коэффициент сопротивления, выражаемый кривой (9), переходит в коэффициент, выражаемый (14). Правда.

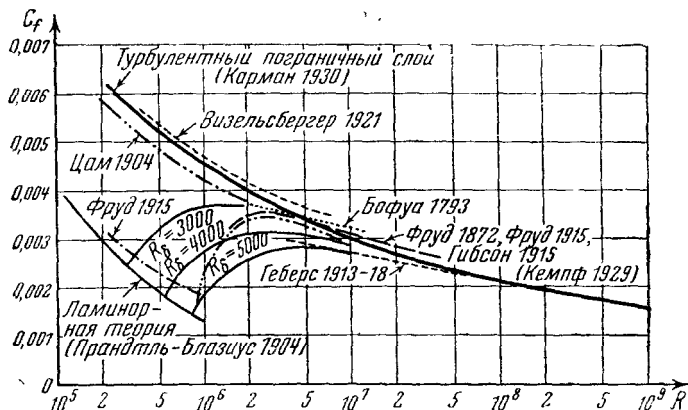


Рис. 10

переход от ламинарного к турбулентному сопротивлению не во всех случаях совершается в области одних и тех же чисел Рейнольдса, но весьма зависит от формы передней кромки, иначе говоря, от характера набегающего потока, и в особенности от степени турбулентности последнего. Обычно получают из опыта не одну переходную кривую, но целое семейство их (рис. 10). Именно такие эксперименты, проведенные в последние годы для весьма больших чисел Рейнольдса, выяснили полную картину этого перехода. В прежних же опытах кривые переходной области казались запутанными и противоречивыми.

Для авиаинженера отсюда вытекает важный практический вывод: измерения лобового сопротивления имеют малую ценность, если модели или скорости в аэродинамической трубе настолько малы, что число Рейнольдса попадает в переходную область, — потому, что величина поверхностного трения в этом случае сильно зависит от степени турбулентности потока в аэродинамической трубе.

Величина турбулентного трения у гладкой пластинки является нижним пределом возможного лобового сопротивления самолета и представляет в настоящее время главное препятствие к увеличению скорости полета. Естественно возникает вопрос, нет ли какого-нибудь способа «обойти природу» и каким-нибудь хитрым способом уменьшить поверхностное трение. Едва ли осуществимо, однако,

стабилизировать пограничный слой для тех чисел Рейнольдса, которые относятся к современным самолетам. Тем не менее, может быть удастся предупредить переход поверхностного слоя в нестабильное состояние, убирая с поверхности излишний воздух. Количество подлежащего уборке воздуха приблизительно определяется через

$C_1 S \frac{U}{2}$, где C_1 — величина коэффициента ламинарного трения, которое надлежит поддерживать соответственным приемом, а S — поверхность, на которой это надлежит сделать.

Если считать, что C_1 тождественно с коэффициентом местного ламинарного трения до перехода последнего в турбулентное, то можно положить C_1 равным 0,00115—0,002. До сих пор не опубликовано еще никаких практических результатов в этом направлении.

Следующий вопрос, насколько сможем мы приблизиться к пределу сопротивления, даваемому гладкой пластинкой. Здесь мы встречаемся с проблемой шероховатости. Подводя итоги исследованиям последнего времени по этому вопросу, мы можем сказать с достоверностью следующее:

а) Повидимому, влияние шероховатости на поверхностное трение незначительно ниже некоторого значения числа Рейнольдса. Физической причиной такого поведения шероховатой поверхности является, повидимому, то обстоятельство, что элементы шероховатости в этом случае малы по сравнению с толщиной ламинарного подслоя.¹ Уже было сказано, что толщина последнего задается соотношением:

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot \frac{\delta_1}{\nu} = \text{const},$$
 а так как трение возрастает с числом

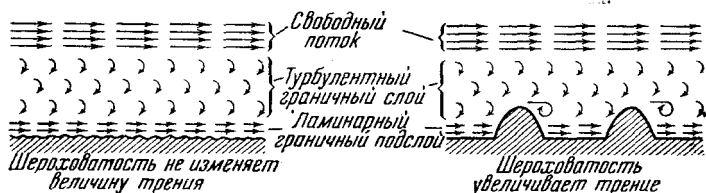


Рис. 11

Рейнольдса, то δ_1 при росте числа Рейнольдса убывает. Таким образом с возрастанием числа Рейнольдса элементы неровности поднимаются из ламинарного подслоя на подобие гор, поднимающихся из тумана по мере того, как он оседает (рис. 11).

б) Когда высота элементов неровности велика по сравнению с толщиной ламинарного подслоя, поверхностное трение, повиди-

¹ Это подтверждается исследованием Гольдштейна, Рер. а. Мет. 1763. Он обнаружил, что соотношение: $\frac{\nu h \sqrt{\tau}}{\rho} > \sqrt{R_c}$ есть условие того, что элемент неровности высотой h не оказывает влияния на главный поток. R_c здесь порядка 30—50.

тому, определяется фронтальным сопротивлением этих элементов; соответственно этому само поверхностное трение при числах Рейнольдса выше известного предела становится пропорциональным квадрату относительной скорости среды и движущегося в ней твердого тела. Этот предельный случай был изучен многими исследователями: в частности измерялась потеря давления в аэродинамических трубах постоянного сечения и при искусственной шероховатости стенок. Было найдено, что при постоянной степени шероховатости (для одних и тех же стенок) коэффициент поверхностного трения пропорционален логарифму так называемой относительной шероховатости, т. е. отношению высоты элементов шероховатости к радиусу трубы. Коэффициент поверхностного трения определяется уравнением

$$\frac{2}{\sqrt{C_f}} = A + \frac{1}{k} \lg \frac{r}{h}, \quad (17)$$

откуда

$$C_f = \frac{4}{\left(A + \frac{1}{k} \lg \frac{r}{h}\right)^2} \quad (18)$$

(r — линейный размер, например гидравлический радиус трубы, h — высота элементов неровности). Уравнение (17) дано впервые автором в 1929 г. Постоянная k весьма близка к константе, обозначенной той же буквой в уравнении (13) для распределения скорости. Уравнение (17) делает возможным установление шкалы шероховатости. Очевидно, установив h произвольно для какого-нибудь шероховатого предмета, например для шкурки определенного номера, и измерив коэффициент поверхностного трения в трубе, обложенной этой шкуркой, мы можем определить по уравнению (17) величину h для поверхности любого вида.

Из вышеизложенного можно сделать несколько важных заключений. Во-первых, становится возможным оценить для данной скорости и данных размеров толщину ламинарного пограничного подслоя и подсчитать верхний предел допустимой шероховатости, т. е. определить пределы шероховатости, при которых она не влияет заметно на величину поверхностного трения. Следует иметь в виду, что для относительной шероховатости толщина пограничного слоя играет ту же роль, что радиус трубы с шероховатыми стенками.

Отсюда следует, что поскольку коэффициент поверхностного трения есть функция относительной шероховатости, одна и та же шероховатость будет оказывать большее влияние вблизи передней кромки, где пограничный слой тонок, чем в задней части крыла, где толщина пограничного слоя значительна.

