

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

Физ101



ТЕОРИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ *

Л. Нордгейм

III. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКА СТАТИСТИКИ. ТЕОРИЯ ЛОРЕНЦА
ЗОММЕРФЕЛЬДА **

§ 1. Подсчет соударений в квантовой теории

В предыдущих рассуждениях мы употребляли статистический метод. Задача состояла в том, чтобы из всех возможных состояний электронного газа в металле найти наиболее вероятное. Вопрос о механизме установления такого наиболее вероятного распределения не затрагивался вовсе, и поэтому весь метод оказывается непригодным для изучения процессов, при которых изменяется состояние системы. Сюда относятся в частности все явления, связанные с наличием токов. В классической физике этот пробел восполняется кинетической теорией, которая позволяет изучать временные изменения функции распределения. Цель настоящей главы состоит в изложении соответствующей теории для квантовой статистики.

При помощи Н-теоремы Больцмана в теории газов доказывается, что в изолированной системе всегда устанавливается максвелловское распределение. В основе этого вывода лежат два положения: механический закон соударений и гипотеза молекулярного хаоса, согласно которой близкие молекулярные состояния в среднем встречаются одинаково часто. Из этих положений вытекает классическое выражение для числа соударений, которое с необходимостью приводит к максвелл-больцмановской статистике.

Однако известно, что последняя должна быть изменена либо статистикой Эйнштейна-Бозе, либо Ферми-Дирака. Следовательно, и классический подсчет соударений не может быть верен, и необходимо исследовать, как он должен быть изменен в квантовой теории. Для этого прежде всего сформулируем старый метод подсчета в духе квантовой механики.

Пусть ряд возможных стационарных состояний отдельной частицы характеризуется энергией $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k$. Пусть далее имеется некоторое распределение N_s по отдельным интервалам энергии $\Delta \epsilon_s$:

* Müller-Pouillet, IV, 11-е изд., перевод С. Г. Калашникова.

** См. Успехи физических наук 15, 570, 1935, 15, 675, 1935.

число ячеек в интервале — A_i . (Попрежнему $N_s = A_s n_k$, где n_k — наимвероятнейшее число частиц в состоянии k . Все рассуждения можно вести как с величинами N_s , так и с n_k .) Взаимодействие между частицами можно просто учесть, если чисто формально ввести вероятность перехода. Для случая взаимодействия двух частиц (соударение) можно говорить о вероятности $V_{r'k'}^{ik}$ того, что в течение секунды произойдет квантовый скачок из ячеек i, k в ячейки i', k' . Само понятие элементарной вероятности еще не является специфичным для квантовой теории и может быть с успехом использовано для подсчета соударений и в классической теории.

Обычно принимается, что при начальном заполнении интервалов (перед ударом) N_r и N_s число переходов в интервалы r' и s' может быть выражено следующим образом:

$$W_{r's'}^{rs} = V_{r's'}^{rs} N_r N_s A_r A_s. \quad (1)$$

При этом считают, что все $V_{r's'}^{rs}$ почти не отличаются друг от друга, если i все время лежит внутри интервала r , а k, i', k' — внутри s', r', s' . Величины A_r, A_s рассматриваются как заданные константы. Заметим, что число переходов может быть записано и в таком виде:

$$W_{r'k'}^{ik} = V_{r'k'}^{ik} n_i n_k,$$

где n имеет указанное выше значение. При этом

$$W_{r's'}^{rs} = A_r A_s A_r A_s W_{r'k'}^{ik}. \quad (1a)$$

Как показывает выражение (1), число соударений зависит только от степени заполнения начальных состояний.

Элементарные вероятности $V_{r's'}^{rs}$ могут быть вычислены из закона силового взаимодействия между частицами. При очень общих предположениях можно показать*, что $V_{r's'}^{rs} \neq 0$ только в тех случаях, когда выполняется закон сохранения энергии:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_s = \varepsilon_{r'} + \varepsilon_{s'}, \quad (2)$$

и что вероятности прямых и обратных переходов одинаковы:

$$V_{r's'}^{rs} = V_{r's}^{r's'}. \quad (3)$$

Последний результат соответствует обратимости механических процессов в классической теории.

Основное выражение (1) неизбежно приводит к классической статистике. Действительно, статистическое равновесие будет достигнуто только тогда, когда частота прямых и обратных процессов одинакова. Это дает соотношение:

$$A_r A_{s'} V_{r's'}^{rs} N_r N_s = A_r A_s V_{r's}^{r's'} N_r N_{s'}.$$

* См., например, работу Паули¹. Там же предискутирован вопрос о том, чем должна быть заменена в квантовой механике гипотеза молекулярного хаоса. Следует отметить, что соответствующее предположение уже содержится в соотношении (1).

которое на основании (3) может быть написано в следующем виде:

$$\frac{N_r N_s}{A_r A_s} = \frac{N_{r'} N_{s'}}{A_{r'} A_{s'}}.$$

Учитывая соотношение (2) и поступая затем обычным способом, мы приходим к максвелл-больцмановскому распределению:

$$\frac{N_r}{A_r} = n_r = C e^{-\beta \epsilon_r}.$$

Для статистики Ферми-Дирака характерным является ограничение, вносимое принципом Паули. Отсюда следует, что не может быть таких процессов, при которых частица могла бы попасть в занятую ячейку. Если не все ячейки интервала конечных состояний свободны, то нужно учитывать лишь те процессы, которые приводят к незанятым конечным состояниям. Это обстоятельство можно учесть количественно, если ввести в выражение (1) дополнительный множитель $1 - \frac{N_{s'}}{A_{s'}}$ (или $1 - n_{s'}$), дающий отношение числа свободных ячеек к полному их числу в данном интервале. Тогда для числа соударений получается следующее выражение:

$$W_{r's'}^{rs} = V_{r's'}^{rs} N_r N_s A_{r'} \left(1 - \frac{N_{r'}}{A_{r'}}\right) A_{s'} \left(1 - \frac{N_{s'}}{A_{s'}}\right). \quad (4)$$

