

## СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ ВНУТРИЯДЕРНЫХ СИЛ

*И. Головин, Москва*

В этом обзоре рассмотрены работы различных авторов, выполненные за последние четыре года и ставящие целью выяснить характер сил взаимодействия частиц, образующих атомное ядро, и общие черты теории, которая дала бы возможность описывать ядро, как квантомеханическую систему.

## § 1. СОСТАВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЯДРА

До открытия нейтрона в 1932 г. теория была бессильна объяснить даже наиболее яркие закономерности в строении ядер на протяжении периодической системы. Для объяснения величины массы  $A$  и заряда  $Z$  ядра приходилось считать их построенными из  $A$  протонов и  $A - Z$  электронов. Но включая электроны в качестве составных частей в ядро, мы наталкиваемся на ряд трудностей.

1. Если принять классический радиус электрона, то объем ядра не достаточен для вмещения всех необходимых электронов.

2. Для электронов, заключенных в столь малую область пространства, как объем ядра, и потому обладающих согласно соотношению неопределенности весьма большой кинетической энергией ( $\sim 4 \cdot 10^{10}$  eV), применима была бы только — еще не созданная — релятивистская квантовая механика.

3. По причине малых размеров ядра ускорения электронов были бы настолько значительны, что пропадало бы понятие об их электромагнитной массе.

4. Так как спин электрона и протона равен  $1/2$ , то спин ядер должен был бы быть целым и полуцелым и ядро подчиняться статистике Бозе или Ферми в зависимости от того, состоит оно соответственно из четного или нечетного числа частиц.

Между тем, ядро азота, содержащее по этим представлениям 14 протонов и 7 электронов, обладает спином 1 и подчиняется статистике Бозе. То же самое противоречие получается и для ядра  $H_1^2$ .

5. Магнитные моменты всех ядер по порядку величины в 1000 раз меньше магнитного момента свободного электрона.

6. Считая ядро построенным из протонов, электронов и  $\alpha$ -частиц, из кривой дефектов масс получаем, что все элементы, начиная со Sn,

должны быть радиоактивными, в то время как радиоактивность начинается 32 элементами позже.

Таким образом электрон можно поместить в ядро, только лишив его основных свойств, которыми он обладает в свободном состоянии. Но это равноценно утверждению, что электронов в ядре нет.

При введении нейтрона в качестве структурной единицы в ядро пропадают все вышеупомянутые затруднения. Для разбираемых ниже вопросов теории ядра несущественно, является ли нейтрон сложной или простой частицей, если только энергия связи нейтрона из его компонент значительно больше энергий, с которыми приходится иметь дело в ядре. Волновая механика не допускает при наличии только кулонова притяжения образования из протона и электрона системы более плотной, чем атом водорода. Для построения нейтрона из протона и электрона пришлось бы допустить, что на расстояниях  $\sim 10^{-13}$  см между протоном и электроном действуют, кроме кулоновых, еще другие, более значительные силы притяжения. В настоящее время не видно возражений против принятой теперь точки зрения, согласно которой протон и нейтрон являются одинаково простыми частицами, могущими в результате  $\beta$ - и, соответственно, позитронного распада превращаться одна в другую. Таким образом, несмотря на явления  $\beta^+$  и  $\beta^-$ -распада, позитронов и электронов нет в ядрах точно так же, как нет световых квантов в возбужденных атомах.

Для объяснения величины магнитных и механических моментов ядер приходится приписать нейтрону спин, равный  $\frac{1}{2}$ , и магнитный момент, равный трети момента протона и направленный в противоположную сторону по отношению к механическому моменту. Этот факт, что спин нейтрона равен  $\frac{1}{2}$ , является наиболее веским аргументом в пользу точки зрения, считающей нейтрон простой частицей. Действительно, спин протона, как и электрона, равен  $\frac{1}{2}$ . Орбитальный момент электрона может быть только целым числом. Поэтому у нейтрона, построенного из протона и электрона, в сумме тоже должен был бы получиться целый момент, а не  $\frac{1}{2}$ .

## § 2. ХАРАКТЕР И ПЕРВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЯДРА

Первое приближение теории ядра может быть нерелятивистским. Действительно, согласно опытам по рассеянию нейтронов, диаметр легких ядер порядка  $5 \cdot 10^{-13}$  см и растет с увеличением массы ядер<sup>1</sup>. Поэтому, согласно соотношению неопределенности, средняя скорость частиц в ядре  $\sim 6 \cdot 10^9$  см/сек, что дает релятивистскую поправку в массе  $\sim 2\%$ . Энергетическое значение спинов в этом приближении достаточно учесть с точки зрения принципа Паули. Магнитные взаимодействия не могут заметно влиять на энергию ядра. Наиболее точной постановкой нерелятивистской задачи таким образом будет составление уравнения Шредингера для ядра. Для

ядер, содержащих большое число частиц, придется применить статистический метод, наиболее точно воспроизводящий эту строгую волновую задачу.

Эта теория должна в первую очередь объяснить следующие наиболее яркие закономерности:

1. Число нейтронов  $n_1$  в ряде устойчивых ядер равно числу протонов  $n_2$  от начала периодической системы вплоть до  $\text{Ca}_{20}^{40}$ , а дальше отношение  $\frac{n_1}{n_2}$  непрерывно возрастает.

2. Радиус ядер растет

приблизительно как  $\sqrt[3]{n}$ , где  $n = n_1 + n_2$ , т. е. плотность ядер остается приблизительно постоянной.

3. Почти отсутствуют ядра с нечетными  $n_1$  и  $n_2$  одновременно.

4. Энергия связи ядер растет почти линейно с массой их, причем кривая дефектов массы имеет в начале периодической системы изломы на всех элементах с массой  $4n$ , а, начиная с  $\text{Ne}_{10}^{20}$ , — на каждом элементе с четной массой (рис. 1).

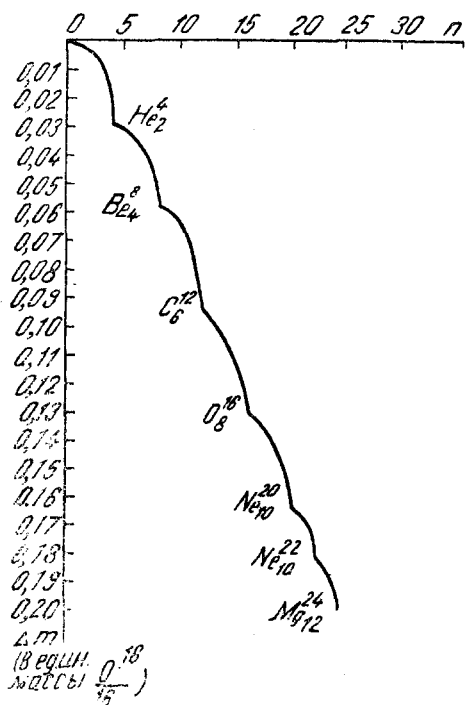


Рис. 1. Дефекты масс ядер как функция числа частиц

### § 3. Составление гамильтониана для ядра

Уравнение Шредингера для ядра предложено Гейзенбергом<sup>2</sup>. Первоначально он исходил из аналогии, возникающей между связью в ионе  $\text{H}_2^+$  и связью пары протон-нейтрон, если считать нейтрон

системой, построенной из тесно связанного протона и электрона. Тогда надо принять, что силы связи протона с нейтроном имеют обменный характер. Если считать, что происходит обмен электроном, то все частицы в ядре будут равноправными и могут лишь находиться в нейтронном или протонном состоянии. Для дальнейших выводов по намеченному выше кругу вопросов не существенно, каков механизм взаимодействия частиц. Правильнее всего не пытаться сводить эти обменные силы к электрическим взаимодействиям, а считать их новым видом сил, специфическим для взаимодействия нейтрона, как незаряженной элементарной частицы, с протоном.

Пусть потенциальная функция  $J_0(r)$  определяет зависимость величины обменных сил от расстояния между частицами, а функция  $K(r)$  определяет закон сил взаимодействия двух нейтронов. Дефект массы нейтрона, составленного из протона и электрона, обозначим через  $D$ . О виде функций  $J_0$  и  $K$  можно сделать пока лишь два предположения: 1) по аналогии с молекулой  $H_2$  примем, что для внутриядерных значений  $r$  функция  $K(r) < J_0(r)$ ; 2) опыты по рассеянию  $\alpha$ -частиц показывают, что эти силы не заметны уже при  $r = 10^{-12}$  см, между тем как прочность ядер заставляет считать, что  $J_0(r)$  на внутриядерных расстояниях измеряется миллионами вольт. Поэтому  $J_0(r)$  имеет вид крутой потенциальной ямы со средней шириной, меньшей  $10^{-12}$  см. Ввиду того, что классический радиус протонов значительно меньше внутриядерных расстояний, допустимо, что между ними действуют кулоновы силы отталкивания.

Однако в настоящее время нельзя считать вполне удачной эту Гейзенбергову картину ядра, созданную им еще до открытия позитрона. Действительно настолько же вероятно превращение протона в нейтрон с испусканием позитрона, как и обратный процесс превращения нейтрона в протон с выделением электрона. Поэтому, если есть силы взаимодействия между двумя нейтронами, определяемые потенциальной функцией  $K(r)$ , то в точности такие же силы, обуславливаемые „орбитальными“ позитронами, должны существовать и между каждыми двумя протонами. Единственная асимметрия в свойствах протонов и нейтронов создается электрическими зарядами протонов.

Составляя уравнение Шредингера, Гейзенберг характеризует каждую частицу пятью величинами: тремя пространственными координатами  $(x, y, z) = r$ , спином  $\sigma_k^z$  в направлении оси  $z$  и числом  $\beta_{\mu,k}$ , которое может принимать только два значения  $+1$  и  $-1$ . При  $\beta_{+1,k} = +1$  описываемая  $k$ -тая частица находится в состоянии нейтрона, при  $\beta_{-1,k} = -1$  эта частица находится в состоянии протона. Для записи гамильтониана могут быть использованы матрицы:

$$\rho_k^x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \rho_k^y = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}; \quad \rho_k^z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (3, 1)$$

Индекс  $k$  у оператора означает, что он действует на  $\beta$ -координату только  $k$ -той частицы. Собственную функцию ядра, состоящего из  $n$  частиц, можно записать в виде

$$\psi = \psi(x_1, \dots, x_n, \beta_{\mu,1}, \beta_{\nu,2}, \dots, \beta_{\tau,n}),$$

где  $\mu, \nu, \dots, \tau$  равны  $+1$  или  $-1$ . Здесь  $x_k$  обозначает все три пространственные координаты  $x_k, y_k, z_k$  и спин  $\sigma_k^z$   $k$ -той частицы.

Для употребления операторов (3,1) установим следующее правило. Действуя  $k$ -тым оператором  $\rho_k^x, \rho_k^y$  или  $\rho_k^z$  на функцию  $\psi$ , будем предста-

влять ее себе в виде одноколонной матрицы  $\begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}$ , если в  $\psi$   $k$ -тая  $\beta$ -координата есть  $\beta_{+1,k}$  и в виде  $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}$ , если  $\beta$ -координата есть  $\beta_{-1,k}$ . В результате воздействия оператора матрица  $\begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}$  перейдет в матрицу вида  $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}$  (или обратно) или останется неизменной. В случае изменения вида матрицы мы меняем знак  $\beta_{\mu,k}$  на обратный.