Теоретическое предсказание величины поверхностного трения у поверхности, имеющей определенную шероховатость, довольно затруднительно, и трудность лежит в переменности относительной шероховатости по длине поверхности, что в свою очередь вызвано переменной толщиной пограничного слоя. Значит, необходимо опре-

делить нарастание его толщины, чтобы иметь возможность использовать формулу (17) для расчета, интегрируя по поверхности в направлении потока.

Кроме того имеется еще одна неопределенность, обусловленная следующим. Уравнение (17) верно для больших чисел Рейнольдса. Но в пограничном слое число Рейнольдса изменяется от нуля, начиная от передней кромки, и, таким образом, мы имеем дело со всем диапазоном чисел Рейнольдса по мере утолщения пограничного слоя вдоль по потоку, в особенности в переходной области, где высота элементов шероховатости и толщина ламинарного подслоя одного порядка. Выражая коэффициент поверхностного трения в функции числа Рейнольдса, мы получаем семейство подобных кривых для геометрически подобных форм шероховатости; если же геометрически формы элементов шероховатости различны, то различны и кривые. Например они зависят от отношения между высотой и расстоянием элементов шероховатости, т. е., от «относительной длины волны» шероховатости. Кривые поверхностного трения, получаемые для так называемых «волнистых» поверхностей, т. е. таких, у которых высота элементов мала по сравнению с их расстоянием, совсем иного вида, чем кривые для поверхностей с «острыми» элементами шероховатости. Здесь открывается большое поле для новых экспериментальных и теоретических исследований.

Много обещает для прояснения этого вопроса прямое измерение лобового сопротивления в полете, произведенное германскими исследователями и разработанное до высокой степени точности Джонсом в Англии. Оно является полезным дополнением к опытам в аэродинамических трубах, в особенности в трубах с сжатым воздухом.

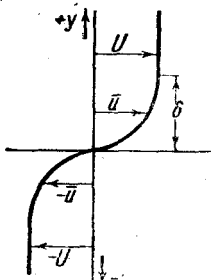


Рис. 12

Подводя итоги всему вышесказанному, мы принуждены установить, что при современном состоянии наших знаний определение по опытам в аэродинамических трубах действительного сопротивления трения крыльев и других частей самолета не свободно от произвола, в особенности по причине недостаточности наших знаний в вопросе о шероховатости.

До сих пор мы рассматривали турбулентное трение жидкости, движущейся по твердому телу. Необходимо теперь остановиться на вопросе о турбулентном трении между двумя жидкими слоями. Для этого случая Прандтль вводит термин «свободная турбулентность». Рассмотрим только простейший случай. Пусть в момент $t=0$ две массы воздуха, соприкасающиеся по плоскости $y=0$, начинают равномерно двигаться одна по другой, причем при $y>0$ начальная скорость движения есть $+U$, а для $y<0$ начальная скорость есть $-U$ (рис. 12). Предположим сначала, что поток ламинарен. Нетрудно найти точное математическое решение для этого случая; но главные результаты мы можем получить из следующего простого рассуждения.

Введем снова толщину ламинарного слоя, которую определим соотношением

$$\delta = \frac{1}{U} \int_0^{\infty} (U - \bar{u}) dy.$$

Тогда, как легко видеть, закон количеств движения дает выражение для силы трения через U и δ , а закон энергии определяет δ в функции времени. Обозначив τ_0 срезающее напряжение при $y=0$, можем из закона количеств движения найти выражение

$$\tau_0 = \alpha \rho U \frac{\partial \delta}{\partial t}, \quad (19)$$

где α — численный коэффициент формы. Закон энергии говорит, что потеря кинетической энергии равна работе сил трения. Очевидно, эта потеря энергии выражается через $\beta \rho U^2 \delta$, а работа сил трения

есть $\gamma \mu \int_0^t \frac{U^2}{\delta^2} \delta dt$, где β и γ — безразмерные коэффициенты. Отсюда по теореме энергии находим

$$\frac{\beta}{\gamma} \delta = \nu \int_0^t \frac{dt}{\delta} \quad (20)$$

или

$$\delta^2 = \text{const} \cdot \nu t. \quad (21)$$

Подобные же результаты находим мы для стационарного пограничного слоя вдоль по пластинке.

Обратимся теперь к случаю турбулентности. За исключением самого начала движения, силы ламинарного трения малы по сравнению с силами турбулентного трения. Это означает, что потеря кинетической энергии усредненного потока происходит за счет увеличения кинетической энергии флуктуаций. Значит, введя обозначение

$$\frac{1}{2} q^2 = \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

для средней скорости турбулентных флуктуаций, мы получим

$$\int_0^{\delta} \frac{\rho}{2} (U^2 - \bar{u}^2) dy = \frac{\rho}{2} \int_0^{\delta} q^2 dy. \quad (22)$$

С другой стороны, потеря количества движения за время t равна импульсу силы трения τ_0 , действующей при $y=0$. Отсюда

$$\rho \int_0^{\delta} (U - \bar{u}) dy = \int_0^t \tau_0 dt. \quad (23)$$

Внося и сюда численные коэффициенты формы, можем написать уравнение (22) так:

$$\alpha \rho U^2 = \beta \rho q_0^2, \quad (24)$$

где q_0 — значение q при $y=0$, и уравнение (23) принимает вид

$$\gamma \rho U \delta = \int_0^t \tau_0 dt. \quad (25)$$

Отсюда находим дифференцированием

$$\tau_0 = \gamma \rho U \frac{\partial \delta}{\partial t}. \quad (26)$$

Но τ_0 есть компонент тензора турбулентного трения и равен $-\rho \overline{uv}$.

Обозначив через K_1 среднее значение $\frac{\overline{uv}}{q^2}$ (так называемый фактор корреляции компонент u и v), мы можем написать

$$\tau_0 = K_1 \rho q_0^2.$$

Можно предположить, что K_1 не зависит от времени. Тогда мы получаем из уравнения (24)

$$\tau_0 = \frac{\alpha}{\beta} K_1 \rho U^2, \quad (27)$$

а используя (26), находим

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\alpha \gamma}{\beta} K_1 U. \quad (28)$$

Физическое истолкование этих уравнений состоит в том, что область перехода распространяется с постоянной скоростью, пропорциональной начальной скорости относительного движения верхней и нижней масс жидкости. Турбулентное же трение между этими массами пропорционально квадрату их относительной скорости. Замечательно, что коэффициент трения жидкости по жидкости есть определенная постоянная величина, тогда как коэффициент трения жидкости по твердой гладкой стенке есть функция числа Рейнольдса и стремится к нулю, когда $R \rightarrow \infty$. Численное значение этого трения жидкости представляет немалый интерес. Для нестационарного случая, рассмотренного нами до сих пор, у нас нет еще достаточных опытных данных. Во всяком случае эти результаты могут быть перенесены на случай стационарного трения двух масс жидкости, имеющих конечную разность скоростей по поверхности их соприкосновения. Если процесс турбулентного смешения начинается при $x=0$, то мы находим, что длина области смешения пропорциональна x (подобно тому, как в нестационарном случае мы имеем пропорциональность t). Этот случай изучен экспериментально; коэффициент трения при $\rho \frac{U^2}{2}$ (U — относительная скорость обоих по-

токов) — порядка $C_f = 0,02$. Такой же коэффициент трения имела бы весьма шероховатая поверхность. Таким образом мы видим, что вообще говоря, трение жидкости по жидкости больше, чем трение жидкости по твердому телу (рис. 13). Этим объясняется хорошо известный парадокс, что цилиндрическое твердое тело, плывущее по реке так, что его ось параллельна направлению потока, имеет скорость большую, чем сам поток. Объяснение — в том, что если заменить твердый цилиндр жидким, то турбулентное трение возросло бы.