Соответствующая модификация закона в статистике Эйнштейна-Бозе не может быть проведена так наглядно. Качественно, однако, ясно, что поправка должна привести к увеличению вероятности переходов, для которых конечное состояние уже занято. Такой результат получается потому, что комплексы, в которых конечное состояние охватывает больше, нежели одну частицу, обладают и большим статистическим весом по сравнению с больцмановской статистикой (см. пример 5, ч. 1, § 3); такие распределения должны поэтому осуществляться чаще. Число соударений и здесь будет зависеть от степени заполнения конечных состояний. Простейшую форму возможной поправки мы получим, заменив в приведенном выше поправочном множителе знак минус на плюс (см. формулу 4). Истолкование такого поправочного члена может быть дано в теории излучения Эйнштейна² (статистика фотонов); его форма связана с наличием вынужденного испускания, т. е. с усилением общей эмиссии в том случае, когда уже имеются фотоны с излучаемой частотой.

Рассмотрим теперь общий случай процесса, при котором произвольное число частиц переходит из области состояний $s_1, s_2, \dots$ в $s_1', s_2', \dots$. Тогда число соударений (частота наступления процесса) будет дано выражением:

$$W_{s_1' s_2' \dots}^{s_1 s_2 \dots} = V_{s_1' s_2' \dots}^{s_1 s_2 \dots} N_{s_1} N_{s_2} \dots (A_{s_1'} - \gamma_1 N_{s_1'}) (A_{s_2'} - \gamma_2 N_{s_2'}) \dots \quad (5a)$$

или

$$W_{k_1' k_2' \dots}^{k_1 k_2 \dots} = V_{k_1' k_2' \dots}^{k_1 k_2 \dots} n_{k_1} n_{k_2} \dots (1 - \gamma_1 n_{k_1'}) (1 - \gamma_2 n_{k_2'}) \dots \quad (5b)$$

Здесь γ_i — введенный в ч. 1, § 4 символ, имеющий в каждой из трех статистик свое значение. В общем случае в процессе могут участвовать частицы, принадлежащие к различным статисти-

кам (примером может служить взаимодействие фотонов и электронов). Поэтому символ γ снабжен индексом. Элементарная вероятность V зависит только от характера взаимодействия, но не зависит вовсе от специального вида функций распределения. Для элементарной вероятности и здесь должно выполняться соотношение взаимности (3).

Новое выражение для числа соударений выглядит настолько непривычно, что могло бы возникнуть, пожалуй, даже недоверие к тем наглядным и простым рассуждениям, которые мы положили в основу его вывода. Поэтому чрезвычайно важно, что этот закон может быть выведен и непосредственно из общих принципов квантовой механики. Здесь мы укажем только общий ход рассуждений. Система в целом может быть описана одной единственной шредингеровской функцией, в которую войдут в качестве переменных все координаты отдельных частиц $q_1, q_2, \dots, q_i$ (q_i — координата i -й частицы). Гамильтонова функция всей системы должна быть симметрична по отношению к отдельным частицам; она может быть записана в следующем виде:

$$H(q_1 \dots q_i \dots) = \sum_i H_0(q_i) + \sum_{ik} H_1(q_i q_k) + \sum_{ikl} H_2(q_i q_k q_l) + \dots \quad (6)$$

Здесь H_0 — энергия одной единственной частицы, в предположении, что остальных частиц нет вовсе. H_1 выражает взаимодействие каждой пары частиц (например кулоновские силы). Суммирование H_0 производится по всем отдельным частицам, по H_1 — по всем парам частиц и т. д. Все функции H_0 , все функции H_1 и т. д. являются одинаковыми функциями своих аргументов; этим и осуществляется симметрия полной функции (6) по отношению ко всем частицам. Этим же самым обеспечивается и распадение решений уравнения Шредингера на различные классы симметрии, свойственные каждой из статистик. Если взаимодействие мало, то в (6) преобладающую роль будет играть только первый член, а высшие члены можно рассматривать как малое возмущение. В этом случае полная шредингеровская функция может быть представлена в виде разложения по собственным функциям невозмущенной системы. Для последних следует брать, конечно, только функции нужной симметрии, т. е. либо функции (3) (ч. 1, § 2), либо (4) в зависимости от того, с какой из статистик мы имеем дело. Для соответствующей проблемы возмущения можно положить:

$$\psi(q_1 \dots t) = \sum a_{k_1 k_2 \dots}(t) \dots \psi_{k_1 k_2 \dots}(q_1 \dots). \quad (7)$$

Каждое из $\psi_{k_1 k_2 \dots}$ соответствует тому случаю (ч. 1, § 2), когда одна частица находится как раз в состоянии k_1 , вторая — в состоянии k_2 и т. д.; иными словами, каждая функция ψ описывает одно, вполне определенное состояние полной системы. Квадраты коэффициентов в (7) дают вероятность того, что система в момент времени t будет находиться в соответствующем состоянии. Применяя к этим коэффициентам $a_{k_1 k_2 \dots}$ обычный метод теории возмущения, оказывается возможным выразить результат при помощи вероятности перехода, которая при этом и получается в форме соотношения (5). Фактор $(1 - \gamma_{kk'})$ входит при этом совершенно автоматически. Изложенный здесь результат для случая статистики Эйнштейна-Бозе был получен Дираком³; соответствующие расчеты для статистики Ферми-Дирака (и их обобщение) были даны Иорданом и Вигнером^{4,5}.

§ 2. Н-ТЕОРЕМА

С новым выражением для числа соударений оказывается возможным оперировать в точности так же, как и с классическим*.