Пользуясь этим правилом, получаем тождества:

$$\rho_k^z f(x_1 \dots x_n; \dots \beta_{1,k} \dots) = f(x_1 \dots x_n; \dots \beta_{1,k}),$$

$$\rho_k^z f(x_1 \dots x_n; \dots \beta_{-1,k} \dots) = -f(x_1 \dots x_n; \dots \beta_{-1,k} \dots)$$

и, соответственно, отмечая для краткости только  $k$ -тую  $\beta$ -координату:

$$\rho_k^x f(\beta_{1,k}) = f(\beta_{-1,k}); \quad \rho_k^x f(\beta_{-1,k}) = f(\beta_{1,k}),$$

$$\rho_k^y f(\beta_{1,k}) = if(\beta_{-1,k}); \quad \rho_k^y f(\beta_{-1,k}) = -if(\beta_{1,k}).$$

Можно даже отвлечься от матричной записи и считать это тождествами, определяющими свойства операторов (3.1).

Обратимся теперь к составлению гамильтониана. Кинетический

член имеет обычную форму  $\sum_{k=1}^n \frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla^2_k$ . Член, дающий обменную энергию, должен обменивать координаты соответствующих пар частиц, если они находятся в разноименных состояниях (одна протонном, другая — нейтронном) и давать нуль для любой пары частиц, находящихся в одноименном состоянии. Поставленным условиям удовлетворяет оператор

$$A = \frac{1}{2} (\rho_k^x \rho_l^x + \rho_k^y \rho_l^y).$$

Действительно,

$$Af(\beta_{1,k}, \beta_{-1,l}) = f(\beta_{-1,k}, \beta_{1,l});$$

$$Af(\beta_{1,k}, \beta_{1,l}) = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Член, дающий притяжение нейтронов, должен обращаться в нуль, если частицы находятся в различных состояниях, или обе частицы в протонном состоянии. Поэтому его приходится писать в форме:

$$-\frac{1}{4} \sum_{k>l} K(r_{kl})(1 + \rho_k^z)(1 + \rho_l^z).$$

Аналогично строятся остальные операторы. Весь гамильтониан получает вид:

$$\begin{aligned}
 H = & -\frac{\hbar^2}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{m_k} \nabla_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k>l} J_0(r_{kl}) (\rho_k^{\xi} \rho_l^{\xi} + \rho_k^{\eta} \rho_l^{\eta}) - \\
 & - \frac{1}{4} \sum_{k>l} K(r_{kl}) (1 + \rho_k^{\xi}) (1 + \rho_l^{\xi}) + \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{k>l} \frac{e^2}{r_{kl}} (1 - \rho_k^{\xi}) (1 - \rho_l^{\xi}) + \frac{1}{2} D \sum_{k=1}^n (1 + \rho_k^{\xi}) \quad (3, 2)
 \end{aligned}$$

#### § 4. ФИЗИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ

Посмотрим, какие следствия получаются чисто математическим путем из выражения (3,2). Сравнение их с опытом покажет, насколько близки к действительности гипотезы, использованные при составлении оператора.

Прежде всего проверим, являются ли числа протонов  $n_2$  и нейтронов  $n_1$  интегралами движения<sup>2</sup>. Оператор числа нейтронов есть  $\frac{1}{2} \sum_k (1 + \rho_k^{\xi})$  числа протонов:  $\frac{1}{2} \sum_k (1 - \rho_k^{\xi})$ .

Из соотношения

$$(\rho_k^{\xi} + \rho_l^{\xi})(\rho_k^{\xi} \rho_l^{\xi} + \rho_k^{\eta} \rho_l^{\eta}) = (\rho_k^{\xi} \rho_l^{\xi} + \rho_k^{\eta} \rho_l^{\eta})(\rho_k^{\xi} + \rho_l^{\xi}) = 0$$

следует, что эти операторы коммутируют с  $H$ . Таким образом, в согласии с опытом,  $n_1$  и  $n_2$  не изменяются в ядре с течением времени при условии, что энергия его остается постоянной.

Если пренебречь последними тремя членами в гамильтониане, то он будет симметричным в протонах и нейтронах. Такое пренебрежение законно для легких ядер, так как для них можно считать, что  $J_0(r)$  на внутриядерных расстояниях значительно больше не только, чем  $K(r)$ , но и чем  $\frac{e^2}{r}$ . Симметрия гамильтониана означает, что он не зависит от знака  $n_1 - n_2 = \sum \rho_k^{\xi}$ , а поэтому энергия связи ядра, определяемая уравнением  $H\psi = E\psi$ , достигает экстремума при  $n_1 = n_2$ . В исследуемом приближении при  $n_2 = 0$  энергия  $E = 0$ . Поэтому, как легко видеть, при  $n_1 = n_2$  энергия связи (энергией связи мы будем называть положительную работу, необходимую для разделения ядра на отдельные протоны и нейтроны), достигает максимума. Этот вывод вполне согласуется с опытным фактом, утверждающим, что у устойчивых легких ядер число протонов близко к числу нейтронов.

Если считать  $J_0(r)$  гораздо более быстро убывающей с расстоянием, чем  $\frac{1}{r}$ , то по мере увеличения числа  $n$  частиц в ядре куло-

нов член  $\sum_{k>l} \frac{e^2}{r_{kl}} (1 - \rho_k^+)(1 - \rho_l^+)$  будет приобретать все большее значение. Здесь кулоновы силы являются силами отталкивания. Поэтому энергетически выгоднее окажется увеличение числа нейтронов по сравнению с числом протонов. Это тоже прекрасно согласуется с опытом.

Теперь уже можно дать качественную картину радиоактивного распада<sup>3</sup>. Представим себе ядро, состоящее из одних нейтронов. Ввиду того, что силы взаимодействия между разноименными частицами значительно больше сил притяжения между нейтронами, энергетически выгодно заменить часть нейтронов протонами. Поэтому такое ядро будет  $\beta$ -активным. Энергия связи при возникновении протонов будет при этом возрастать до тех пор, пока выигрыш в энергии от увеличения числа обменных связей не скомпенсируется кулоновым отталкиванием. Дальнейшее увеличение числа протонов приведет уже к уменьшению энергии связи. Поэтому кривая зависимости энергии ядра от числа нейтронов при заданном весе ядра имеет минимум, соответствующий наибольшей энергии связи. Ядра, отмеченные на рис. 2 кружками, являются  $\beta^+$ -активными; крести-

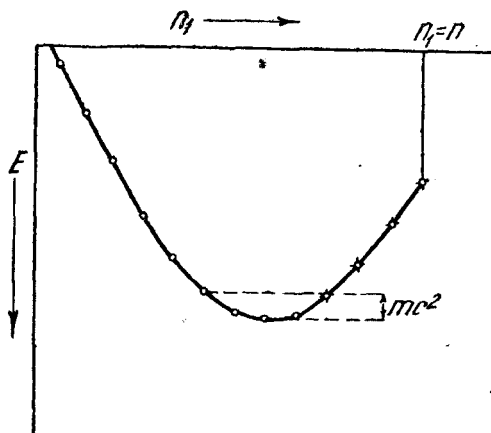


Рис. 2.

ками отмечены  $\beta^-$ -активные ядра. Если около минимума на кривой в области шириной  $mc^2$  уместится несколько ядер, то они будут устойчивыми изобарами, так как с электроном или позитроном выбрасывалась бы большая энергия, чем выигрыш в энергии, получаемый при радиоактивном переходе.

Однако такую плавную кривую можно начертить лишь для ядер с нечетным атомным весом. Для ядер с четным весом существенен учет принципа Паули. В этом случае нельзя вычертить одну плавную кривую для всех изобар. Получаются две плавные кривые: одна, лежащая несколько выше, — для ядер с нечетным числом про-

тонов и соответственно нейтронов; другая — под первой, для ядер с четным числом протонов и нейтронов. Это изменяет условия устойчивости ядер. Действительно, если разность минимумов обеих кривых больше  $m_e c^2$ , то устойчивых изобар с нечетным числом частиц обоих видов вообще нет. В то же время такое ядро, как например, ядро Р на рис. 3 будет устойчивым, так как распад перевел бы его в ядро Р', что энергетически невыгодно. Ядро Р'' может испускать как позитроны, так и электроны, превращаясь соответственно в ядра А или В. Опыт показывает, что ядра с нечетным числом протонов и нейтронов существуют только в начале периодической системы вплоть до  $N_7^{14}$ . Это указывает на то, что разность минимумов обеих кривых в тяжелых ядрах больше  $m_e c^2$ .

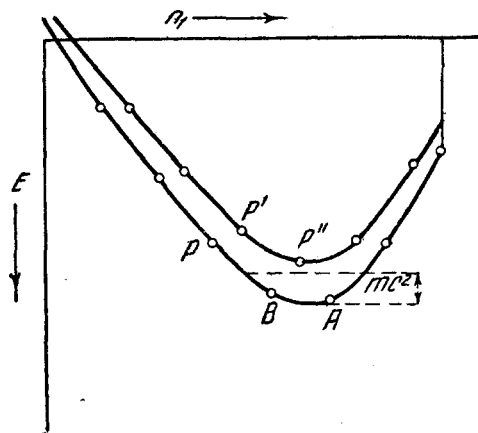


Рис. 3.

Аналогичные энергетические соображения объясняют также ход естественного радиоактивного распада. На самом деле,  $\beta^-$ -распад начинается во всех случаях с ядра, обладающего четным зарядом, и друг за другом всегда происходят два последовательных  $\beta^-$ -распада. Таким образом кончается распад тоже на ядре с четным зарядом. Это объясняется тем, что если энергетически выгоден был первый распад, приводящий к нечетному числу протонов в ядре, а потому заставляющий занять новым протоном более высокий энергетический уровень, то выгоден будет и второй распад, ведущий к возможности образования в ядре новой  $\alpha$ -частицы. Правда, после первого  $\beta^-$ -распада может создаться такое положение, что ввиду получившегося избытка отталкивающихся протонов окажется выгодным и  $\alpha$ -распад. Тогда появляется вилка, имеющаяся во всех четырех радиоактивных рядах и начинающаяся на  $\text{RaC}$ ,  $\text{AcC}$ ,  $\text{ThC}$  и  $\text{Th}_{90}^{233}$ . Этим самым же можно объяснить аномалию в ряду актиния.