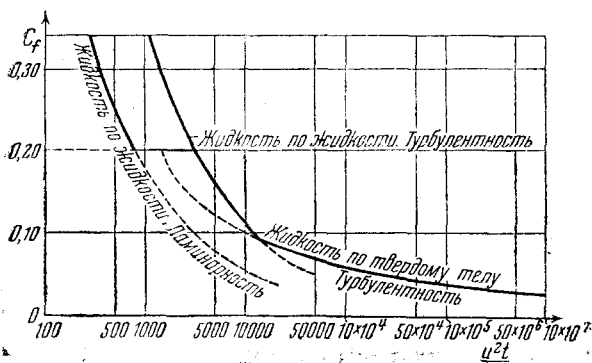


Рис. 13

С трением жидкости по жидкости мы имеем дело во многих практически важных случаях. Вопрос о постепенном ослабевании потока, образуемого пропеллером, расширении струи жидкости, вырывающейся в жидкость, затухании вихрей, образовавшихся за движущимся телом, — явления этого типа. Прандтль, Толлмин, Шлихтинг и др. дали полуэмпирическую теорию этих случаев, основанную на переносе количества движения. Тэйлор и Маттеоли также рассматривали некоторые подобные случаи, исходя из иных взглядов на проблему турбулентности. По мнению автора этой статьи, удовлетворительное решение может быть получено только из рассмотрения обмена всех входящих в игру механических величин: количества движения, энергий и вихрей. Вышенамеченное простое рассмотрение размерностей может послужить основой более полной теории.

Б. КОГДА ТУРБУЛЕНТНОСТЬ СЛУЖИТ НА ПОЛЬЗУ АВИАИНЖЕНЕРУ

Хотя турбулентность и представляет нежелательную добавку к поверхностному трению, но не следует забывать, что струйное обтекание практически невозможно без неустойчивости ламинарного движения. Представление о пограничном слое внесло ясность в две проблемы. Оно сделало понятным механизм поверхностного трения, механизм отделения вихрей и образование вихревой области за телом. Лорд Релей рассматривал сопротивление формы пластин-

ки, исходя из теории разрывного потенциального движения, развитой Кирхгоффом и Гельмгольцем. В немногих случаях, которые удалось исследовать при помощи этой теории, образование вихревой области за телом объяснялось из наличия острых углов. Однако, круговой или эллиптический цилиндр не имеют острых углов, а тем не менее отслоение существует. Теория поверхностного слоя объясняла это, исходя из наличия обратного градиента давления. Но известно, что ламинарный пограничный слой имеет столь малое сопротивление по сравнению с обратным градиентом давления, что только для сечений весьма малой относительной толщины можно использовать выгоды струйного течения. Как было открыто благоприятное влияние турбулентности пограничного слоя на лобовое сопротивление, хорошо известно. Дело началось с расхождения в измерениях коэффициента лобового сопротивления шара в лаборатории Эйффеля и в лаборатории Прандтля. Измерения были проведены для различных чисел Рейнольдса в двух различных аэродинамических трубах. Тогда Эйфель распространил свои измерения на более широкий диапазон чисел Рейнольдса и нашел внезапное убывание коэффициента лобового сопротивления, наблюдавшееся, как указал лорд Релей, всегда при одних и тех же числах Рейнольдса. Наконец, Прандтль объяснил это внезапное падение переходом от ламинарного к турбулентному пограничному слою. Позднее было найдено, что критическое значение числа Рейнольдса сильно зависит от степени турбулентности воздушного потока, что и явилось индикатором степени турбулентности воздуха в аэродинамических трубах.

Подобное же влияние турбулентности воздушного потока на сопротивление крыльев самолета было открыто несколько лет назад. Исследование этой проблемы было вызвано также расхождением экспериментальных результатов, на этот раз между измерениями в трубе переменного давления Н. А. С. А. и в трубе с обычным атмосферным давлением Калифорнийского технологического института. Последний туннель имеет весьма малый уровень турбулентности потока (около 0,4% флюктуации скорости), переход от ламинарного к турбулентному состоянию затягивается и потеря скорости наблюдается при меньших значениях коэффициента подъемной силы, чем в трубе с более высоким уровнем турбулентности. Введением искусственной турбуликации удалось привести в согласие результаты измерения в обеих трубах. Следовательно, максимальная подъемная сила крыла оказывается зависящей от турбулентности набегающего потока; она является функцией и числа Рейнольдса и уровня турбулентности. Это дало Драйдену основание называть турбулентность «спутником числа Рейнольдса».

Явление это весьма сложно. Турбулентность, как мы увидим в следующем параграфе, еще не характеризуется вполне уровнем турбулентности, т. е. относительной величиной флюктуаций скорости. Должна быть, по крайней мере, принята во внимание еще некоторая длина, соответствующая протяженности отдельных вихрей, иначе нельзя будет описать действия внешней турбулентности на

место перехода пограничного слоя из ламинарного в турбулентный. Было ясно показано в вышеупомянутых исследованиях, что в опытах, проводимых в свободной атмосфере, порывистый поток не производит того действия, какое производит повышенная турбулентность в аэродинамических трубах. Иными словами, крупная турбулентность действует иначе, чем мелкая. Недавно Тэйлор нашел, что критическое число Рейнольдса R_C должно удовлетворять соотношению

$$R_C = F \left(\frac{u}{U} \right) \left(\frac{D}{L} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где u — величина флуктуаций скорости, D — диаметр сферы и L — длина, характеризующая «крупность» турбулентности.

Из этого короткого обзора установленных экспериментом фактов следует, что и переход от ламинарного к турбулентному состоянию и отрывание турбулентного пограничного слоя взаимно влияют друг на друга во многих весьма важных явлениях. Недавно провал скорости (tip stalling), обусловленный увеличенным заострением крыльев, вызвал новое внимание к проблеме отрывания. Главнейшими вопросами, на которые мы еще не можем ответить, представляются автору следующие:

а) влияние кривизны и градиента давления на положение места перехода слоя из ламинарного в турбулентный;

б) влияние внешней турбулентности на положение места перехода;

• с) влияние кривизны и градиента давления на отрывание турбулентного пограничного слоя;

д) влияние шероховатости на те же явления.