* См. работы Нордгейма⁶ и Паули¹. В последней работе разобран также важный для статистики фотонов случай, когда число частиц во время процесса не остается постоянным.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие процессы, в которых участвуют всего две частицы и притом подчиняющиеся одной и той же статистике. В состоянии равновесия условие одинаковой повторяемости компенсирующих процессов

$$W_{r's'}^{rs} = W_{rs}^{r's'}$$

может быть записано согласно § 1 (5а) в виде:

$$N_r (A_{r'} - \gamma N_{r'}) N_s (A_{s'} - \gamma N_{s'}) = N_{r'} (A_r - \gamma N_r) N_s (A_s - \gamma N_s),$$

или, что то же:

$$\left(\frac{A_{r'}}{N_{r'}} - \gamma \right) \left(\frac{A_{s'}}{N_{s'}} - \gamma \right) = \left(\frac{A_r}{N_r} - \gamma \right) \left(\frac{A_s}{N_s} - \gamma \right). \quad (1)$$

Учитывая § 1 (2), получаем тем же путем, что и прежде:

$$\frac{A_r}{N_r} - \gamma = e^{a + \beta \varepsilon_r},$$

откуда

$$N_r = \frac{A_r}{e^{a + \beta \varepsilon_r} + \gamma}. \quad (2)$$

В зависимости от значения γ (0, -1, 1) последняя формула дает законы распределения Максвелл-Больцмана, Эйнштейна-Бозе и Ферми-Дирака.

Полученный результат показывает, что все эти законы (2), действительно, дают стационарные распределения при соответствующем методе подсчета соударений. Одновременно этим показано, что приведенная форма выражения (5а) является достаточным условием для соответствующих законов распределения. Доказательство необходимости этого условия может быть дано по классическому образцу при помощи H -теоремы. Функцию H мы положим по-прежнему равной $-k \ln K$ (ч. 1, § 4 (9)), что дает

$$H = -k \sum_s \left\{ (N_s - \gamma A_s) \ln (A_s - \gamma N_s) - N_s \ln N_s + \gamma A_s \ln A_s \right\}. \quad (3)$$

Для специального случая равновесного распределения последнее выражение равно, как известно, энтропии с обратным знаком.

Изменение во времени функции H будет:

$$\frac{dH}{dt} = -k \sum_s \left\{ \ln (A_s - \gamma N_s) + \gamma^2 - \ln N_s - 1 \right\} \frac{dN_s}{dt}.$$

Так как

$$\sum \frac{dN_s}{dt} = \frac{dN}{dt} = 0,$$

член $\gamma^2 - 1$ в предыдущем выражении не проявляется вовсе, и мы можем написать:

$$\frac{dH}{dt} = -k \sum_s \left\{ -\ln N_s + \ln (A_s - \gamma N_s) \right\} \frac{dN_s}{dt}. \quad (4)$$

Величину $\frac{dN_s}{dt}$ находим на основании § 1 (5) суммированием по всем процессам, которые могли бы привести к изменению N :

$$\begin{aligned} \frac{dN_s}{dt} = & - \sum_{r, r', s'} V_{r' s'}^r N_r N_s (A_{r'} - \gamma N_{r'}) (A_{s'} - \gamma N_{s'}) + \\ & + \sum_{r, r', s'} V_{r s}^{r'} N_{r'} N_{s'} (A_r - \gamma N_r) (A_s - \gamma N_s). \end{aligned} \quad (5)$$

Первый член в этом выражении дает число частиц, выходящих вследствие соударений из интервала s , второй член — число частиц, вступающих в этот интервал. Суммирование нужно производить по каждой паре индексов только один раз. Величина $V_{r' s'}^r$ по определению симметрична как по отношению к r' , s' , так и по отношению к r , s , и поэтому

$$\sum_s \frac{dN_s}{dt} = \frac{dN}{dt} = 0.$$

Последний результат и следовало ожидать, так как при суммировании обязательно должны входить пары одинаковых членов, отличающихся лишь по знаку.

Подставляя (5) в (4) и учитывая свойство симметрии § 1 (3), находим

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & -k \sum_s \sum_{r, r', s'} V_{r' s'}^r \left\{ -N_r N_s (A_{r'} - \gamma N_{r'}) (A_{s'} - \gamma N_{s'}) \ln \left(\frac{A_s}{N_s} - \gamma \right) + \right. \\ & \left. + N_{r'} N_{s'} (A_r - \gamma N_r) (A_s - \gamma N_s) \ln \left(\frac{A_s}{N_s} - \gamma \right) \right\}. \end{aligned}$$

Собирая попарно члены в последнем выражении, мы можем заменить суммирование по отдельным индексам r и s суммированием по парам (rs) . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & -k \sum_{rs, r' s'} V_{r' s'}^r \left\{ -N_r N_s (A_{r'} - \gamma N_{r'}) (A_{s'} - \gamma N_{s'}) \ln \left(\frac{A_r}{N_r} - \gamma \right) \left(\frac{A_s}{N_s} - \gamma \right) + \right. \\ & \left. + N_{r'} N_{s'} (A_r - \gamma N_r) (A_s - \gamma N_s) \ln \left(\frac{A_r}{N_r} - \gamma \right) \left(\frac{A_s}{N_s} - \gamma \right) \right\}. \end{aligned}$$

Так как при взаимной замене штрихованных индексов нештрихованными в последнем выражении ничего не изменяется, мы можем написать его и в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & -\frac{k}{2} \sum_{rs, r' s'} V_{r' s'}^r \left\{ -N_r N_s (A_{r'} - \gamma N_{r'}) (A_{s'} - \gamma N_{s'}) + \right. \\ & + N_{r'} N_{s'} (A_r - \gamma N_r) (A_s - \gamma N_s) \left\{ \ln \left(\frac{A_r}{N_r} - \gamma \right) \left(\frac{A_s}{N_s} - \gamma \right) - \right. \\ & \left. \left. - \ln \left(\frac{A_{r'}}{N_{r'}} - \gamma \right) \left(\frac{A_{s'}}{N_{s'}} - \gamma \right) \right\} \right\}, \end{aligned}$$