## § 5. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ДЕЙТОНА

Напишем теперь уравнение Шредингера для наиболее простых ядер. Самая простая система, состоящая из двух частиц, может находиться в четырех состояниях

$$\psi_1(x_1, x_2; \beta_{1,1}, \beta_{-1,2}); \quad \psi_2(x_1, x_2; \beta_{-1,1}, \beta_{1,2}); \\ \psi_3(x_1, x_2; \beta_{1,1}, \beta_{1,2}); \quad \psi_4(x_1, x_2; \beta_{-1,1}, \beta_{-1,2}).$$

Нас интересуют только первые два состояния, описывающие дейтон. В данной задаче оказывается возможным представить эти функции в виде произведения:

$$\varphi_1(x_1, x_2)f(\beta_{1,1}, \beta_{-1,2}), \quad \varphi_2(x_1, x_2)f(\beta_{-1,1}, \beta_{1,2}).$$

Действительно, согласно (3,2), получаем уравнения Шредингера в форме

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 \varphi_1(x_1, x_2)f(\beta_{1,1}, \beta_{-1,2}) - J_0(r_{12})\varphi_1(x_1, x_2)f(\beta_{-1,1}, \beta_{1,2}) &= 0 \\ \Omega_2 \varphi_2(x_1, x_2)f(\beta_{-1,1}, \beta_{1,2}) - J_0(r_{12})\varphi_2(x_1, x_2)f(\beta_{1,1}, \beta_{-1,2}) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (5, 1)$$

где для краткости обозначено:

$$\Omega_i = -\frac{\hbar^2}{2} \sum_k \frac{1}{m_k} \cdot \nabla_k^2 + D - E_i.$$

Полагая  $E_1 = E_2 = E$ , получаем  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ , так как необходимо однозначное решение. Уравнения (5,1) показывают, что  $\varphi$  симметрична в пространственных координатах частиц. Кроме того, из опыта известно, что спин дейтона равен единице. Поэтому функция дейтона симметрична и в спинах. Для гейзенберговой записи функции ядра приходится расширить принцип Паули. Здесь все частицы тождественны и находятся либо в протонном, либо нейтронном состоянии. Поэтому собственная функция ядра может быть симметрична и в пространственных координатах и в спинах, но тогда она должна быть антисимметрична в  $\beta$ -координатах. Здесь антисимметричным должен быть множитель, построенный из величин  $\beta_{\mu k}$ . Чтобы получить функцию, удовлетворяющую этому требованию, вычтем второе уравнение (5,1) из первого. Тогда находим, что  $\varphi$  определяется уравнением

$$\Omega \varphi + J_0 \varphi = 0. \quad (5, 2)$$

При этом должно выполняться условие

$$f(\beta_{1,1}, \beta_{-1,2}) = -f(\beta_{-1,1}, \beta_{1,2}),$$

которому легко удовлетворить соответственным выбором функции  $f$ . Полная собственная функция принимает вид

$$\varphi(x_1, x_2) [f(\beta_{1,1}, \beta_{-1,2}) - f(\beta_{-1,1}, \beta_{1,2})].$$

Она антисимметрична в частицах. Существенно, что связь дается уравнением (5,2) только при условии, что  $J_0$  — отрицательная величина. В дальнейшем мы будем пользоваться только положительной величиной  $J(r)$ , равной  $-J_0(r)$ .

## § 6. ЗНАЧЕНИЕ ФОРМЫ ЯМЫ

Для части собственной функции дейтона, зависящей только от относительных координат, в результате отделения координат центра тяжести, получаем из (3,2) следующее уравнение:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 - J(r) \right] \psi(r) = E_D \psi(r). \quad (6, 1)$$

Для интегрирования его необходимо знать вид функции  $J(r)$ . Из опыта можно только оценить среднюю глубину и ширину потенциальной ямы. Поэтому функцию  $J(r)$  приходится брать произвольно. Она должна, однако, зависеть от двух параметров  $a$  и  $\rho$ , характеризующих глубину и ширину ямы.

Если мы проинтегрируем уравнение (6,1) и приравняем  $E_D$  ее экспериментальному значению ( $2,1 \cdot 10^6 \text{eV}$ ), то получим уравнение, связывающее параметры  $a$  и  $\rho$ .

На рис. 4 приведены результаты точного интегрирования (аналитического, или, когда такое интегрирование невозможно, численного) для функций

$$\text{I } J(r) = \frac{4a}{(1 + e^{-\frac{r}{\rho}})(1 + e^{\frac{r}{\rho}})},$$

$$\text{II } J(r) = a'e^{-\frac{r}{\rho'}},$$

$$\text{III } J(r) = a'' \text{ при } r < \rho''; \\ J(r) = 0 \text{ при } r > \rho'',$$

$$\text{IV } J(r) = a_0 e^{-\frac{r^2}{\rho_0^2}}.$$

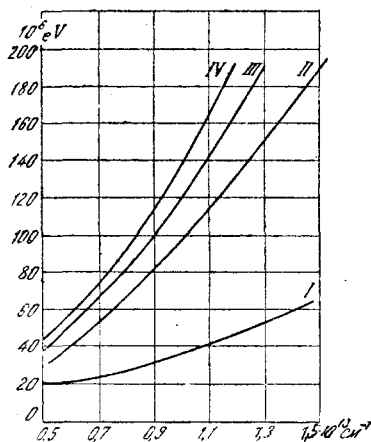
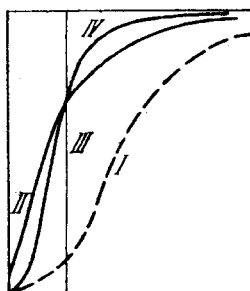


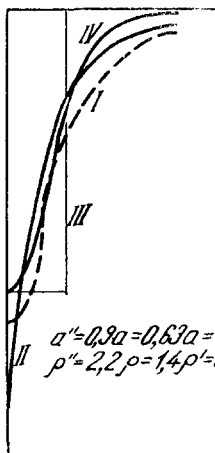
Рис. 4.

Зависимость параметров  $a$  от  $\rho^{-1}$

Легко видеть, что параметры  $a$  и  $\rho$  имеют здесь разный смысл. Так,  $a''$  является средней (здесь постоянной) глубиной ямы



$$a'' = a = a_0 \\ \rho'' = \rho = \rho_0$$



$$a'' = 0,8a = 0,63a_0 \\ \rho'' = 2,2\rho = 1,4\rho_0 = 0,9\rho_0$$

Рис. 5а.

Рис. 5б.

Но  $a$ ,  $a'$  и  $a_0$  дают максимальные глубины ям. Очевидно, средние глубины имеют иное значение. Если изменить масштабы, взяв

$$\left. \begin{aligned} a'' &= 0,9a = 0,63a' = a_0 \\ \rho'' &= 2,2\rho = 1,4\rho' = 0,9\rho_0 \end{aligned} \right\}, \quad (6, 2)$$

то все кривые рис. 4 совпадут с кривой для прямоугольной ямы. На рис. 5 изображены соответствующие этим масштабам относительные размеры ям. Этот рисунок не противоречит тому, чтобы считать  $a''$ ,  $\rho''$ , определенные равенствами (6,2), за средние глубину и ширину ям. Если выполняются равенства (6,2), то энергия дейтона не зависит от формы ямы, а лишь от средней глубины и ширины ее.

Так как до сих пор нет точного решения даже для триплона, то неизвестно, насколько сильно влияет точная форма ямы на энергию связи ядер. Однако произведенные расчеты показывают, что форма ямы имеет второстепенное значение; энергия связи ядра существенно зависит только от средней глубины и ширины ее.

## § 7. РАСЧЕТ ВИГНЕРА<sup>4</sup>

Для ядер  $H_1^3$  и  $He_2^3$  получается уже система трех совместных уравнений, точное решение которых невозможно. Поэтому приходится выбрать приближенный метод, возможно более близкий к решению точной системы уравнений, предложенных Гейзенбергом.

Вигнер делает следующее упрощение. Он решает задачу ядра  $He_2^4$ , считая, что силы взаимодействия протона с нейтроном не обменные, а потенциальные. Энергию ядра  $He_2^4$  он вычислял с помощью вариационного принципа:

$$\delta E_{He} = \delta \frac{\int \psi H \psi d\sigma}{\int \psi^2 d\sigma} = 0,$$

причем в гамильтониане в качестве потенциальной функции взято выражение:

$$J(r) = \frac{4,56a}{\left(1 + e^{\frac{r}{\rho}}\right) \left(1 + e^{-\frac{r}{\rho}}\right)}$$

Для ширины ямы  $2\rho = 1,2 \cdot 10^{-13}$  см и глубины  $63 \cdot 10^6$  eV, взятых в согласии с кривой I рис. 4, т. е. при использовании точного решения дейтона, он получил энергию связи  $He_2^4$  в 14 раз большую, чем энергия связи  $H_1^2$ . Это хорошо объясняет опытный факт громадной разницы в энергии связи  $He_2^4$  и  $H_1^2$  (27 и  $2 \cdot 10^6$  eV).

казавшийся до тех пор непонятным. При этом расчете принято во внимание только взаимодействие протонов с нейтронами. Учет кулонова отталкивания уменьшил бы энергию связи на 2—3 миллиона вольт. Этот расчет, выполненный по методу Ритца в первом приближении, надо считать в настоящее время все же наиболее точным, так как значение ширины ямы и энергия связи сравнительно хорошо согласуются с опытными данными.

### § 8. Неприменимость вигнеровых сил для объяснения строения тяжелых ядер

Попробуем вычислить зависимость энергии связи от массы ядра. Делая приближенный расчет, усредним энергию по всем значениям  $\rho$ -координат. Выполнив это усреднение, Гейзенберг получил, согласно (3,2), энергию взаимодействия двух частиц, равно й<sup>5</sup>

$$U(r) = -2 \frac{n_1 n_2}{n(n-1)} J(r) - \frac{n_1(n_1-1)}{n(n-1)} K(r) + \frac{n_2(n_2-1)}{n(n-1)} \frac{e^2}{r},$$

причем ядро приходится считать построенным из частиц одного сорта и подчиняющихся статистике Ферми. Вводя плотность частиц  $\rho(r)$  и пользуясь методом Томаса-Ферми, получаем:

$$E = \frac{h^2 4\pi}{M^{\frac{5}{3}}} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{5}{3}} \int \rho(r)^{\frac{5}{3}} d\tau + \\ + \frac{1}{2} \int \int \rho(r) \rho(r') U(|r-r'|) d\tau d\tau' - n_1 D.$$

Плотность  $\rho(r)$  найдем из условия минимума  $E$ , принимая, что  $\int \rho(r) d\tau = n$ . Указанное усреднение уже исключает обменный характер сил и сводит их к обычному потенциальному взаимодействию  $U(r)$ . Для того чтобы учесть несжимаемость ядер, т. е. известную из опыта пропорциональность между объемом и массой их, приходится ввести конечный радиус частиц и максимальную плотность ядер  $\rho_0$ , которая получилась бы при расположении всех частиц ядра вплотную друг к другу. В результате преобразований получаем:

$$E - \frac{n}{2} \frac{dE}{dn} = \\ = \frac{h^2 2\pi}{M^{\frac{5}{3}}} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{5}{3}} \left[ \int \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right)^{-\frac{2}{3}} \rho d\tau - 2 \int \frac{\rho}{\rho_0} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right)^{-\frac{5}{3}} d\tau \right]. \quad (8, 1)$$

Для легких ядер, для которых можно принять  $\frac{1}{\rho} \ll \frac{1}{\rho_0}$ , энергия  $E$

возрастает быстрее, чем  $\text{const} \cdot n^2$ , в то время как опыт дает линейное возрастание энергии с массой. Правда, подбором констант  $a$ ,  $b$  и  $A$  можно кривую, даваемую (8,1)

$$E = a(n - b)^2 + A$$

совмещать с участками кривой дефектов масс (рис. 1), но это достигается лишь искусственным введением констант  $a$ ,  $b$  и  $A$ . Таким образом потенциальные силы даже при дополнительном введении конечного радиуса частиц не дают основной закономерности — пропорциональности между энергией и массой ядер.

### § 9. Силы Майорана

Майорана показал, что обменные силы дают возможность объяснить пропорциональность между массой, объемом и энергией ядер, не вводя никаких дополнительных гипотез, как например, конечный радиус частиц <sup>6</sup>.