Попытка Бури и Грушвица решить проблему отрывания полуэмпирическим методом не представляется нам плодотворной. Автор убежден, что внесение ясности в этот вопрос возможно только через установление основных законов турбулентного обмена.

В одном отношении мы находимся в лучшем положении, чем в случае явлений молекулярного обмена; благодаря макроскопичности интересующих нас явлений возможно их непосредственное наблюдение. Тем не менее, как уже было сказано, теоретическая формулировка проблемы много затруднительней, чем в случае молекулярных явлений; атомы и молекулы являются устойчивыми системами, которые можно разрушить только громадными силами. Вихри же легко рождаются и легко разрушаются; именно поэтому приложение к ним статической теории требует более тонких рассуждений, чем кинетическая теория газов.

В настоящее время мы имеем еще детские годы статистической теории турбулентности, ее первые попытки ходить. Тем не менее я глубоко уверен, что методы и результаты этой теории будут иметь такое же влияние на практическую аэродинамику, какое в свое время имели на нее теория крыла Ланчестера — Прандтля, и в известной мере теория пограничного слоя, являющаяся неотделимой частью современной практической аэродинамики. Вот почему

мы сочли полезным дать короткий обзор основных положений статистического метода.

6. РОЖДЕНИЕ, ЖИЗНЬ И СМЕРТЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Как уже было сказано во введении к этому докладу, турбулентность характеризуется смешением и перепутыванием большого числа отдельных вихрей. В последних исследованиях турбулентности, произведенных и в Англии и в США, для получения однородного турбулентного поля в потоке употреблялись решетки. В этом случае энергия турбулентных флюктуаций получается за счет действия отдельных стержней или проволок, из которых состоит решетка. Непосредственно за стержнями наблюдаются отдельные правильные системы вихрей; но далее от решетки они скоро исчезают, и следы от стержней состоят из нерегулярно завихренной жидкости; еще далее исчезают, и все следы решетки и турбулентные флюктуации становятся равномерно распределенными по всему сечению потока.

Если жидкость скользит по твердой поверхности, то турбулентность непрерывно создается из вихрей, производимых неровностями поверхности, или возникает вследствие неустойчивости ламинарного подслоя. Замечательно, как в этом случае скоро исчезают всякие следы происхождения турбулентности, — уже на малом расстоянии от места рождения вихрей. Например, в случае трубы с неровными стенками мы уже на расстоянии, вдвое большем, чем высота неровностей, видим, что уровень турбулентности становится постоянным по среднему направлению потока, вне зависимости от того, находится ли место наблюдения напротив долины или напротив горба неровности.

Измерение турбулентных флюктуаций можно производить различными способами — анемометрами типа теплового анемометра, особенно пригодного для записи колебаний скорости, или же визуальным наблюдением. Для осуществления последнего в жидкости взвешиваются какие-нибудь частицы или же используют разницу в показателях преломления нагретой и холодной жидкости. В свободной атмосфере и в реке вихри обычно настолько велики, а следовательно, скорость изменения флюктуации настолько мала, что становится возможным применение для записи их обычных анемометров, вообще говоря, имеющих большую инерцию.

Обозначим через u_1 , u_2 , u_3 — флюктуации скорости в трех взаимно перпендикулярных направлениях, x_1 , x_2 , x_3 , а средние квадратичные их — через $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$, $\overline{u_3^2}$; под средней кинетической энергией на единицу массы будем понимать выражение

$$\frac{1}{2} (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}),$$

Рейнольдс указал, что величины

$$\frac{1}{2} \overline{\rho u_1^2}; \quad \frac{1}{2} \overline{\rho u_2^2}; \quad \frac{1}{2} \overline{\rho u_3^2};$$

представляют компоненты давления на единицу площади, перпендикулярной соответственно к x_1 , x_2 , x_3 , а величины

$$-\overline{\rho u_1 u_2}; \quad -\overline{\rho u_2 u_3}; \quad -\overline{\rho u_3 u_1}$$

представляют сдвиговые усилия; мы называем их компонентами турбулентного трения. Эти шесть компонентов определяют тензор турбулентных напряжений. «Уровень турбулентности» характеризуется средним значением квадрата флюктуаций скорости.

Первая величина, которую мы можем определить из записей флюктуации, есть частота, с которой появляется определенная величина скорости. Повидимому, эксперимент всегда показывает, что распределение скоростей разной величины соответствует довольно точно закону ошибок (рис. 14).

Простейшим случаем турбулентного поля является так называемая изотропная турбулентность, впервые детально изученная Тэйлором. По определению, это такой вид турбулентности, при котором нет различия в флюктуациях скорости по разным направлениям, так что наблюдатель, несущийся вместе с усредненным потоком, этой разницы не находит. Таков, например, случай равномерного искусственного ветра с постоянным уровнем турбулентности по сечению потока, а в известной степени и естественный равномерный ветер на достаточной высоте от уровня земли.

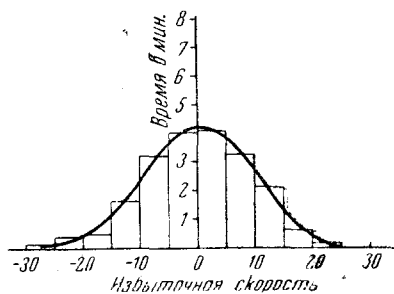


Рис. 14

Изотропная турбулентность в известной степени аналогична молекулярному состоянию покоящегося газа. В таком газе все направления равноценны, и в результате молекулярных столкновений мы имеем три равных компонента давления; сдвиговые усилия равны нулю. Также и в случае изотропной турбулентности три нормальных напряжения равны, а три сдвиговых, определяемых через средние значения произведений вида $\overline{u_1 u_2}$, нули. В самом деле, если бы $\overline{u_1 u_2}$ были отличны от нуля, условие изотропии не было бы соблюдено. Если мы, например, изменим направление оси x_2 на обратное, то изменится на обратный и знак произведения $\overline{u_1 u_2}$, а следовательно, оказалась бы разница в направлениях $+x_2$ и $-x_2$, что противоречило бы определению изотропии.

Все же между молекулярным полем покоящегося газа и полем изотропной турбулентности существует существенное различие. Если пренебречь излучением и передачей теплоты от стенок, то молекулярная система не диссипативна, т. е. средняя кинетическая энергия молекул (представляющая не что иное, как запас тепловой энергии в газе) остается неизменной. Но в турбулизированной жид-

кости, постоянно испытывающей действие сил трения, турбулентность поэтому уменьшается, и макроскопическая кинетическая энергия турбулентных флюктуаций превращается в кинетическую энергию молекулярного движения, т. е. в тепло.

Установление законов гибели турбулентности вследствие трения интересно с точки зрения и теории и практики для многих приложений в инженерном деле и метеорологии. Компоненты тензора трения пропорциональны пространственным производным скоростей, а поэтому диссоциация зависит не только от уровня турбулентности, но и от степени зернистости турбулентного поля, т. е. от размеров вихрей.