или окончательно:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & -\frac{k}{2} \sum_{rs, r', s'} V_{r' s'}^r N_r N_s N_{r'} N_{s'} \left\{ \left(\frac{A_r}{N_r} - \gamma \right) \left(\frac{A_s}{N_s} - \gamma \right) - \right. \\ & - \left(\frac{A_{r'}}{N_{r'}} - \gamma \right) \left(\frac{A_{s'}}{N_{s'}} - \gamma \right) \left. \right\} \left\{ \ln \left(\frac{A_r}{N_r} - \gamma \right) \left(\frac{A_s}{N_s} - \gamma \right) - \right. \\ & - \left. \ln \left(\frac{A_{r'}}{N_{r'}} - \gamma \right) \left(\frac{A_{s'}}{N_{s'}} - \gamma \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

В полученном выражении члены, стоящие в фигурных скобках, имеют тот же вид $(a-b)(\ln a - \ln b)$, как и в обычной H -теореме. Эта форма положительна при любых a и b за исключением $a=b$, когда она обращается в нуль. Так как все остальные величины в (6) также положительны, то отсюда и получаем:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{dS}{dt} \leq 0.$$

При этом знак равенства будет справедлив только при выполнении прежнего соотношения (1), т. е. при взаимном уравнивании компенсирующих друг друга процессов. Приведенным рассуждением H -теорема доказана в полном объеме во всех трех статистиках. Этим самым показана и необходимость соответствующего метода подсчета соударений для данных выше функций распределения.

Обобщение полученного результата на случай взаимодействия частиц различного типа может быть проведено по той же самой схеме. Все физические следствия из H -теоремы, например необратимость термодинамических процессов и т. п., получаются отсюда точно так же, как это делается в классической теории.

§ 3. Основное уравнение электронной теории

Мы переходим сейчас к самой важной части теории, именно к разбору явлений электро- и теплопроводности. Для этого, однако, необходимо сначала сделать некоторые предварительные замечания.

До сих пор мы рассматривали только статические задачи: выяснение равновесных состояний и связанных с ними эффектов. Обращаясь теперь к явлениям переноса тепла и электричества, мы приходим к процессам, в которых имеет место обмен энергии и зарядов. Тем не менее и эти процессы можно рассматривать как стационарные, если только внутри определенного конечного объема все величины не меняются во времени.

Метод кинетической теории оказывается пригодным и для этих случаев. Любое состояние системы всегда может быть описано некоторой функцией распределения, которая теперь уже, однако, может и не соответствовать равновесному состоянию. Для решения задачи нужно учесть все процессы, которые могли бы вызвать изменение состояния отдельной частицы, и затем свести общий баланс. Таким путем для функции распределения может быть получено функциональное уравнение, из которого при соответствующих начальных и граничных условиях она может быть и определена. Здесь мы имеем полную аналогию с известным методом Больцмана в классической теории газов.

Общая схема, которую мы кладем в основу, такова. В нулевом приближении электроны металла представляют собой электронный газ, подчиняющийся статистике Ферми. Это приближение оказывается достаточным для определения равновесного распределения и для описания всех тех явлений, которые были разобраны в ч. II настоящей статьи. Применяя методы кинетической теории, мы можем учесть, что электроны не вполне свободны и что их движение возмущается влиянием поля положительных ионов. Кроме того, мы должны учесть, что между самими электронами действуют большие силы. Все эти взаимодействия мы можем описать при помощи понятия процессов соударения, введенных в предыдущих параграфах. Кроме взаимодействия между частицами, на вид функции распределения влияет и ряд других факторов: внешние силы, термические контакты с источниками различной температуры и т. п. В том случае, когда удастся найти модифицированную функцию распределения, которая при учете всех этих факторов остается стационарной, задача вполне разрешается, и все макроскопические величины могут быть легко вычислены.

При решении задачи возникает трудность, состоящая в том, что состояние системы, строго говоря, неодинаково в пространстве. Это происходит в первую очередь от того, что мы имеем обычно пространственно меняющиеся потенциал и температуру. Учет этого обстоятельства нетруден, когда все изменения на протяжении атомарных расстояний невелики. Мы можем в этом случае не описывать отдельную частицу (электрон) собственной функцией всей области, а ввести только такие функции, которые лишь в малом (по сравнению с макроскопическими размерами) объеме отличны от нуля. Такое описание может быть всегда получено при помощи волновых пакетов, которые приближенно (в смысле соотношения неопределенности) представляют частицу с определенным положением и импульсом. Отсюда видно, что и в квантовой теории имеет смысл описывать системы, состояние которых зависит от пространственных координат, распределением плотности в 6-мерном фазовом пространстве одной частицы. Такое описание осуществляется функцией распределения

$$\frac{G}{h^3} f(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) dx, dy, dz, dp_x dp_y dp_z,$$

которая может зависеть еще и от времени. При этом всегда, конечно, должны рассматриваться только такие элементы объема, которые больше ячейки h^3 . Такой выбор элемента объема, который, с одной стороны, значительно меньше той области, внутри которой заметно меняется состояние, а с другой — значительно больше атомарных величин, является обычным приемом кинетической теории. Нормирующий фактор $\frac{G}{h^3}$ введен для того, чтобы при $f = 1$ в одной ячейке $\frac{h^3}{G}$ находилась как раз одна частица. Величина f соответствует числам n_k для каждой ячейки [см. ч. 1, § 6 (13)].