Для дальнейшего оказывается удобным перейти к иной записи обменных сил, заметив, что обмен зарядом вполне эквивалентен одновременному обмену пространственными координатами и спином разноименных частиц (протона и нейтрона). Вместо 3-координат введем разделение на протоны и нейтроны. При таком описании ядра вместо оператора

$$\frac{1}{2} J(r_{kl}) (\rho_k^z \rho_l^z + \rho_k^y \rho_l^y)$$

можно воспользоваться оператором

$$-J(r_{kl}) P'_{kl}, \quad (9, 1)$$

где  $P'_{kl}$  — оператор, переставляющий одновременно спин и пространственные координаты  $k$ -того нейтрона и  $l$ -того протона.

Если принять, что связь ядер обусловлена силами Гейзенберга, то  $\alpha$ -частица оказывается неустойчивой системой, распадающейся на два дейтона, в то время как опыт указывает на исключительную устойчивость именно  $\alpha$ -частиц. Действительно, в низшем энергетическом состоянии, в котором пространственная часть собственной функции  $\text{He}_2^4$  симметрична к перестановке двух любых частиц, собственная функция должна быть антисимметричной в спинах обоих протонов и, соответственно, обоих нейтронов. Энергия взаимодействия всех четырех частиц, согласно (9,1), равна

$$\int \psi^* [J(r_{11}) P'_{11} \psi + J(r_{12}) P'_{12} \psi + J(r_{13}) P'_{13} \psi + \\ + J(r_{22}) P'_{22} \psi] d\psi.$$

Если принять ориентацию спинов, взятую на чертеже (рис. 6), то первый и четвертый член равен нулю. В самом деле, оператор  $P'_{11}$  изменяет спин 1-го нейтрона и соответственно 1-го протона на обратные. Но при параллельной установке спинов одноименных частиц  $\psi$  равна нулю согласно сказанному выше о ее свойствах симметрии. Поэтому притягиваться будут только те протоны и нейтроны, которые имеют одинаково ориентированные спины. Таким образом в  $\alpha$ -частице будут только две связи и, если пренебречь гипотетическими до сих пор силами притяжения одноименных частиц, это будут два дейтона, отталкивающиеся электрическими зарядами входящих в них протонов.

Майорана ввел другой вид обменных сил, которые при старом описании ядра дают обменный член в виде

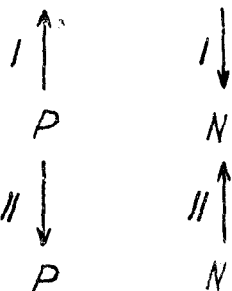


Рис. 6.

$$\frac{1}{4} J(r_{kl}) (\rho_k^x \rho_l^x + \rho_k^y \rho_l^y) [1 + (\sigma_k \sigma_l)],$$

а при новом

$$-J(r_{kl}) P_{kl}, \quad (9, 2)$$

где оператор  $P_{kl}$  обменивает только пространственные координаты  $k$ -того нейтрона на координаты  $l$ -того протона.

Если в ядрах действуют эти майорановы силы, то в  $\alpha$ -частице мы получаем уже четыре обменных связи, что дает возможность объяснить ее исключительную устойчивость.

## § 10. Приближенная формулировка задачи

Точная постановка задачи для сил Майорана приводит к системе уравнений, аналогичной системе Гейзенберга. Мы предположим для упрощения (в нулевом приближении), что силы взаимодействия данной частицы со всеми остальными могут быть заменены некоторым средним консервативным полем так, чтобы энергию взаимодействия каждой частицы со всем остальным ядром можно было считать функцией координат только этой частицы. Тогда полную функцию ядра мы представим в виде линейной комбинации произведений собственных функций отдельных частиц. Наиболее удобный вид такой комбинации есть

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} \begin{vmatrix} \psi_1(x_1 \sigma_1) & \dots & \psi_{n_1}(x_1 \sigma_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_1(x_{n_1} \sigma_{n_1}) & \dots & \psi_{n_1}(x_{n_1} \sigma_{n_1}) \\ \psi'_1(x'_1 \sigma'_1) & \dots & \psi'_{n_2}(x'_1 \sigma'_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi'_1(x'_{n_2} \sigma'_{n_2}) & \dots & \psi'_{n_2}(x'_{n_2} \sigma'_{n_2}) \end{vmatrix} \times \quad (10, 1)$$

$$\times \begin{vmatrix} \psi_1(x_1 \sigma_1) & \dots & \psi_{n_1}(x_1 \sigma_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_1(x_{n_1} \sigma_{n_1}) & \dots & \psi_{n_1}(x_{n_1} \sigma_{n_1}) \\ \psi'_1(x'_1 \sigma'_1) & \dots & \psi'_{n_2}(x'_1 \sigma'_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi'_1(x'_{n_2} \sigma'_{n_2}) & \dots & \psi'_{n_2}(x'_{n_2} \sigma'_{n_2}) \end{vmatrix}$$

причем  $\psi_i$  описывают состояния нейтронов,  $\psi'_i$  — протонов. Мы будем считать функции  $\psi_i$  и соответственно  $\psi'_i$  взаимно ортогональными. Аналогично задаче Гартри-Фока, вид функций  $\psi_i$  и  $\psi'_i$  может быть найден из вариационного начала:

$$\delta \int \Psi^* \left\{ \sum \frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 - \sum J(r) P_{kl} + \sum \frac{e^2}{r_{kl}} - E \right\} \Psi dv = 0.$$

При этом учитываются только обменные силы между разноименными частицами и кулоново отталкивание протонов.

Однако для целей первой ориентировки решение получающейся отсюда системы уравнений слишком громоздко. Поэтому мы обратимся к приближенным методам.

## § 11. Первое приближение формулировочной задачи (метод Томаса-Ферми) <sup>6,7</sup>

Как показал Дирак <sup>8</sup>, для систем, построенных из столь большого числа частиц, подчиняющихся статистике Ферми, что можно пренебречь величиной  $\hbar^3$  по сравнению с фазовой областью, занимаемой системой, решение Гартри-Фока делается эквивалентным методу Томаса-Ферми. Поэтому для ядер, состоящих из достаточно большого числа частиц, можно надеяться получить согласие с опытом, пользуясь этим методом.

Полная энергия ядра есть

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} + E_{\text{кул}},$$

где

$$E_{\text{кин}} = \frac{\hbar^2 4\pi}{M 5} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{5}{3}} \int dr \{ [\rho_N(r)]^{\frac{5}{3}} + [\rho_P(r)]^{\frac{5}{3}} \}, \quad (11, 1)$$

$$E_{\text{пот}} = - \int \Psi^* \sum_{k,l} J(r_{kl}) P_{kl} \Psi d\omega =$$

$$= - \int \rho_N(r, r') J(|r - r'|) \rho_P^*(r, r') dr dr' \quad (11, 2)$$

Здесь  $\rho_N(r)$  и  $\rho_P(r)$  — плотности числа протонов и нейтронов Томаса-Ферми, а  $\rho_N(r, r')$  и  $\rho_P(r, r')$  — соответственные смешанные плотности Дирака,  $M$  — масса протона или нейтрона. У Томаса-Ферми:

$$\rho_N(r) = \frac{2}{h^3} \int_0^{P_N(r)} dp; \quad \rho_P(r) = \frac{2}{h^3} \int_0^{P_P(r)} dp, \quad (11, 3)$$

где  $P_N(r)$  и  $P_P(r)$  — максимальные импульсы нейтронов и протонов в точке  $r$ .

Элемент матрицы плотности можно записать в виде:

$$\rho(r, r') = \frac{1}{h^3} \int \int (p | \rho | p') e^{-\frac{ip'r'}{h}} e^{\frac{ipr}{h}} dp dp'. \quad (11, 4)$$

В случае, когда применима статистика Томаса-Ферми, эта формула может быть упрощена. Действительно,

$$-i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial r} = p\rho - \rho p;$$

считая  $\rho$  меняющейся медленно с  $r$  и пренебрегая величиной  $\hbar$ , получаем

$$p\rho - \rho p = 0.$$

Следовательно, в нашем приближении  $(p|\rho|p') = \rho(p)\delta(p - p')$ . Согласно (11,4) получаем

$$\rho(r, r') = \frac{1}{h^3} \int \rho(p) e^{\frac{ip(r-r')}{h}} dp.$$

Так как собственные значения  $\rho(r, r')$  равны 0 или 2, то

$$\rho(r, r') = \frac{2}{h^3} \int_0^{P\left(\frac{r+r'}{2}\right)} e^{i\frac{p(r-r')}{h}} dp,$$

где импульс  $P$  связан с плотностью  $\rho$  по формулам (11,3).

Пользуясь этими соотношениями, мы получаем выражение обменной энергии через обычную плотность  $\rho(r)$ :

$$E_{\text{пот}} = - \int \int dr dr' \frac{4}{h^6} \int_0^{P_N} dp \int_0^{P_P} dp' e^{i(p-p')(r-r')} J(|r' - r|). \quad (11, 5)$$

Если известна функция  $J$ , то эта формула дает возможность рас-



считать  $E_{\text{пот}}$  в приближении, соответствующем применимости метода Томаса-Ферми.

Из формулы (11,2) для предельного случая весьма большого числа частиц, при условии, что  $n_1 \gg n_2$ , получаем:

$$E_{\text{пот}} = -2n_2 J(0),$$

причем предполагается, что  $n_1$  настолько велико, что  $\rho_N(r, r')$  при удалении от точки  $r = r' = 0$  спадает к нулю быстрее, чем  $J(|r - r'|)$ .

Таким образом, применение функции в виде (10,1) приводит в случае большого числа частиц к пропорциональности между обменной энергией и числом протонов (при условии, что  $n_1 > n_2$ ). Это указывает на насыщение связей. Расчет, произведенный для сил Гейзенберга, дает вдвое меньшую обменную энергию.

Согласно формуле (11,5) потенциальная энергия может быть записана в виде:

$$E_{\text{пот}} = - \int dr f[\rho_N(r), \rho_P(r)], \quad (11,6)$$

причем  $f$  — функция, симметричная в  $\rho_N$  и  $\rho_P$ , обращающаяся в нуль при  $\rho_N = 0$  или  $\rho_P = 0$  и для больших чисел частиц  $n_1$  или  $n_2$  стремящаяся к  $2\rho_N J(0)$ , если  $n_1 < n_2$  и к  $2\rho_P J(0)$  при  $n_1 > n_2$ . Не раскрывая вида этой функции, можно уже сделать ряд заключений о строении ядра.

Если пренебречь кулоновой энергией, то полная энергия ядра есть

$$E = \int \left[ \frac{h^2}{M} \frac{4\pi}{3} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{5}{3}} (\rho_N^{\frac{5}{3}} + \rho_P^{\frac{5}{3}}) - f(\rho_N, \rho_P) \right] dr. \quad (11,7)$$

Плотности  $\rho_N$  и  $\rho_P$ , как функции координат ядра, найдем из условия минимума  $E$  при  $\int \rho_N dr = n_1$  и  $\int \rho_P dr = n_2$ . Это дает

$$\rho_N(r) = \text{const} = \frac{n_1}{V}; \quad \rho_P(r) = \text{const} = \frac{n_2}{V},$$

если  $V$  — объем ядра. Это значит, что плотность внутри ядра постоянна. Чтобы получить конечную массу ядра, приходится скачком обрвать плотность на поверхности его.