При изучении структуры турбулентности можно употреблять либо описательный, либо статистический метод. Первый использовали Шмидт и недавно Шерлок в их интересных исследованиях структуры сильных ветров (gales) (рис. 15, линии равной скорости в функции высоты и времени).

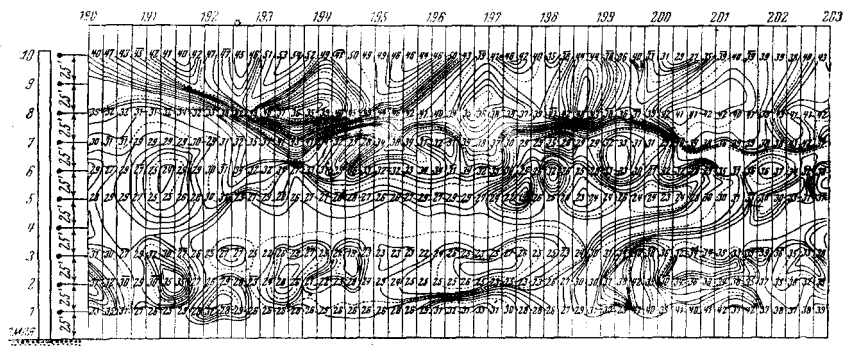


Рис. 15

В статистическом методе мы изучаем средние значения и стремимся определить размеры вихрей по корреляции между компонентами скоростей. Выгода статистического метода в том, что все характерные величины могут быть определены математически; но, конечно, отдельные события и конфигурации стираются в процессе усреднения.

Что же такое корреляция? Будем отмечать появление определенного события в двух точках A и B пространства; предположим также, что наступление события и его ненаступление имеют одинаковую вероятность. Если событие наступает, мы отмечаем это в наших записях $+1$; в противном случае пишем -1 . Например, $a = 1$ означает, что событие наступает в точке A ; $b = 1$ означает, что то же событие наступает в точке B . Очевидно, что если события эти независимы, то среднее значение произведения $\overline{ab}$ равно нулю; если события в A и B наступают непременно оба или оба не наступают, то $\overline{ab} = 1$, если, наконец, наступление события в A

влечет ненаступление его в B и наоборот, то $\overline{ab} = -1$. Если же связь между событиями в A и B неполная, т. е. имеется лишь «корреляция», то $0 < \overline{ab} < 1$. Очевидно, что подобным же образом измеряется корреляция между любыми двумя различными событиями в A и B .

Представим теперь себе, что мы измеряем две каких-нибудь компоненты скорости u_i, u_k , в двух разных точках изотропного турбулентного поля. Чтобы установить, существует ли корреляция между флуктуациями в A и B , составим средние значения произведений $u_{iA} u_{kB}$; будем их обозначать q_{ik} . Очевидно, таких величин — девять; три из них попарно равны вследствие эквивалентности всех направлений, например, $u_{iA} u_{kB} = u_{kA} u_{iB}$, или $q_{ik} = q_{ki}$. Что касается остальных шести, то для однородного неограниченного поля мы можем выбрать A произвольно, и тогда q_{ik} явятся функциями B . Выбрав A за начало координат x_1, x_2, x_3 , видим, что q_{ik} суть функции x_1, x_2, x_3 . При большом расстоянии между A и B , т. е. при большом радиусе

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

средние значения q_{ik} малы, обычно они практически нули. Если A и B совпадают ($r=0$), средние значения q_{11}, q_{22}, q_{33} равны $\overline{u^2}$, где $\overline{u^2}$ — общее значение величин $\overline{u_1^2}, \overline{u_2^2}, \overline{u_3^2}$; $q_{12} = q_{23} = q_{31} = 0$, потому что, как сказано выше, сдвиговые напряжения исчезают.

Разделив шесть величин q_{ik} на $\overline{u^2}$, назовем полученные частные корреляционными функциями R_{ik} . В случае изотропии эти шесть функций могут быть выражены через две функции $R_1(r)$ и $R_2(r)$. Первая из этих функций есть корреляция между компонентами скорости по прямой AB , соединяющей точки наблюдения A и B ; вторая функция есть корреляция между компонентами, перпендикулярными к AB и параллельными между собой. Поэтому мы называем R_1 продольной, R_2 — поперечной корреляцией. Если жидкость можно считать несжимаемой, то эти величины связаны соотношением

$$\frac{dR_1}{dr} + 2(R_1 - R_2) = 0, \quad (29)$$

представляющим не что иное, как уравнение непрерывности. Наличие этого соотношения можно считать критерием изотропности турбулентного поля. Измерения Симмонса (Simmons), в аэродинамической трубе Национальной физической лаборатории показали, что этот критерий очень хорошо удовлетворяется (рис. 16).

Мы представляем себе турбулентное движение как случайное движение большого числа вихревых сгустков или комьев; характер кривой корреляции дает нам представление о размере этих комьев. Посмотрим, например, на кривую R_1 продольной корреляции на рис. 16. Для $r=1$ (в дюймах) мы находим $R_1=0,36$. Значит,

имеется сравнительно большая вероятность, что две частицы жидкости, находящиеся на расстоянии в 1 дм, движутся в одном направлении. Отсюда мы заключаем, что в потоке, изученном Симмонсом, существует значительное количество вихрей подобных размеров; в самом деле, если бы большая часть вихрей была меньше 1 дм, то движения в А и В весьма мало зависели бы друг от друга, и корреляция была бы близка к нулю.

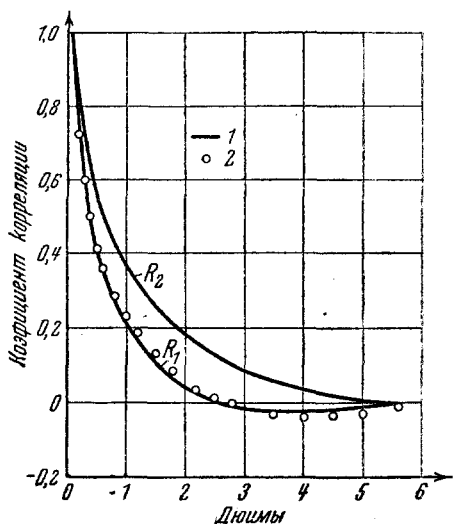


Рис. 16

Таким образом рассмотрение кривых корреляции, полученных при разных условиях, позволяет нам делать заключения о «физических размерах» (мы будем говорить «зернистости») турбулентного потока.