Вместо компонент импульса p_x, p_y, p_z мы могли бы ввести их компоненты скорости:

$$\xi = \frac{p_x}{m}, \eta = \frac{p_y}{m}, \zeta = \frac{p_z}{m}, dp_x = m d\xi \text{ и т. д.}$$

Теперь мы будем следовать обычному методу, который в кинетической теории газов приводит к основному уравнению Больцмана. Рассмотрим частицы в некотором определенном элементе фазового пространства. Изменение во времени функции f может происходить, во-первых, вследствие наличия внешней силы K , непосредственно действующей на все частицы (в нашем случае — электрические и магнитные поля). Эта сила будет сообщать частицам ускорение и тем самым вызывать изменение импульса p . В терминах волновой механики это выражается изменением средних значений в волновом пакете. Согласно известной теореме волновой механики* ускорение волнового пакета получается точно таким же, как и в классической механике:

$$m \dot{\xi} = K_x, \text{ и т. д.} \quad (1)$$

Далее, групповая скорость распространения пакета согласно закону Де-Брогля совпадает с классическим значением скорости частиц. Мы получаем поэтому в фазовом пространстве такие же средние изменения распределения плотности, как и в классической теории, и для изменения функции распределения (перевеса числа выходящих частиц) можем написать:

$$\begin{aligned} \frac{df^*}{dt} = & \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \dot{\zeta} + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial f}{\partial t} + \\ & + \frac{K_x}{m} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{K_y}{m} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{K_z}{m} \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Мы отметим эту производную звездочкой, чтобы показать, что здесь еще не учтены все причины, вызывающие изменения функции распределения.

Величина потока (2) не будет зависеть от того, подчиняются ли частицы статистике Бозе-Эйнштейна или Ферми-Дирака. Действительно, по классической теореме Лиувилля плотность распределения в фазовом пространстве будет оставаться все время постоянной; для того чтобы не вступить в противоречие с принципом Паули, мы должны потребовать только, чтобы эта плотность была вначале меньше единицы. Квантово-механическое обоснование** дается тем обстоятельством, что даже при наличии внешнего поля (если только пренебречь взаимодействием между частицами) функция энергии будет содержать только члены H_0 (см. § 1 (6)). Поэтому

* Проще всего доказано у Эренфеста (7).

** См. работу Кикучи и Нордгейма (5). Там показано, что требование того, чтобы две частицы постоянно находились в различных состояниях (принцип Паули) для волновых пакетов (которые не соответствуют состояниям с точно определенной энергией) эквивалентно требованию их ортогональности ($\int \psi \psi' dV = 0$). Это свойство сохраняется и при любых внешних возмущениях.

различные волновые пакеты будут оставаться совершенно несвязанными и не смогут влиять друг на друга.

Выражение (2) не дает полного изменения функции распределения, потому что мы не учли еще взаимных соударений. Как уже упоминалось, силы взаимодействия у электронов металла можно разбить на два типа: взаимодействие электронов друг с другом (кулонова сила) и взаимодействие с ионами решетки. Первый тип сил в высшей степени неприятен для расчета и ими обычно пренебрегают; в настоящей статье мы их также учитывать не будем. Это пренебрежение, несмотря на значительную величину кулоновых сил, может быть физически до некоторой степени оправдано тем, что при соударениях такого типа имеет место сохранение импульса. Поэтому ни величина общей кинетической энергии, ни величина тока, который пропорционален импульсу, при таких соударениях не изменяется. Кроме того следует учесть, что на значительных расстояниях взаимодействие между электронами экранируется лежащими между ними положительными ионами.

Таким образом учету подлежит только взаимодействие с ионами решетки. Это последнее должно уже учитываться обязательно, так как в противном случае электроны могли бы произвольно ускоряться, а ток — беспрестанно расти. Это взаимодействие вызывает непрерывное торможение электронов и тем обеспечивает конечную величину сопротивления металла. Согласно Лоренцу эти процессы можно представить просто как отражение от ионов, рассматриваемых как упругие шары. Соответствующие представления современной теории нами будут подробно рассмотрены в дальнейшем. Предварительно же, рассуждая в духе § 1, 2, мы можем использовать следующее очень общее положение. Для каждого отдельного электрона (волновой пакет) существует определенная вероятность того, что рассматриваемый электрон испытает за единицу времени соударение. В результате соударения электрон, оставаясь в том же самом пространственном элементе, перейдет в новый интервал скоростей $d\xi' d\eta' d\zeta'$. Согласно основному соотношению § 1(5) мы можем для числа переходов (рассчитанных на ячейку) написать:

$$W_{v'}^v = V_{v'}^v f(1 - \gamma''), \quad (3)$$

где для сокращения через f'' обозначено $f(x, y, z, \xi', \eta', \zeta')$. Число переходов $W_{v'}^v$ выражается произведением независимой от числа электронов элементарной вероятности $V_{v'}^v$, числа частиц f в исходном состоянии и фактора $(1 - \gamma'')$, который зависит от степени заполнения конечных состояний.

Общее изменение числа частиц в элементе $dx dy dz d\xi d\eta d\zeta$ находим суммированием всех возможных переходов. Оно может быть представлено в виде разности числа выходящих частиц:

$$adVd\tau = dVd\tau \frac{Gm^3}{h^3} \int \int \int V_{v'}^v f(1 - \gamma'') d\tau', \quad (4)$$

$$(dx dy dz = dV, d\xi d\eta d\zeta = d\tau)$$

и числа входящих:

$$b d V d \tau = d V d \tau \frac{G m^3}{h^3} \int \int V_v^{v'} f' (1 - \gamma f) d \tau'. \quad (5)$$

Таким образом общее изменение (убыль) плотности распределения будет:

$$-\frac{df}{dt} = \frac{df}{dt}^* + a - b. \quad (6)$$

Это уравнение должно выполняться для любого элемента фазового пространства.

Потребуем теперь, чтобы распределение было стационарно. В этом случае выражение (6) обратится в нуль, а функция f не будет содержать явно время t . Тогда мы получим искомое основное уравнение в следующем виде:

$$\frac{K_x}{m} \frac{df}{d\xi} + \frac{K_y}{m} \frac{df}{d\eta} + \frac{K_z}{m} \frac{df}{d\zeta} + \xi \frac{df}{dx} + \eta \frac{df}{dy} + \zeta \frac{df}{dz} = b - a. \quad (7)$$

Мы приходим таким путем к интегриродифференциальному уравнению для определения f .