Таким образом

$$E = \frac{h^2}{M} \frac{4\pi}{3} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{5}{3}} (n_1^{\frac{5}{3}} + n_2^{\frac{5}{3}}) V^{-\frac{2}{3}} - Vf\left(\frac{n_1}{V}, \frac{n_2}{V}\right).$$

Из условия минимума энергии  $E$ , как функция объема  $V$  и отношения  $\frac{n_1}{n_2}$  при заданном  $n$ , получаем, что  $\frac{n_1}{n_2}$  постоянно для ядер любой массы. Это имело бы место и в природе при отсутствии кулонова отталкивания протонов, которого мы здесь не учитывали. Кроме того, отсюда следует, что объем ядер  $V$  пропорционален числу частиц  $n$ . Последнее хорошо согласуется с опытом. Вследствие этого, согласно (11,7), энергия связи ядер возрастает пропорционально их объему, а следовательно, и массе. Этот опытный факт мы были бессильны объяснить с помощью вигнеровых сил. Таким образом теория обменных сил качественно воспроизводит основные закономерности строения ядер.

## § 12. Количественные результаты решения по методу Томаса-Ферми

Если задать определенную форму закона  $J(r)$ , то можно вычислить вид функции  $f$  и дать количественные выводы. Взяв  $J = a'e^{-\frac{r}{\rho'}}$ , Гейзенберг вычислил  $f$ . Затем, пользуясь формулой (11,7) и условием минимума для  $E$ , он подобрал константы  $a'$  и  $\rho'$  таким образом, чтобы для ядер  $A_{18}^{40}$  и  $Se_{34}^{80}$  получилась правильная энергия связи. Им найдены следующие значения

$$a' = 25 \cdot 10^6 \text{ eV}; \quad \rho' = 8 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

что эквивалентно прямоугольной яме с параметрами

$$a'' = 17 \cdot 10^6 \text{ eV}; \quad \rho'' = 10 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Эти числа плохо согласуются с данными Вигнера и с результатами позднейших исследований. Энергия связи выражается в расчете Гейзенберга формулой:

$$\begin{aligned} \frac{E}{Mc^2} = & 0,00347n_2 - 0,0364n_1 + 0,01211 \frac{n_1^2}{n_2} + \\ & + n_2^{\frac{5}{3}} \left( 3,19 - 0,715 \frac{n_1}{n_2} \right) 10^{-4} + 0,049. \end{aligned} \quad (12,1)$$

Кривая зависимости энергии  $E$  от массы ядра удовлетворительно совпадает с опытом только для тяжелых ядер, так как для легких ядер не применим метод Томаса-Ферми.

Формула (12,1) дает возможность количественно обосновать рассуждения § 4. Действительно, условие  $\alpha$ -распада дается формулой:

$$-2 \left( \frac{\partial E}{\partial n_1} + \frac{\partial E}{\partial n_2} \right) + \Delta < 0,$$

где  $\Delta$  — дефект массы  $\alpha$ -частицы. Условия  $\beta$ - и позитронного распада суть:

$$-\frac{\partial E}{\partial n_1} + \frac{\partial E}{\partial n_2} + m_e c^2 < 0$$

и

$$-\frac{\partial E}{\partial n_2} + \frac{\partial E}{\partial n_1} + m_e c^2 < 0.$$

К сожалению, границы распада, даваемые этими формулами, очень плохо согласуются с данными опыта.

Таким образом ввиду качественного успеха дальнейшей задачей является количественное уточнение теории обменных сил.

### § 13. Учет поверхностного эффекта. Тяжелые ядра

Самая яркая непоследовательность в изложенной выше теории — это искусственный обрыв плотности на поверхности ядра. В действительности такой скачок плотности до нуля был бы возможен, если бы ядро находилось в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме, для возникновения которой однако нет никаких причин. Этот вывод не меняется при любом виде  $J(r)$ , взятой со знаком, соответствующим притяжению. Необходимость оборвать плотность появилась только вследствие приближенности метода расчета. А именно: метод Томаса-Ферми был бы вполне строг только для бесконечно больших ядер. Он предполагает столь медленно меняющиеся плотности, что на протяжении элементарного объема  $v_0$  (малого по сравнению со всем объемом, занятым системой, но вмещающим достаточно большое число частиц в классической картине) собственная функция системы может быть представлена в виде монохроматической волны.

$$\psi = \frac{1}{V v_0} e^{i \frac{pr}{\hbar}}.$$

Отсюда по формуле волновой механики

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{v_0} \int_{v_0}^P \frac{dp}{\hbar^3} \int_{v_0} dr \, 2 \frac{\hbar^2}{2M} |\text{grad } \psi|^2 \quad (13,1)$$

определяется плотность кинетической энергии, фигурирующая в теории Томаса-Ферми

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{v_0} \int_{v_0}^P \frac{dp}{\hbar^3} \int dr \, \frac{p^2}{M v_0} = \frac{4\pi}{5} \frac{P^5}{M \hbar^3} = \frac{4\pi}{5} \frac{\hbar^2}{M} \left( \frac{3\rho}{8\pi} \right)^{\frac{5}{3}}.$$

Если ввести уточнение, считая, что плотность заметно меняется и на протяжении элементарного объема  $v_0$ , т. е. положить

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{v_0}} [1 + (ar)] e^{\frac{i(pr)}{\hbar}},$$

то по формуле (13,1) плотность кинетической энергии есть (выкладки см. в работе Вейцзеккера <sup>9</sup>)

$$\begin{aligned} E_{\text{кин}} &= \frac{4\pi}{5} \frac{P^5}{M\hbar^3} + \frac{1}{4\pi^2\hbar M} \int [a(p)]^2 dp = \\ &= \frac{4\pi\hbar^2}{5M} \left(\frac{3\rho}{8\pi}\right)^{\frac{5}{3}} + \frac{\hbar^2}{32\pi^2 M} \frac{(\text{grad } \rho)^2}{\rho}. \end{aligned} \quad (13,2)$$

Второй член существенен в поверхностном переходном слое, где плотность частиц убывает до нуля. Благодаря изменению плотности на поверхности, имеется так же потенциальный эффект, аналогичный поверхностному натяжению жидкостей. Оба эффекта одного порядка величины. Вейцзеккер <sup>9</sup> учитывает только кинетический, так как весь метод не настолько точен, чтобы имело смысл усложнять вычисления. В таком случае, согласно формуле (13,2), плотность энергии в ядре равна

$$\begin{aligned} F &= \frac{\xi}{2} [(\text{grad } \psi_P)^2 + (\text{grad } \psi_N)^2] + \\ &+ \frac{\eta}{2} \left( \psi_P^{\frac{10}{3}} + \psi_N^{\frac{10}{3}} \right) - f(\psi_P^2, \psi_N^2), \end{aligned} \quad (13,3)$$

где

$$\xi = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 M}; \quad \eta = \frac{8\pi\hbar^2}{5M} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{5}{3}}; \quad \psi_P = \sqrt{\rho_P}; \quad \psi_N = \sqrt{\rho_N},$$

а  $f$  — функция, вычисленная Гейзенбергом по формуле (11,5) при предположении, что  $J = a' e^{-\frac{r}{r'}}$ . Формулой (13,3) и воспользовался Вейцзеккер, уточнив, таким образом, приведенный выше расчет Гейзенберга. Кинетическая энергия в этом расчете должна получиться большей, чем у Гейзенберга, а потому потенциальная яма будет более глубокой, что приблизит значение констант  $a'$  и  $r'$  к вигнеровым.

Как и в предыдущих задачах, теперь предстоит решение вариационной проблемы

$$E = \min \int F dr$$

при условии

$$\int (\psi_N^2 + \psi_P^2) dr = n.$$

Для упрощения Вейцеккер полагает  $\psi_P = \psi_N = \psi$  и пользуется методом Ритца. Для ядер более тяжелых, чем  $O^{16}_8$  оказывается возможным свести задачу к одномерной модели. Поэтому Вейцеккер берет

$$\psi = \begin{cases} \frac{\psi_0}{2} e^{\lambda x} & \text{при } x \leq 0 \\ \psi_0 \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}\right) & \text{при } x \geq 0 \end{cases} \quad (13,4)$$

Эта одномерная модель Вейцеккера дает внутри ядра постоянную плотность  $\psi_0^2$ , вычисляемую по методу § 11 — „майоранову плотность“, а на поверхности плавное спадание ее к нулю (рис. 7).

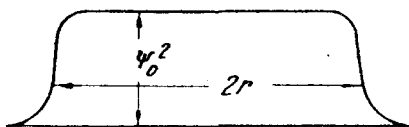


Рис. 7.

В (13,4)  $\lambda$  является варьируемым параметром. Кулонову энергию Вейцеккер вычислял по формуле энергии равномерно заряженного шара,

$$E_{\text{кул}} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r},$$

при этом  $r$  — радиус ядра, получаемый из расчета.

Значения параметров  $a'$ ,  $\rho'$ , майорановой плотности  $\psi_0^2$  и толщины переходного слоя  $d = \frac{1}{\lambda}$ , найденные из этого расчета, приведены в табл. 1. В таблице даны энергии, приходящиеся на одну частицу в ядре.

Таким образом полученная Вейцеккером глубина потенциальной ямы слишком велика, так как вигнерова уже правильно воспроизводила энергию  $He_2^4$ , а потому вейцеккеровы значения дали бы слишком большую энергию связи.

#### § 14. Учет поверхностного эффекта для легких ядер

Для легких ядер расчет § 11 и 12 давал совсем неверные результаты, так как для них особенно существенен поверхностный эффект. Последнее находит свое выражение в том, что если двигаться от  $O^{16}_8$  к более легким ядрам, то энергия связи, приходящаяся на одну частицу, непрерывно падает. Флюгге несколько изменил расчет

ТАБЛИЦА 1

| $\psi_0$ | $a'$<br>( $10^6$ eV) | $\rho'$<br>( $10^{-13}$ см) | $d = \frac{1}{\lambda}$<br>( $10^{-13}$ см) | Ядро            | $r$<br>( $10^{-13}$ см) | $E_{\text{объемн.}}$<br>( $10^6$ eV) | $E_{\text{поверхн.}}$<br>( $10^6$ eV) | $E_{\text{кул}}$<br>( $10^6$ eV) | $E_{\text{теор}}$<br>( $10^6$ eV) | $E_{\text{эксп}}$<br>( $10^6$ eV) |
|----------|----------------------|-----------------------------|---------------------------------------------|-----------------|-------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1,4      | 185                  | 1,03                        | 1,85                                        | $O_8^{16}$      | 4,06                    | — 14,8                               | 6,4                                   | 1,2                              | — 7,6                             | — 7,7                             |
| —        | —                    | —                           | —                                           | $Mo_{42}^{100}$ | —                       | — 14,8                               | 3,3                                   | 2,9                              | — 8,7                             | — 8,2                             |
| —        | —                    | —                           | —                                           | $Hg_{80}^{200}$ | 9,44                    | — 14,8                               | 2,6                                   | 4,2                              | — 8,1                             | — 7,7                             |

ТАБЛИЦА 2 \*

| элемент \ $a_0$ | 100      |      | 156      |      | 193      |      | 218      |      |
|-----------------|----------|------|----------|------|----------|------|----------|------|
|                 | $\rho_0$ | $R$  | $\rho_0$ | $R$  | $\rho_0$ | $R$  | $\rho_0$ | $R$  |
| $He_2^4$        | 1,76     | 2,72 | 1,27     | 2,32 | 1,10     | 2,20 | 1,00     | 2,08 |
| $Li_3^6$        | 1,64     | 3,20 | 1,17     | 2,78 | 1,04     | 2,62 | 0,94     | 2,47 |
| $C_6^{12}$      | 1,70     | 3,65 | 1,21     | 3,13 | 1,05     | 2,94 | 0,95     | 2,81 |
| $O_8^{16}$      | 1,74     | 3,87 | 1,19     | 3,35 | 1,04     | 3,17 | 0,94     | 3,02 |
| $Si_{14}^{28}$  | 1,67     | 4,58 | 1,19     | 3,92 | 1,03     | 3,67 | 0,93     | 3,48 |

\*  $\rho_0$  и  $R$  выражены в  $10^{-13}$  см, а  $a_0$  в  $10^6$  eV.