Кривизна кривых корреляции в точке $r=0$, где они имеют максимальное значение, представляет особый интерес. В самом деле, квадраты и попарные произведения производных флуктуаций скорости

зависят только от $\frac{d^2 R_1}{dr^2}$ и $\frac{d^2 R_2}{dr^2}$ при $r=0$. Рассмотрим, например, $\left(\frac{du}{dx_2}\right)^2$. Это представляет интерес, потому что сумма $\sum \mu \left(\frac{du_i}{dx_k}\right)^2$ представляет работу сил трения за единицу времени, т. е. меру рассеяния кинетической энергии при турбулентном движении. Но

$$\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2} = \lim_{x_2' \rightarrow x_2} \frac{(\bar{u}_1' - \bar{u}_1)^2}{(x_2' - x_2)^2},$$

где $\bar{u}_1$ — величина флуктуации скорости в точке x_2 , $\bar{u}_1'$ — в точке x_2' , а предел берется при $x_2' \rightarrow x_2$. Отсюда находим

$$\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2} = \lim_{x_2' \rightarrow x_2} \frac{\bar{u}_1'^2 + \bar{u}_1^2 - 2\bar{u}_1'\bar{u}_1}{(x_2' - x_2)^2}.$$

Но $\bar{u}'^2 = \bar{u}_1^2$, $\bar{u}_1\bar{u}_1' = R_2\bar{u}^2$, а потому

$$\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2} = 2\bar{u}^2 \frac{1 - R_2}{(x_2' - x_2)^2}.$$

Разложим теперь функцию корреляции в ряд по степеням x_2' — $x_2 = r$

$$R_2 = 1 + \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{d^2 R_2}{dr^2} \right)_0 + \dots$$

Очевидно

$$2(1 - R_2) = - \left(\frac{d^2 R_2}{dr^2} \right) r^2 - \dots,$$

а переходя к пределу, $r = 0$, $x_2' \rightarrow x_2$, находим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 = - \bar{u}^2 \left(\frac{d^2 R_2}{dr^2} \right)_0.$$

Тэйлор указал простое геометрическое представление для $\left(\frac{d^2 R_2}{dr^2} \right)_{r=0}$. В области максимального значения кривой корреляции $R_2(r)$ мы можем приближенно считать ее параболой и писать $R_2 = 1 - \frac{r^2}{\lambda^2}$, где λ — расстояние от начала координат до пересечения параболы с осью абсцисс. Очевидно

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 R_2}{dr^2} \right)_0 = - \frac{1}{\lambda^2},$$

и мы имеем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 = \frac{\bar{u}^2}{\lambda^2}.$$

Произведя подобные же вычисления для остальных членов суммы $\sum \mu \left(\frac{du_i}{dx_k} \right)^2$, мы найдем важное уравнение для затухания турбулентности

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = - 10 \nu^2 \frac{g^2}{\lambda^2}, \quad (30)$$

причем $g^2 = \overline{u^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}$, т. е. удвоенное среднее значение кинетической энергии турбулентности, стнесенное к единице массы, ν — коэффициент кинематической вязкости и λ — длина, характеризующая крутизну градиента скорости в турбулентном потоке. Тэйлор называет λ размером «наименьших вихрей»; точное определение λ было дано выше.

Внимание исследователей, работающих в настоящее время над статистической теорией турбулентности, сосредоточено как раз на уравнении (30). Длина λ , как сказано, есть «линейный размер малых вихрей», тогда как ширина кривых корреляции, изображенных на рис. 16, дает средний размер «больших» вихрей. Весьма существен вопрос, что определяет дальнейшее развитие размеров вихрей λ ? Если мы представим себе такое турбулентное поле, для

которого λ постоянна, то в таком поле энергия будет убывать довольно быстро и пропорционально экспоненциальной функции времени. Надо ожидать, что λ возрастает со временем, так как малые вихри гибнут скорее, чем большие. Вследствие этого процесса λ^2 возрастает, по всей вероятности, пропорционально времени, так что сама энергия пропорциональна некоторой отрицательной степени времени. Но в настоящее время нельзя еще дать определенного ответа на этот вопрос, он еще подлежит дальнейшей дискуссии.

Подобное же рассуждение может быть применено к рассеянию среднего завихрения жидкости. Обозначив три компонента вектора завихренности через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, можем показать, что $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{d\omega^2}{dt} = -10\nu \frac{\omega^2}{\lambda_{\omega}^2} + \overline{\omega_i \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}, \quad (31)$$

где λ_{ω} — длина, аналогичная λ , характеризующая пространственное изменение флуктуаций завихрений. Первый член справа представляет рассеяние завихрений, обусловленное трением; второй член представляет изменение средней завихренности, обусловленное изменением размеров вихрей. Рассмотрим, например, конечную часть вихревой трубки, если уменьшается диаметр трубок, то увеличивается и средняя завихренность; если длина цилиндра сокращается, то уменьшается и средняя завихренность. В каком же направлении развивается это явление в турбулентном движении? Ответ на этот и подобные вопросы поможет в поисках окончательной формы основных уравнений турбулентного потока.

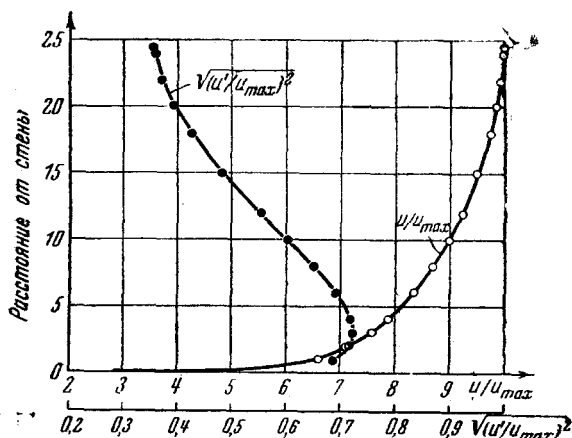


Рис. 17

Экспериментальное исследование функций корреляции имеет громадное значение не только для развития теории, но и для уяснения ряда прикладных вопросов метеорологии, океанографии, гидравлики и в других областях.

Рис. 17—21 дают примеры распределения величин флюктуаций скорости и функции корреляции по измерениям в аэродинамической трубе, в реке (Миссисипи) и в свободной атмосфере.

Примером непосредственного инженерного приложения измерений корреляции является оценка величины вихревых комьев, действующую

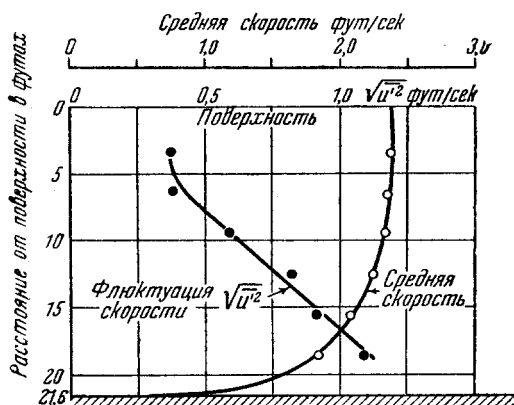


Рис. 18

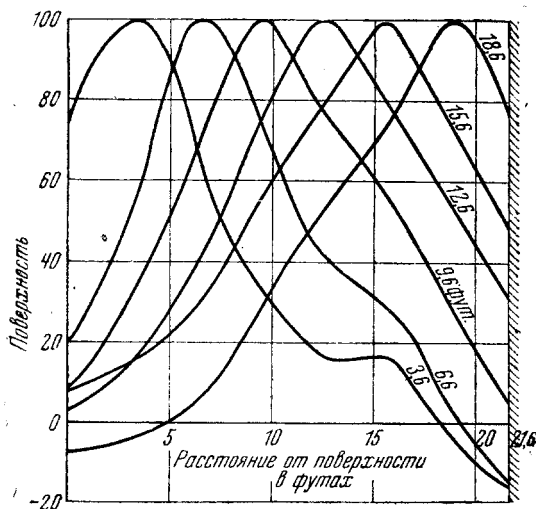


Рис. 19

щих на самолет или на часть его. Если размер этой части мал по сравнению с размером комьев, то приходится предположить, что относительная скорость и угол атаки меняются со временем, но практически постоянны по размаху крыльев или длине самолета. Такое заключение было бы, однако, уже неверным для воздушных кораблей и, пожалуй, и для строящихся в настоящее время гигант-

ских самолетов. Необходимо поэтому разработать указания для вероятного распределения давлений; они пригодились бы не только при расчетах прочности, но и при изучении динамического эффекта вихревых комьев. Измерения корреляции и статистический анализ вихревых комьев могут дать прочное основание для подобного рода исследований подобно тому, как при расчете корабля приходится задаваться формой волн.