Нахождением функции распределения задача вполне разрешается. Плотность тока получается суммированием величин $e v$ по отдельным электронам*:

$$i = \frac{e G m}{h^3} \int v \left\{ \frac{1}{\Delta V} \int f d V \right\} d \tau; \quad (8a)$$

тепловой поток вычисляется аналогичным суммированием (ϵ — кинетическая энергия отдельной частицы):

$$w = \frac{G m^3}{h^3} \int \epsilon v \left\{ \frac{1}{\Delta V} \int f d V \right\} d \tau. \quad (8b)$$

При этом мы можем выбрать элемент объема настолько малым, что при интегрировании можно будет считать f постоянным. Тогда два последних выражения упрощаются, и мы получаем:

$$i = e \frac{G m^3}{h^3} \int v f d \tau, \quad (9)$$

$$w = \frac{G m^3}{h^3} \int \epsilon v f d \tau. \quad (10)$$

Обе эти величины имеют векториальный характер.

Из основного уравнения (7) можно сделать ряд выводов, не прибегая к его решению. Когда нет никаких внешних воздействий (нет ни внешнего поля, ни пространственных неоднородностей), выражение $(a - b)$ должно обратиться в нуль. Это соответствует компенсации противоположных переходов в состоянии равновесия (§ 1). Отсюда сейчас же получаем из (4) и (5) условие для равновесного распределения (f_0):

$$V_v^v f_0 (1 - \gamma f_0') = V_v^{v'} f_0' (1 - \gamma f_0). \quad (11)$$

* e — отрицательный элементарный заряд.

Величины V здесь не являются непосредственно элементарными вероятностями в смысле § 1, поскольку они зависят еще и от состояния возмущающей системы (решетки кристалла); последняя же сама изменяет свое состояние при соударении с электроном.

Мы уже видели, что, употребляя соответствующий метод подсчета соударений, мы всегда придем к одной из трех статистик. Мы используем это обстоятельство для того, чтобы получить более подробные сведения о величинах $V_{v'}^v$, входящих в соотношение (11). Не уточняя пока вопрос о характере статистики (для того чтобы охватить и случай классической статистики), мы можем положить:

$$f_0 = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon'}{kT} + \gamma}} \quad (12)$$

(член $1 - \gamma^2$ в показателе для случая Больцмановской статистики может быть отброшен как не играющий никакой роли). Подставляя это выражение в (11), мы находим:

$$V_{v'}^v e^{\frac{\epsilon'}{kT}} = V_v^{v'} e^{\frac{\epsilon}{kT}}. \quad (13)$$

Это соотношение между $V_{v'}^v$ и $V_v^{v'}$ должно всегда выполняться, если только элементарные вероятности вычислены из основных принципов квантовой механики. Отсюда:

$$a - b = \frac{Gm^3}{h^3} \int V_{v'}^v \left\{ f(1 - \gamma f') - e^{\frac{\epsilon' - \epsilon}{kT}} f'(1 - \gamma f) \right\} d\tau'. \quad (14)$$

Для специального случая процессов, в которых электрон при соударениях изменяет только направление движения (но не энергию), элементарная вероятность отлична от нуля только для $\epsilon = \epsilon'$. В этом случае из (13) и (14) мы получаем:

$$a - b = \frac{Gm^3}{h^3} \int V_{v'}^v (f - f') d\tau'. \quad (15)$$

Очевидно, что как раз для электронов металла передача энергии при соударениях должна быть очень мала. Это следует непосредственно из законов сохранения энергии и импульса, согласно которым при соударении может быть передана только часть энергии порядка $\frac{m}{M}$ (M — масса атома). В дальнейшем мы ограничимся* поэтому только специальным случаем (15).

* Теория может быть развита аналогичным образом и без такого ограничения [см. работу Нордгейма (8)]. Следует уже сейчас отметить, что для описания свойств металла при низких температурах энергетический обмен является весьма существенным. В то время как при высоких температурах рассмотренный выше частный случай является хорошим приближением, при низких температурах весь ход рассуждений делается неверным. Термин „высокая“ и „низкая“ температура следует понимать в смысле отношения к дебаевской характеристической температуре θ .

При сделанном предположении любая функция распределения f_0 , зависящая только от энергии, совместима с (11). В частности этому уравнению удовлетворяют все три функции (12). Точно так же и основное уравнение будет одинаковым для всех трех статистик. Различие наступает только при учете процессов передачи энергии, которыми мы пренебрегли. Отметим, что здесь мы поступаем так же, как и с силами взаимодействия при подсчете средних значений; мы можем при расчете пренебречь взаимодействием вовсе, хотя его наличие и безусловно необходимо для установления определенных значений средних величин.

§ 4. ТЕОРИЯ ЛОРЕНЦА-ЗОММЕРФЕЛЬДА

Общее решение (7) § 3 при наличии внешнего поля может быть получено по методу, указанному Лоренцом. Положим, что истинное распределение f в любой точке пространства мало отличается от равновесного распределения f_0 . Тогда можно положить:

$$f = f_0 + f_1, \quad f_1 \ll f_0. \quad (1)$$

Согласно сказанному в конце предыдущего параграфа, с логической точки зрения вполне допустимо вести расчет с любой исходной функцией f_0 . Однако результат, конечно, будет существенно зависеть от того, что мы выберем для f_0 . Надежно установленная эмпирически справедливость принципа Паули вынуждает принять для f_0 распределение Ферми-Дирака как единственно возможное; в этом случае мы приходим к теории Зоммерфельда. Принимая для f_0 максвелловское распределение, мы получаем теорию Лоренца. При выбранном способе изложения обе теории являются только двумя различными частными случаями.

Следует отметить, что f_0 теперь является уже функцией координат. Она определяется попрежнему § 3 (12), но теперь мы уже допускаем, что величины α и T , в соответствии с наличием градиентов, меняются в пространстве.

Полагая f в виде (1), мы упрощаем задачу следующим образом. Член $(a - b)$, зависящий от соударений, для f_0 тождественно обращается в нуль. Поэтому в правой части основного уравнения остается только f_1 . Далее, так как f_0 в любой точке обладает относительно компонент скорости сферической симметрией,* согласно § 3 (9), (10) исчезает влияние f_0 на поток тепла и электричества. В левой же части уравнения можно пренебречь малым

* Мы оперируем здесь со свободными электронами, для которых $\epsilon = \frac{m}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$. Для несвободных электронов последнее уже не обязательно должно выполняться (см. ч. IV, § 3—5). Однако всегда $\epsilon(\xi, \eta, \zeta)$ будет иметь центральную симметрию, что уже достаточно для утверждения, приведенного в тексте.