Вейцеккера, сделав возможным применение формулы (13,3) и к легким ядрам  $^{10}$ . У Вейцеккера толщина поверхностного слоя пели-ком определяется параметрами  $a'$  и  $\rho'$ . Поэтому отношение поверх-

ностного слоя к объему ядра пропорционально  $\frac{1}{R}$ , где  $R$ —радиус ядра, и для легких ядер можно совсем пренебречь областью постоянной майорановой плотности. Флюгге представляет распределение плотности в ядре, например, с помощью гауссовой кривой:

$$\psi = A e^{-\frac{r^2}{R^2}},$$

причем для упрощения считает  $V_{\rho p} = V_{\rho n} = \psi$ , что вполне точно выполняется для многих легких ядер. Коэффициент  $A$  определяется из условия нормировки:

$$A^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{Z}{R^3},$$

где  $Z$ —число частиц каждого сорта.  $A^2$  имеет смысл плотности в центре ядра. Приведенный ниже расчет Флюгге показал, что радиус ядра меняется приблизительно пропорционально  $\sqrt[3]{Z}$ . Поэтому в согласии с опытом и теорией Майорана (§ 11) плотность ядер получается почти независимой от их массы. Дальнейший расчет проводится по обычной вариационной схеме. Энергия связи ядра равна

$$E = \min 4\pi \int_0^{\infty} (E_{\text{кин}} + f) r^2 dr, \quad (14, 1)$$

где  $E_{\text{кин}}$  взята по формуле (13,2), а  $f$  вычисляется по формуле (11,5) и (11,6) для выбранного  $J(r)$ . Варьируемым параметром является радиус ядра  $R$ . Условие минимума есть

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial R} (E_{\text{кин}} + f) r^2 dr = 0. \quad (14, 2)$$

Выбрав определенный вид для обменного потенциала  $J$ , зависящего от двух параметров  $a_0$  и  $\rho_0$ , получаем, таким образом, два уравнения (14,1) и (14,2), содержащие величины  $E$ ,  $R$ ,  $a_0$  и  $\rho_0$ . Из опыта достаточно хорошо известна только энергия связи  $E$ . Поэтому нет необходимого числа условий для расчета интересующих нас констант. Задаваясь различными значениями глубины потенциальной ямы, мы можем получить только зависимость  $R$  и  $\rho_0$  для различных ядер от  $a_0$ . Если теория Вейцеккера не содержит внутреннего противоречия, то  $\rho_0$  не должно меняться от элемента к элементу при заданном  $a_0$ .

Флюгге получил результаты (при  $J = a_0 e^{-\frac{r^2}{\rho_0^2}}$ ), приведенные в таблице 2.

Пара значений, наиболее близкая к вейцеккеровской

$$a_0 = 193 \cdot 10^6 \text{ eV}; \quad \rho_0 = 1,04 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Таким образом теория Томаса — Ферми, дополненная поправкой на поверхностный эффект, дает экспериментальные значения энергии связи на протяжении всей периодической системы, начиная с лития, при  $a_0 \approx 190 \cdot 10^6 \text{ eV}$  и  $\rho_0 = 1,04 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$  Только для  $\text{He}_2^4$  получаются результаты, не согласующиеся со всеми остальными. Это вполне понятно. К  $\text{He}_2^4$  не применим уже статистический метод Ферми, так как все четыре частицы могут находиться в низшем энергетическом состоянии. Однако с вигнеровыми значениями здесь получается еще большее расхождение, чем в расчете Майорана — Гейзенберга. Как увидим ниже, несмотря на то, что вигнеровы значения лежат между майорановыми и вейцеккеровыми, оба последние расчета содержат неточности одного и того же характера.

### § 15. Осцилляторная модель легких ядер <sup>11</sup>

Метод Томаса — Ферми является нулевым приближением решения задачи Гартри — Фока. Учет поверхностного эффекта повышает точность расчета. Его можно считать своего рода „первым приближением“ в задаче Гартри — Фока. Дальнейшее уточнение приближенной задачи, поставленной в § 10, можно достичь, переходя непосредственно к методу Гартри — Фока.

Расчеты Флюгге показали, что для легких ядер нет смысла говорить об области постоянной майорановой плотности. Поскольку ширина ямы обменного потенциала получилась того же порядка величины, что и радиус легких ядер, то при удалении частицы от центра ядра на нее будет действовать все возрастающая сила притяжения к центру. Гейзенберг считает возможным аппроксимировать потенциал этой силы параболой. Тогда поведение каждой частицы в ядре может быть описано собственной функцией трехмерного осциллятора. Приближенное применение метода Гартри — Фока сводится к тому, что используется формула этой теории для полной энергии системы:

$$E = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \int \psi_i^* \frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla^2 \psi_i dr + \\ + \frac{e^2}{2} \int \frac{\rho_P(r) \rho_P(r') - |\rho_P(r, r')|^2}{|r - r'|} dr dr' + E_{\text{пот.}} \quad (15,1)$$

Последний член дает энергию взаимодействия протонов с нейтронами, вычисляемую по формуле (11,3). Гейзенберг использовал обменный потенциал в форме  $J = a_0 e^{-\frac{r^2}{\rho_0^2}}$  и провел расчет для трех



ядер  $\text{He}_2^4$ ,  $\text{O}_2^{16}$  и  $\text{Ca}_{20}^{40}$  для которых при осцилляторной модели получаются замкнутые оболочки.

Смешанную плотность

$$\rho_P(r, r') = \rho_N(r, r') = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{зан. сост.}}} \psi_n^*(r) \psi_n(r')$$

вычисляем непосредственно, подставляя собственные функции осциллятора в соответствующих состояниях. Поскольку характеристики „квазиупругой силы“ неизвестны, частота  $\nu$  осциллятора остается еще неопределенной. Ее мы используем в качестве варьируемого параметра при отыскании минимума  $E$ . Вычисляя

$$\delta E = 0$$

и приравняв  $E$  в (15,1) ее экспериментальному значению, получаем два уравнения, по которым для любого  $\nu$  можно вычислить соответствующую пару значений  $a$  и  $\rho$ .

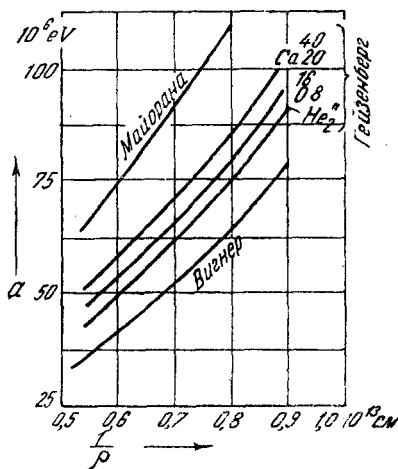


Рис. 8.

с кривой Гейзенберга для  $\text{Ca}_{20}^{40}$ ). Для тяжелых ядер кривые, вычисленные по этой осцилляторной модели, как и следовало ожидать, приближаются к кривой Майорана, так как оба эти метода совпадают в пределе при бесконечно тяжелых ядрах.

## § 16. Расчеты ядер. $\text{H}_1^3$ , $\text{He}_2^3$ и $\text{He}_2^4$

Значения параметров  $a$  и  $\rho$ , полученные в расчетах Гейзенберга (§ 12) и Вейцеккера (§ 13), весьма недостоверны.

Кривые, приведенные на рис. 8, показывают, что применение этой осцилляторной модели для легких ядер дает значительно лучшие результаты, чем метод Майорана, но все ухудшающиеся с увеличением атомного веса. Это и понятно. В более тяжелых ядрах уже можно говорить об области постоянной плотности, где вследствие короткодействующего характера сил между протонами и нейтронами отклонению от центра не будет препятствовать никакая сила. Но для легких ядер расчет Гейзенберга дает результаты, более близкие к точной кривой дейтона, чем метод Вейцеккера (§ 13) (кривая Флюгге приблизительно совпадает

Последние работы — Флюгге и осцилляторная модель Гейзенберга — дают только зависимость параметров друг от друга. Расчет Вигнера, как указывалось, дал результаты, сравнительно хорошо согласующиеся с данными опыта. Но он выполнен для потенциальных сил. Кроме того, этот расчет проведен лишь для ядер  $H_2^1$  и  $He_2^4$ . Если верна применяемая теория, то при тех же значениях параметров  $a$  и  $\rho$  должна правильно получиться энергия связи  $H_2^3$  и  $He_2^3$ . Согласно теореме, доказанной Эккартом<sup>12</sup>, расчет, проведенный для обменных сил, всегда дает меньшую энергию связи при тех же параметрах  $a$  и  $\rho$ , чем расчет с вигнеровыми силами. К сожалению, теорема Эккарта не дает возможности количественно оценить эту разницу. Поэтому существенно выполнить расчет и для ядер  $H_2^3$  и  $He_2^3$ , учитывая также обменный характер сил.

Совершенно очевидно, что наиболее точные результаты легче всего получить, решая задачу самых простых ядер.

Задача дейтона подробно разобрана нами в § 5 и 6.

Задачу триплона удастся решить уже только приближенно с помощью вариационного метода. Уравнение Шредингера для триплона в декартовых координатах имеет вид:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r_1, r_2, r_3) \right] \psi_0 = E \psi_0, \quad (16, 1)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от протона до обоих нейтронов, а  $r_3$  — расстояние между нейтронами. Отделив координаты центра тяжести, для части функции, зависящей только от относительных координат, получаем уравнение:

$$\begin{aligned} H\psi = & \left[ -\frac{\hbar^2}{m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2 + \nabla_1 \nabla_2) + \right. \\ & \left. + V(r_1, r_2, r_3) \right] \psi = E_T \psi, \end{aligned} \quad (16, 2)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_i^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \\ r_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \end{aligned} \right\} i = 1, 2$$

$$\nabla_1 \nabla_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}$$

и

$$r_{3,2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Согласно развитым выше представлениям

$$V(r_1, r_2, r_3) = P_1 J(r_1) + P_2 J(r_2) + P_3 I(r_3),$$

где  $P_i$  — оператор перестановки координат соответствующих частиц, а  $I(r_3)$  — потенциальная функция, описывающая взаимодействие одноименных частиц. Последнее, очевидно, мало.

Расчет энергии связи триплона приводит, таким образом, к решению вариационной задачи

$$E_T = \min \frac{\int \psi^* H \psi dv}{\int |\psi|^2 dv}, \quad (16, 3)$$

где оператор  $H$  определен уравнением (16,2). Если приравнять  $E_T$  ее экспериментальному значению  $8 \cdot 10^6$  eV, то соотношение (16,3) дает уравнение, связывающее параметры  $a$  и  $\rho$ . Точка пересечения этой кривой  $a = F(\rho)$  с кривой дейтона (рис. 4) определит искомые значения этих параметров. Правильная теория должна дать при решении задачи любого другого ядра соответствующую кривую, пересекающуюся с первыми двумя в одной и той же точке.