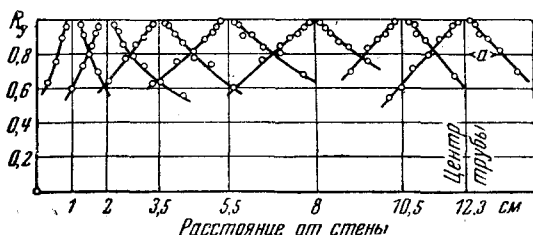


Рис. 20

Понятие корреляции играет таким образом существенную роль в понимании процесса турбулентного обмена, который, можно сказать, и является главным объектом при теоретическом и экспериментальном изучении турбулентности. В наших предварительных рассуждениях мы исходили из предположения, что закон, управляющий

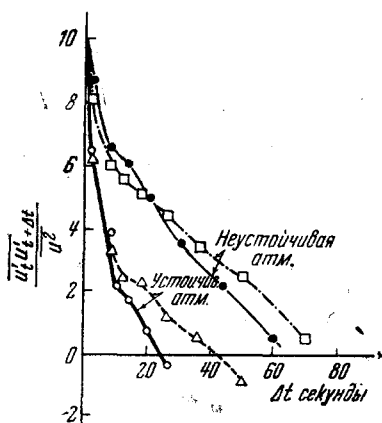


Рис. 21

молекулярной диффузией, сохраняет силу и для диффузии вихрей, но с увеличенными коэффициентами. Но закон молекулярной диффузии основан на том факте, что средний квадрат расстояния, проходимого частицами, растет линейно со временем. Приложив этот закон к случаю так называемого броуновского движения, Эйнштейн смог показать, что коэффициент диффузии частиц равен $\frac{\overline{S^2}}{2t}$, где

$\overline{S^2}$ — средний квадрат расстояния, проходимого частицами за время t .

Однако при углубленном рассмотрении проблемы мы убеждаемся,

что закон этот лишь приближителен и неприменим для малых времен наблюдения. Следующие рассуждения принадлежат Ланжевону; они излагаются здесь потому, что по моему убеждению они окажут существенную помощь в нашей проблеме.

Рассмотрим среднее движение большого числа частиц и подсчитаем значение $\overline{S^2}$, т. е. среднего квадрата пути, проходимого

частицей в некотором направлении за некоторый промежуток времени t . Дифференциальное уравнение движения есть

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{P}{m} - \frac{K}{m} \frac{dS}{dt}, \quad (32)$$

где P — случайная сила, и $K \frac{dS}{dt}$ — сопротивление трения частицы о среду. Помножим обе части этого уравнения на S и произведем усреднение для большого числа частиц; так как величина и направление P изменяются по закону случайности, то между P и S корреляции нет, а среднее $\overline{PS}$ равно нулю. С другой стороны, имеем

$$S \frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{S^2}{2} \right) - \left(\frac{dS}{dt} \right)^2,$$

а потому

$$\frac{d^2}{dt^2} \cdot \frac{\overline{S^2}}{2} = \overline{\left(\frac{dS}{dt} \right)^2} - \frac{K}{m} \overline{S \frac{dS}{dt}} \quad (33)$$

или

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\overline{S^2}}{2} = \overline{\left(\frac{dS}{dt} \right)^2} - \frac{K}{m} \frac{d}{dt} \frac{\overline{S^2}}{2}. \quad (34)$$

Предположим теперь, что среднее $\overline{\left(\frac{dS}{dt} \right)^2}$, т. е. средний квадрат компоненты скорости в направлении S , постоянно и равно $\overline{u^2}$. Тогда наше уравнение разрешимо относительно $\frac{\overline{S^2}}{2}$, и мы находим

$$\frac{\overline{S^2}}{2} = A e^{-\frac{Kt}{m}} + B + \frac{\overline{mu^2}}{K} t \quad (35)$$

или, так как при $t=0$ имеем $\overline{S^2}$ и $\frac{d\overline{S^2}}{dt} = 0$,

$$\frac{\overline{S^2}}{2} = \frac{m \overline{u^2}}{K^2} \left(e^{-\frac{Kt}{m}} - 1 \right) + \frac{\overline{mu^2}}{K} t. \quad (36)$$

Введем теперь время релаксации $t_0 = \frac{m}{K}$, равное времени, за которое сопротивление трения уменьшает скорость частицы до $\frac{1}{2,73}$ ее первоначального значения.

Тогда уравнение (36) гласит

$$\bar{S}^2 = 2\bar{u}^2 t_0^2 \left(e^{-\frac{t}{t_0}} - 1 \right) + 2\bar{u}^2 t t_0. \quad (37)$$

Предположим, далее, что $t \ll t_0$. Тогда

$$\bar{S}^2 \bar{u}^2 t^2 + \text{члены высших порядков}, \quad (38)$$

т. е. $\frac{\bar{S}^2}{t}$, возрастают пропорционально времени. С другой стороны, если $t \gg t_0$, то

$$\bar{S}^2 \sim 2\bar{u}^2 t_0 t \quad (39)$$

или

$$\frac{\bar{S}^2}{t} \sim 2\bar{u}^2 t_0. \quad (40)$$

В броуновском движении вязкое сопротивление настолько велико, что t_0 всегда меньше 10^{-5} сек., и мы имеем дело только со вторым случаем.

Переноса идею этого рассуждения на интересующий нас случай, — броуновское движение больших вихрей в турбулентном поле — мы, должны считать время t_0 существования вихрей большим (например, 100—1000 сек. для турбулентности в свободной атмосфере); и действительно, мы наблюдаем обе фазы процесса диффузии.

Тэйлор первый показал, основываясь на опытах, произведенных в Бюро стандартов, что распределение температур за источником тепла, помещенным в турбулентный воздушный поток, не следует закону $\bar{S}^2$ пропорционально t ; но по введении поправки на молекулярную теплопроводность имеет место закон S пропорционально t . Значит, область за источником, в которой находится какая-то часть полученного от источника тепла, имеет форму не параболоида, а конуса. Это легко себе представить, если допустить, что тепло переносится вихрями, размеры которых велики по сравнению с размерами источника тепла; эти вихри несут то тепло, полученное ими, практически с постоянной скоростью. Классическая диффузия, рассмотренная нами в первой части этой статьи, наступает, когда первый вихрь исчез вследствие трения и скорости частиц воздуха, несущих теплоту, испытывают большое число изменений и по величине и по направлению.