возмущением f_1 по сравнению с f_0 . В этом приближении мы получаем:

$$\frac{d^*f_0}{dt} = -\frac{Gm^3}{h^3} \iiint V_{v'}^v (f_1 - f_1') d\xi' d\eta' d\zeta',$$

где неизвестная функция f_1 содержится только в правой части.

Рассмотрим сначала относительно простой случай, когда изменения состояния происходят только вдоль оси X . В этом случае мы имеем:

$$\frac{d^*f_0}{dt} = \frac{eF}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{Gm^3}{h^3} \iiint V_{v'}^v (f_1 - f_1') d\xi' d\eta' d\zeta' = b - a, \quad (2)$$

где через F обозначена напряженность электрического поля ($K_x = eF$). Написанное уравнение (2) является исходным в теориях Лоренца и Зоммерфельда.

Введем теперь для f_0 его выражение § 3 (12). При этом [ч. I, § 9 (2a), (2b), (3), (4), (7)] для бoльцмановской статистики (слабое вырождение, теория Лоренца)

$$\alpha = \ln \frac{G}{nh^3} (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}, \quad (3a)$$

для статистики Ферми-Дирака (сильное вырождение, теория Зоммерфельда):

$$\alpha = -\frac{\epsilon_0}{kT} = -\frac{\mu}{kT} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 + \dots \right\}; \quad \mu = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{4\pi G} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3b)$$

Полагая, далее,

$$\epsilon = \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \quad (4)$$

имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial \xi} &= \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} = m \xi \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}, \\ \frac{\partial f_0}{\partial x} &= \frac{\partial f_0}{\partial \left(\alpha + \frac{\epsilon}{kT} \right)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha + \frac{\epsilon}{kT} \right) = kT \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\epsilon}{kT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Таким образом мы получаем следующее общее выражение:

$$\frac{d^*f_0}{dt} = \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \xi \left(eF + kT \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\epsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (5)$$

Дальнейшее упрощение члена, зависящего от соударений, возможно только при определенных предположениях о вероятности перехода. Мы будем считать сначала, что металл изотропен. * Эта изотропность может быть связана либо со свойствами самого кристалла (кубическая система), либо может иметь статистический характер, если мы имеем беспорядочное расположение микрокристаллитов. При наличии изотропности вероятность перехода $V_{v'}^v$

* Это предположение не годится для разбора эффекта Бриджмена, который мы рассмотрим в § 6.

не будет уже зависеть от абсолютной ориентировки векторов v и v' , а будет функцией только их относительного расположения. Полагая для простоты абсолютную величину скоростей v и v' одинаковой, мы можем считать V функцией только v и угла Θ между векторами.

Это позволяет (Лоренц) положить для f_1 зависимость от направления в виде:

$$f_1 = \xi \chi(v), \quad (6)$$

где χ зависит уже только от v (от энергии $\epsilon = \frac{m}{2} v^2$). Соотношение (6) оправдывается тем, что при его помощи интегральное уравнение для f_1 , действительно, может быть решено.*

Для дальнейшего целесообразно ввести полярные координаты, показанные на рис. 1. При таком выборе координат интегрирование по ξ', η', ζ' может быть заменено интегрированием по Θ и α :

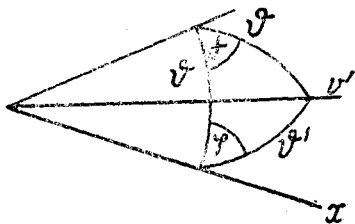


Рис. 1.

$$\frac{1}{v^3} d\xi' d\eta' d\zeta' = \sin \Theta d\Theta d\alpha; \quad \chi(v') = \chi(v);$$

$$\frac{Gm^3}{h^3} V_v^v = \frac{1}{v^3} V(v, \Theta);$$

и отсюда

$$\begin{aligned} b - a &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} V(v, \Theta) (f' - f) \sin \Theta d\Theta d\alpha = \\ &= \chi(v) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} V(v, \Theta) (\xi' - \xi) \sin \Theta d\Theta d\alpha. \end{aligned}$$

Фигурирующая здесь величина $V(v, \Theta)$ дает вероятность того, что какая-либо частица со скоростью v в единицу времени попадет внутрь телесного угла $\sin \Theta d\Theta d\alpha$. Из рис. 1 находим далее:

$$\xi = v \cos \vartheta, \quad \xi' = v \cos \vartheta', \quad \cos \vartheta' = \cos \Theta \cos \vartheta + \sin \Theta \sin \vartheta \cos \alpha,$$

* Согласно Бору (9) можно обойти (6), вводя в качестве искомой функции общий импульс всех электронов:

$$G(v) = \int_v^{\infty} dv \int_0^\pi \int_0^{2\pi} v f_1 v^2 dv \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (6a)$$

Однако вычисление оказывается возможным провести только в предположениях, приведенных в тексте, причем результаты получаются совершенно одинаковыми. Проводить ли пространственное интегрирование (6a) в начале расчета или в конце — несущественно.

и поэтому

$$\begin{aligned}
 b - a &= \chi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} V(v, \Theta) \left\{ v (\cos \vartheta \cos \Theta + \right. \\
 &\quad \left. + \sin \vartheta \sin \Theta \cos \alpha) - v \cos \vartheta \right\} \sin \Theta d\Theta d\alpha = \\
 &= 2\pi \chi \int_0^\pi V(v, \Theta) v \cos \vartheta (\cos \Theta - 1) \sin \Theta d\Theta = \\
 &= 2\pi \xi \chi \int_0^\pi V(v, \Theta) (\cos \Theta - 1) \sin \Theta d\Theta. \quad (7)
 \end{aligned}$$

При интегрировании по α было учтено, что α ни в одну из величин кроме $\cos \alpha$ не входит.