Решение вариационной задачи для триплона,  $He_2^3$  и  $He_2^4$  и сравнение обменных сил с вигнеровыми даны в работе Финберга<sup>13</sup>. К сожалению, он пользуется уже для расчета  $a = f(\rho)$  в задаче дейтона приближенным интегрированием и потому получает слишком медленное увеличение глубины ямы  $a$  при уменьшении ее ширины  $\rho$ . Согласно соотношению неопределенности средняя кинетическая энергия  $E_k$  частицы, заключенной в область ширины  $\rho$ , определяется формулой

$$E_k \rho^2 \gg \frac{\hbar^2}{2m}.$$

Для того чтобы частица оставалась в ядре, глубина потенциальной ямы  $a$  должна быть больше  $E_k$ , т. е., если  $c > 1$ , то необходимо, чтобы  $a$  увеличивалась при уменьшении  $\rho$  не медленнее, чем по условию

$$a \rho^2 = c \frac{\hbar^2}{2m} = \text{const.}$$

Между тем у Финберга  $a \rho^{\frac{3}{2}} = \text{const.}$  Поэтому для узких потенциальных ям Финберг получает отталкивание вместо связи.

Для дейтона он решает вариационную задачу

$$E_D = \min \int \psi^* H \psi dv,$$

пользуясь функцией

$$\psi = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} r e^{-\frac{\nu r^2}{2}},$$

где  $\nu$ —варьируемый параметр. Точно так же он ставил задачу триплону,  $\text{He}_2^3$  и  $\text{He}_2^4$ , пользуясь функциями:

$$\psi(1, 2, 3) = u(12) u(13) v(23)$$

для ядра, состоящего из трех частиц, и

$$\psi(1, 2, 3, 4) = u(13) u(14) u(23) u(24) v(12) v(34)$$

для ядра  $\text{He}_2^4$ , причем

$$u = N e^{-\frac{\nu r^2}{2}}; \quad v = N e^{-\frac{\mu r^2}{2}}.$$

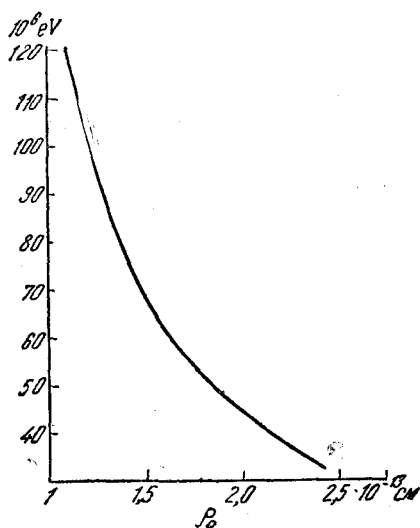


Рис. 9.

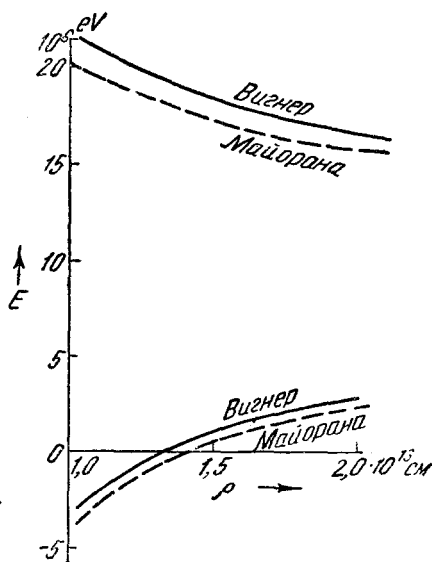


Рис. 10.

Здесь  $\nu$  и  $\mu$ —новые варьируемые параметры. Кулоново отталкивание он учитывает с помощью невозмущенных волновых функций. Все вычисления проведены в первом приближении как для сил Майорана, так и для сил Вигнера. Обменный потенциал взят в форме  $J = a_0 e^{-\frac{r^2}{r_0^2}}$ .

Результаты его расчетов следующие: для дейтона, полагая  $E_D = 2 \cdot 10^6 \text{ eV}$ , он получает связь  $a_0$  с  $\rho_0$ , данную кривой на рис. 9.

Нижние кривые на рис. 10 изображают ход энергии связи триплона, вычисленной по Вигнеру (сплошная линия) и Майорана (пунктир). Верхние кривые дают энергию связи ядра  $\text{He}_2^4$ . Таким образом ни для одного ядра кривые не достигают экспериментального значения энергии связи ( $8 \cdot 10^6$  eV для  $\text{H}_3^3$  и  $27 \cdot 10^6$  eV для  $\text{He}_2^4$ ). Для  $\text{H}_3^3$  получается даже качественно неверная зависимость энергии связи от ширины ямы. На самом деле, Томас<sup>14</sup> доказал для широкого класса функций  $J(r)$ , что при достаточно хорошем подборе варьируемой функции можно получить такую связь  $E_T$  с  $\rho$ , что при стремлении  $\rho$  к нулю будет неограниченно возрастать энергия связи триплона. Обратный результат расчета Финберга—отталкивание при малых  $\rho$ —объясняется в первую очередь использованием неточного решения дейтона.

С помощью формул, которыми пользуется Экарт при выводе своей теоремы, можно оценить, что расхождение между вигнеровой и майорановой энергией увеличивается при сужении потенциальной ямы. Расчет Финберга подтверждает эту оценку и может служить для ориентировки в порядке величины этого расхождения.

Большого успеха в решении этой задачи достигли Мэсси и Мор<sup>15</sup>. Исходя из гипотезы существования в ядре только вигнеровых сил притяжения между разноименными частицами, они выполнили ряд расчетов с различными варьируемыми функциями и обменными потенциалами  $J(r)$ . Собственная функция триплона бралась в виде

$$\Psi = \psi(r_1)\psi(r_2)\{1 + f(r_1, r_2, \theta)\},$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — расстояние от протона до каждого из нейтронов, а  $\theta$  — угол между  $r_1$  и  $r_2$ . Все расчеты, при которых  $\psi$  не являлось точным решением диплона, привели к совершенно неудовлетворительным результатам, наподобие расчетов Финберга. При  $\psi$ , взятой из точного решения задачи диплона для прямоугольной потенциальной ямы и функции

$$f = \gamma r_1 r_2 \cos \theta, \quad (16, 4)$$

где  $\gamma$  — варьируемый параметр, получились несколько лучшие результаты. Но экспериментальное значение энергии связи не достигнуто. При стремлении к нулю ширины ямы энергия связи получалась возрастающей, но асимптотически стремящейся к значению в  $5,4 \cdot 10^6$  eV, в то время как экспериментальное значение есть  $8 \cdot 10^6$  eV.

Интересно отметить, что наилучшие результаты достигнуты с помощью функции (16,4), которая при получающемся из расчета положительном значении  $\gamma$  дает наибольшую вероятность  $|\psi|^2$  при  $\theta=0$ , т. е. максимальная энергия связи получается при той функции, которая дает наиболее вероятным как можно более близкое положение нейтронов друг от друга.

Заключение Массея и Мора, а также и Финберга о необходимости наличия значительных сил притяжения между одноименными частицами является преждевременным. Принципиально ничто не исключает возможности существования сил притяжения между одноименными частицами, но эти силы должны быть много меньше сил притяжения разноименных частиц, так как иначе пропадает возможность объяснения условий возникновения  $\beta^+$  и  $\beta^-$ -распада, а также того опытного факта, что у устойчивых легких ядер  $A \approx 2Z$ .

Недавно появилось сообщение о расчете ядра  $H_1^3$  Презентом <sup>16</sup>. Он использовал восемь варьируемых параметров, представляя собственную функцию ядра в виде произведения экспоненты на степенной многочлен с варьируемым коэффициентом. Несмотря на высокое приближение, он получил тоже слишком малую энергию связи. При  $\rho'' = 0,7 \cdot 10^{-13}$  см (эквивалентная ширина прямоугольной ямы) у него  $E_T = -5,3 \cdot 10^6$  eV. Однако и этот результат не дает еще права вводить значительные силы притяжения одноименных частиц. Быстрая сходимость ряда могла оказаться кажущейся.

До настоящего времени согласие с теоремой Томаса получено только в расчете Тамма и Головина <sup>17</sup>. Ход этого вариационного расчета таков же, как у Мэсси и Мора, только в задаче триплона взят иной вид варьируемой функции. Для удобства вычислений использована прямоугольная потенциальная яма ширины  $\rho''$  и глубины  $a''$ , т. е. положено

$$\left. \begin{aligned} J(r) &= a'' \quad \text{при } r < \rho'' \\ J(r) &= 0 \quad \text{при } r > \rho'' \end{aligned} \right\} \quad (16, 5)$$

и силы считаются вигнеровыми. Взаимодействием одноименных частиц пренебрегается. Задача триплона решена по методу Ритца в первом приближении, причем взята собственная функция в виде

$$\Psi = \psi(r_1)\psi(r_2)e^{-\alpha r_3}.$$

Здесь  $\psi$  — точное решение уравнения Шредингера для дейтона при прямоугольной яме, а  $\alpha$  — варьируемый параметр. Согласно обычному вариационному соотношению в этом случае имеем:

$$E_T = \min \frac{\int \Psi^* H \Psi dv}{\int |\Psi|^2 dv} = 2E_D + \min \frac{\int \Psi^* \Omega \Psi dv}{\int |\Psi|^2 dv},$$

где

$$\Omega = -\frac{\hbar^2}{m} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r_3^2} + \frac{2}{r_3} \frac{\partial}{\partial r_3} + S \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2}{2r_1 r_2} \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} \right\}.$$

$S$  означает здесь сумму круговых подстановок индексов 1, 2, 3.

Расчет показывает, что  $E_T$  достигает минимума при некотором положительном значении параметра  $\alpha$ , т. е., как и в расчете Мэсси и Мора, наиболее вероятны небольшие расстояния между нейтронами.

Если пользоваться связью  $a''$  с  $\rho''$ , даваемой точным решением дейтона и представленной на рис. 4, то, в согласии с теоремой Томаса,  $E_T$  в этом расчете не только достигает экспериментального значения  $E_T = 8 \cdot 10^6$  eV, но и превосходит его при достаточно узкой яме (рис. 11).

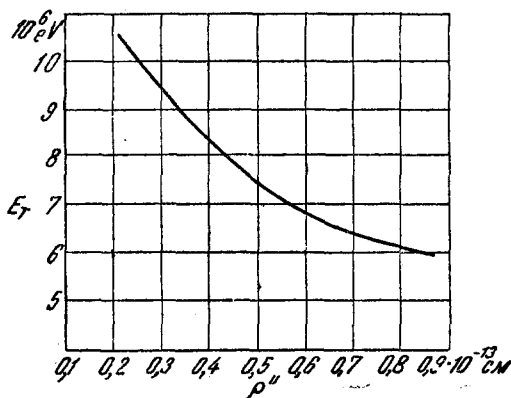


Рис. 11.

Значения параметров, найденные в этом расчете, суть:

$$a'' = -600 \cdot 10^6 \text{ eV}; \quad \rho'' = 0,44 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Эти значения малоудовлетворительны. Наиболее вероятные значения для  $a''$  — это  $100 - 150 \cdot 10^6$  eV и, соответственно, для  $\rho''$ :  $0,8 - 1,0 \cdot 10^{-13}$  см. Несомненно, что повышение точности расчета триплона сильно уменьшит глубину и увеличит ширину ямы. При глубине в  $600 \cdot 10^6$  eV становятся существенными релятивистские эффекты, например поправка в массе достигает 80%. Поэтому нерелятивистский расчет перестает быть применимым.