Диффузия второго типа появляется на большом расстоянии от источника, а также в случаях, когда тепло или количество движения передается при параллельном или приблизительно параллельном течении слоев жидкости и среднее течение ее постоянно или мало изменяется.

Автор настоящей статьи полагает, что явления так называемой свободной турбулентности, например, образование областей, через

которые совершается передача интересующих нас величин между массами жидкости, имеющими разные скорости, — соответствуют первому типу турбулентной диффузии, тогда как случаи стационарного потока между твердыми стенками и течение в пограничном слое соответствуют второму типу.

Следующие замечания относятся к постоянному потоку по близости твердой поверхности.

Уравнение (40) показывает, что $\frac{\overline{S^2}}{t}$ определяется через $\overline{u^2}$ и t .

Величина $\overline{u^2}$ дается уровнем турбулентности; главная трудность лежит в интерпретации t_0 . Есть основания предполагать, что t_0 — длительность жизни вихря — должна быть как-то связана с характеристическими свойствами самой турбулентности. Если предположить, что эта длительность определяется силами вязкости, то наиболее вероятным является допущение, что t_0 пропорционально $\frac{\lambda^2}{\nu}$, где λ — размер малых вихрей и ν — кинематическая вязкость.

В самом деле, силы вязкости, действующие на элемент жидкости, линейный размер которого есть λ , пропорциональны μ и λ (закон Стокса); масса того же элемента пропорциональна $\rho\lambda^3$. Поэтому замедление скорости пропорционально $\frac{\nu u}{\lambda^2}$, а длительность жизни пропорциональна $\frac{\lambda^2}{\nu}$. Отсюда видим, что коэффициент диффузии пропорционален $\frac{\lambda^2}{\nu} \cdot \overline{u^2}$. Тот же результат получается при подсчете времени ослабления вихря от вязкости.

Сравним это рассуждение с так называемой теорией «пути смешения», предложенной и защищаемой, главным образом, Прандтлем. Мы можем ввести в наше рассмотрение понятие пути смешения, отождествив ut_0 с l (путем смешения). Тогда из соотношения $t_0 = \frac{\lambda^2}{\nu}$ находим, что путь смешения пропорционален $\frac{\lambda^2}{\nu u}$. Результат этот подкрепляется следующим простым рассуждением. Представим себе обычное сдвиговое перемещение жидкости, в котором за единицу времени передается от слоя к слою постоянное количество движения. В этом случае естественно предположить, что в каждом слое единичной толщины рассеивается вследствие вязкости постоянное количество кинетической энергии. Тэйлор показал, что оно пропорционально $\frac{\overline{u^2}}{\lambda^2}$. Отсюда получаем правильный баланс энергии, положив

$$\tau \frac{\partial U}{\partial y} = \text{const} \cdot \rho \nu \frac{\overline{u^2}}{\lambda^2}, \quad (41)$$

где τ — сдвиговое напряжение, и $\frac{\partial U}{\partial y}$ — градиент средней скорости. С другой стороны, так как коэффициент обмена пропорционален lu ,

$$\tau = \text{const} \cdot lu \rho \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (42)$$

Исключая $\frac{\partial U}{\partial y}$ и приняв во внимание, что τ постоянно, находим соотношение $l = \text{const} \frac{\lambda^2}{\nu} u$.

Приложим теперь эти рассуждения к потоку у твердой стенки, как это наблюдается в пограничном слое. В этом случае опыт говорит нам, что $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot \frac{1}{y}$, где y — расстояние от стенки, и k — универсальная постоянная. Мы полагаем, что этот общий закон обусловлен тем обстоятельством, что механизм турбулентного обмена одинаков при разных y . На языке статистической теории это означает, что корреляции между компонентами скорости повсюду одинаковы. Так как сдвиговое напряжение τ равно $\rho \overline{uv}$ (u, v — компоненты флуктуации скорости в направлениях x, y), то из принципа подобия следует, что $\frac{\overline{uv}}{u^2} = \text{const}$ и $\tau = \text{const} \rho \overline{u^2}$. Поэтому находим из (41), что $\frac{\partial U}{\partial y} \frac{\lambda^2}{\nu} = \text{const}$, или

$$\lambda^2 = \text{const} \frac{\nu}{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}}$$

Получаем такую картину явления. Размеры малых вихрей растут пропорционально корню квадратному расстояния от стены. Путь смещения пропорционален этому расстоянию; он не зависит от числа Рейнольдса, тогда как λ зависит от ν и $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ и убывает с возрастанием числа Рейнольдса. Другими словами, зернистость турбулентного поля становится мельче с увеличением скорости.

Ценность теории повысилась бы, если бы она смогла предсказать степень турбулентности и распределение средней скорости при движении жидкости в трубе постоянного сечения. Далее и такие явления, как влияние кривизны, расширения и сужения трубы, переменной плотности и т. п., должны бы быть включены в общие уравнения.

Ни одна из теорий турбулентности не развита до такой степени, чтобы она могла дать распределение средней скорости по сечению или уровень турбулентности. Практически каждый исследователь, занимающийся теорией турбулентности, построил себе теорию турбулентного обмена; наиболее известными примерами являются теория Прайдля передачи количества движения и теория Тэйлора передачи завихренности (vorticity). Маттеоли (Matteoli) предложил теорию, являющуюся комбинацией этих двух, а Гебелейн (Gebelein) пытался найти решение, став на высокую точку зрения общей теории вероятностей; я опасаясь, что эта точка зрения расположена слишком высоко, чтобы с нее возможно было рассмотреть простые факты, о которых идет речь. Верле (Wehrle) и его сотрудники сделали весьма интересную попытку приложить принцип максимума вероят-

ности к получению общих уравнений для одного типа турбулентного потока. Так как я и сам пытаюсь построить теорию турбулентности, то лучше мне воздержаться от критики предложенных теорий. Конечно, я питаю надежду, что экспериментальные и теоретические исследования настолько продвинутся в ближайшие годы, что между различными основными соотношениями будут установлены достаточно надежные связи; что же касается полного математического обоснования теории и включения в нее основных частных случаев, то это достанется на долю тех, которые придут после нас.

Немало современных инженеров считают проблему турбулентности лишь интересной главой математической физики. Может быть они и правы. Но им следует помнить, что если мы встречаемся с каким-нибудь практическим вопросом аэродинамического расчета, на который мы не можем ответить, то почти наверняка эта невозможность проистекает из нашего недостаточного знания турбулентности. А потому я полагаю, что несмотря на математическую и физическую сложность этой проблемы, ученый имеет право сказать инженеру: *Tua res agitur* (для тебя делается).

Главной задачей моей лекции и было показать это.