Выше было отмечено, что во всех расчетах триплона получается наибольшая вероятность близкого расположения нейтронов друг от друга. Это, однако, не является результатом неявного введения сил притяжения их друг к другу. Отмеченный эффект имеет чисто кинетическое происхождение и обусловлен наличием члена  $\nabla_1 \nabla_2$  в уравнении (16,2). Сказанное становится особенно ясным при рассмотрении „осцилляторной модели“ ядра  $\text{H}_3^+$ . Действительно, предположим, что две частицы 1 и 2 массы  $m$  связаны квазиупругими силами с третьей частицей 3 такой же массы, а между собой не взаимодействуют, тогда, переходя к нормальным координатам, мы

можем проинтегрировать уравнение (16,2) совершенно точно. Собственная функция дает опять более вероятными близкие положения частиц 1 и 2 друг от друга, чем удаленные. Если же вычеркнуть член  $\nabla_1 \nabla_2$ , что соответствует переходу к описанию колебания двух независимых пар частиц, каждая с массой  $m$ , то энергия системы повышается, и собственная функция делается независимой от расстояния между частицами 1 и 2. Таким образом кинетический член  $\nabla_1 \nabla_2$  играет роль, аналогичную силам притяжения между „одноименными“ частицами 1 и 2. Поэтому в задаче триплона варьируемая функция обязательно должна зависеть от  $r_3$  и возра-  
 стать при  $r_3 \rightarrow 0$ .

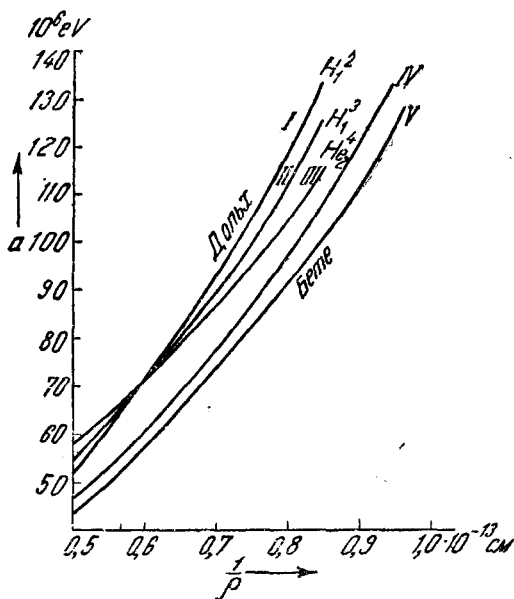


Рис. 12.

Последняя работа по разбираемому вопросу — это расчет Дольха<sup>18</sup> ядер  $H_1^3$ ,  $H_2^3$  и  $H_2^4$ . Однако полученные им результаты фиктивны. Дольх провел вычисления для обменных сил, пользуясь потенциальной функцией в той же форме, что и у Финберга:

$$J(r) = a_0 e^{-\frac{r^2}{\rho_0^2}}.$$

При таком виде  $J$  аналитически не интегрируется даже уравнение дейтона. Поэтому Дольх вычисляет энергии связи ядер  $H_1^3$ ,  $H_1^3$  и  $H_2^4$  с помощью вариационного метода и получает соответственно три кривые, дающие зависимость  $a_0$  от  $\rho_0$ . Они пересекаются друг с другом почти в одной точке (рис. 12). Отсюда



он заключает, что искомые значения параметров суть:

$$\alpha_0 = 70 \cdot 10^6 \text{ eV}; \quad \rho_0 = 1,7 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Однако, пересечение всех трех кривых в этой точке является лишь случайностью, обусловленной плохим выбором варьируемой функции. Функция, взятая им для дейтона,

$$\psi = \alpha e^{-\beta r^2}$$

( $\beta$  — варьируемый параметр) хорошо ведет себя только в точке  $r=0$ . Асимптотический ход ее совершенно неправилен. Как легко видеть из асимптотической формы уравнения дейтона (6,1), при  $r \rightarrow \infty$  собственная функция должна иметь вид:

$$\psi_{r \rightarrow \infty} = \frac{e^{-\alpha r}}{r},$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{mE_D}{\hbar^2}}.$$

Из расчета Тамма и Головина видно, что для энергии связи наиболее существенно поведение функции в области, где  $r > \rho$ . Поэтому функция

$$\psi = \frac{e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}}{r},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — варьируемые параметры, должна дать значительно более верные результаты, несмотря на более плохое поведение ее в точке  $r=0$ . Вариационный расчет, при котором варьировался только параметр  $\beta$ , а  $\alpha$  полагалось равным  $\sqrt{\frac{mE_D}{\hbar^2}}$ , дает кривую  $IV$ , изображенную на рис. 12. Эта кривая значительно ближе к истинной кривой дейтона  $V$  (полученной Бете<sup>19</sup> путем численного интегрирования уравнения дейтона), чем кривая Дольха. Это еще раз подтверждает сделанное выше замечание, что в вариационных задачах ядер надо брать варьируемые функции, имеющие правильный ход при  $r \gg \rho$ . В области  $r \ll \rho$  поведение их менее существенно, но должно удовлетворять естественным условиям (однозначность, конечность, непрерывность).

Как видно из чертежа, точная кривая Бете может пересекаться с кривой  $\text{He}_2^4$ , вычисленной Дольхом, только около точки  $\sim 200 \cdot 10^6 \text{ eV}$ . Исходя из этого чертежа, вообще нельзя сказать, пересечется ли дольхова кривая триплтона с кривой Бете. Несомненно, что повышение точности расчета триплтона и  $\text{He}_2^4$  сместит кривые II и III вниз. Но где при этом окажется точка пересечения их, — пока судить невозможно.

Ядро  $\text{He}_2^3$  отличается от ядра  $\text{H}_1^3$  только наличием в первом кулонова отталкивания. Все расчеты упомянутых выше авторов показывают, что кулонова энергия

$$E_{\text{кул}} = \frac{\int |\Psi|^2 \frac{1}{r} dv}{\int |\Psi|^2 dv},$$

где  $\Psi$  — невозмущенная волновая функция триплона, близка к требуемой экспериментом разнице энергии связи триплона и  $\text{He}_2^3$  ( $\sim 10^6$  eV). Следовательно, это ядро не таит в себе новых трудностей.

Итак, задача ядер  $\text{H}_1^3$  и  $\text{He}_2^4$  до сих пор не решена удовлетворительно. Имеющихся данных еще недостаточно, чтобы решить — обусловлены ли расхождения и неудачи различных расчетов только неточностью вычислений или неверны используемые гипотезы о внутриядерных силах. Ближайшей задачей является повышение точности расчета. Только это может решить вопрос, но отнюдь не введение дополнительных сил, как например силы притяжения одноименных частиц при использовании тех же методов вычисления.

## § 17. Пути усовершенствования теории

Таким образом развитая выше теория только в порядке получаемых величин согласуется с опытом. Результаты различных расчетов существенно расходятся между собой. Если учитывать принцип Паули и группирование протонов и нейтронов в  $\alpha$ -частицы, то качественно объясняется и тонкая структура кривой дефектов масс.

Чем же можно объяснить количественное несогласие с опытом и между собой в приведенных расчетах?

Зависимость параметра  $a$  от  $\rho$  получена из решения задачи дейтона с максимальной точностью, которую можно требовать от нерелятивистской теории. Во всех остальных работах мы имеем не только приближенную формулировку задачи, но и решение в первом приближении вариационного метода. Для тяжелых ядер не следует ожидать существенного улучшения от более точного вариационного расчета, так как само написание собственной функции в виде произведения детерминантов является плохим приближением к действительности. В самом деле, для процессов столкновения нейтронов с ядрами Бору<sup>20</sup> пришлось допустить, что решающее значение в жизни ядра имеет обмен энергией между частицами. Поэтому нельзя описать поведения отдельной частицы в ядре с помощью только ее координат. Здесь существенны свойства коллектива частиц. Поэтому неверно предположение, сделанное в § 10, что взаимодействие выделенной частицы со всеми остальными можно приближенно заменить некоторым консервативным полем. Следовательно, недопустимо написание функции ядра в форме (10,1).

Расхождение результатов приведенных расчетов с точным решением дейтона можно считать подтверждением высказанной точки зрения.

Гейзенберг считает, что метод Гартри можно было бы уточнить для ядра, если учесть группировку протонов и нейтронов в  $\alpha$ -частицы. В тяжелых ядрах должно быть учтено, что протоны связаны лишь с близлежащими нейтронами, независимо от положения частиц вдали. Надо также принять во внимание, что наиболее вероятно такое расположение частиц, при котором каждый протон окружен нейтронами.

В расчетах ядер  $H_1^3$ ,  $He_2^3$  и  $He_4^4$  возможно еще совершенствование вариационного метода путем выбора более подходящих варьируемых функций. Но наиболее точен путь, намеченный Томасом. К сожалению, уже для ядра  $H_1^3$  он сопряжен с большими математическими трудностями. Этот путь состоит в следующем. Если взять достаточно крутую потенциальную яму, то все пространство окажется разбитым на две области:

1) область, где  $J=0$ . В ней собственная функция триплтона должна удовлетворять уравнению

$$(\nabla_1^2 + \nabla_1 \nabla_2 + \nabla_2^2) \psi = \mu \psi.$$

2) область, где  $J \neq 0$ . В этой области  $\psi$  должна удовлетворять уравнениям типа

$$(\nabla_1^2 + \nabla_1 \nabla_2 + \nabla_2^2 + cJ) \psi = \mu \psi.$$

Особую трудность представляет при этом удовлетворение граничных условий, так как функция одной области должна непрерывно и без разрыва первой производной переходить в функцию второй области.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. См. например, М. И. Корсунский, „Нейтрон“, стр. 153.
2. W. Heisenberg, Z. Physik, **77**, 1, 1932.
3. W. Heisenberg, Z. Physik, **78**, 156, 1932.
4. E. Wigner, Phys. Rev., **43**, 252, 1933.
5. W. Heisenberg, Z. Physik, **80**, 587, 1933.
6. E. Majorana, Z. Physik, **82**, 137, 1933.
7. W. Heisenberg, „Noyaux atomiques“. Доклад на Сольвеевском конгрессе 1933 г., стр. 289.
8. P. A. M. Dirac, Proc. Cambr. Phil. Soc., **23**, 376, 1930.
9. C. F. v. Weizsäcker, Z. Physik, **96**, 431, 1935.
10. S. Flügge, Z. Physik, **96**, 459, 1935.
11. W. Heisenberg, Z. Physik, **95**, 473, 1935.
12. Eckart, Phys. Rev., **44**, 109, 1933.
13. E. Feenberg, Phys. Rev., **47**, 850, 857, 1935.
14. Thomas, Phys. Rev., **47**, 903, 1935.
15. Massey a. Mohr, Proc. Roy. Soc., (A) **152**, № 877, 1935.
16. Present, Phys. Rev., **49**, 640, 1936.
17. Головин, Журн. теорет. и эксперим. физики **6**, 508, 1936.
18. Doitch, Z. Physik, **100**, 401, 1936.
19. H. A. Bethe a. R. F. Bacher, Rev. of Modern. Phys. **8**, 111, 1936.
20. N. Bohr, Nature, February 29, 1936.