Входящая в (7) величина

$$\frac{a - b}{\xi \chi} = 2\pi \int_0^\pi V(v, \Theta) (1 - \cos \Theta) \sin \Theta d\Theta = \frac{v}{l} \quad (8)$$

должна рассматриваться как заданная, независимая от вида функции распределения. Как мы сейчас увидим, l есть не что иное как свободный пробег электрона [зависающий согласно (8) определенным образом от скорости v]. Основное уравнение (2) совместно с (5), (7) и (8) дает после этого для $\chi(v)$ обыкновенное уравнение, из которого получается:

$$\chi = -\frac{l}{v} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left(eF + kT \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (9)$$

Так как $f_1 = \xi \chi$, то соотношение (9) дает решение поставленной задачи.

Что величина l , действительно, должна быть истолкована как свободный пробег, может быть показано следующим образом. Пусть в отсутствии внешних влияний в момент времени $t=0$ имеется некоторое возмущение (6) функции распределения f_0 . Основное уравнение [ср. § 3 (6)] дает:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d(f_0 + f_1)}{dt} = -a + b = -\frac{v}{l} f_1,$$

и, так как f_0 стационарно $\left(\frac{df_0}{dt} = 0\right)$:

$$\frac{df_1}{dt} = -\frac{v}{l} f_1, \quad f_1(t) = f_1(0) e^{-\frac{v}{l} t}.$$

Мы видим, что начальное возмущение действительно ослабляется процессами соударения в e раз на пути l .*

* Обычно длину свободного пути определяют как участок, на котором пучок частиц (одинаковой скорости) ослабляется в e раз. В тексте же речь идет об уменьшении добавочного члена в функции распределения. Оба определения вполне совпадают, когда V не зависит от Θ . Величина

$$\tau = \frac{l}{v}$$

дает время релаксации.

Определив $f_1 = \chi \xi$, мы можем рассчитать по § 3 (9), (10) тепловой и электрический ток. Для электрического тока i_x (остальные компоненты равны нулю) находим:

$$i_x = e \frac{Gm^3}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \xi f_1 d\xi d\eta d\zeta = e \frac{Gm^3}{h^3} \int \int \int \xi^2 \chi(v) d\xi d\eta d\zeta.$$

Вводя вместо ξ, η, ζ новые полярные переменные

$$\xi = v \cos \vartheta; \quad d\xi d\eta d\zeta = v^2 dv \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

и производя интегрирование по ϑ и φ , получаем:

$$i_x = e \frac{Gm^3 4\pi}{h^3} \int_0^\infty v^4 \chi dv = -e \frac{4\pi Gm^3}{3h^3} \int_0^\infty v^3 l \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left(eF + \right. \\ \left. + kT \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dv.$$

Вводя, наконец,

$$\varepsilon = \frac{m}{2} v^2; \quad v^3 dv = \frac{2\varepsilon}{m^2} d\varepsilon,$$

мы находим для электрического тока следующее выражение:

$$i_x = -e \frac{8\pi Gm}{3h^3} \int_0^\infty l \varepsilon \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left(eF + kT \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) d\varepsilon. \quad (11a)$$

Величина теплового потока [§ 3 (10)] дается аналогичным выражением:

$$w_x = \frac{Gm^3}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \xi \varepsilon f_1 d\xi d\eta d\zeta = \\ = -\frac{8\pi Gm}{3h^3} \int_0^\infty l \varepsilon^2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left(eF + kT \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) d\varepsilon. \quad (11b)$$

Полученные окончательные результаты могут быть записаны в следующем, более удобном виде:

$$i_x = eK_1 \left(eF + kT \frac{\partial x}{\partial x} \right) - e \frac{K_2}{T} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (12a)$$

$$w_x = K_2 \left(eF + kT \frac{\partial x}{\partial x} \right) - \frac{K_3}{T} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (12b)$$

где

$$K_n = -\frac{8\pi Gm}{3h^3} \int_0^\infty l \varepsilon^n \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\varepsilon, \quad (n=1, 2, 3). \quad (13)$$

Отметим, что здесь $\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$ всегда отрицательно, и поэтому все K_n положительные величины.

В формулах (12) и (13) содержится полностью и теория Зоммерфельда и теория Лоренца. Эти соотношения справедливы для всех трех статистик, которые сказываются лишь на виде функции f_0 . Они справедливы также при любом законе взаимодействия, который сказывается только на величине I . Формулы (12а, б) останутся справедливыми и в том случае, если мы отбросим предположение об отсутствии энергетического обмена при соударениях. При этом изменятся только выражения для K_n , которые вычисляются здесь значительно сложнее (8).

Таким образом задача сведена нами к определению величин K_n . Заметим, что последние являются функциями температуры, которая входит как в f_0 , так и в α .

В случае статистики Ферми-Дирака и притом сильного вырождения (теория Зоммерфельда), вследствие особого вида функции распределения интегрирование возможно провести без точного знания свободного пробега (вероятности перехода). Для K_n в этом случае [§ 3 (12), § 4 (3б)] получаем выражение:

$$K_n = \frac{8\pi Gm}{3h^3} \int_0^\infty I(\epsilon) \epsilon^n \frac{d\epsilon}{kT \left(e^{\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{kT}} + 1 \right) \left(e^{\frac{-\epsilon_0 + \epsilon}{kT}} + 1 \right)}, \quad (14)$$

которое, полагая

$$x = \frac{\epsilon}{kT}; \quad \frac{\epsilon_0}{kT} = a,$$

можно записать в следующей форме:

$$K_n = \frac{8\pi Gm}{3h^3} (kT)^n \int_0^\infty \frac{I x^n dx}{(e^{a-x} + 1)(e^{-a+x} + 1)}.$$

Это выражение точно такого же вида, как и (5б) § 8, ч. I, и поэтому

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{8\pi Gm}{3h^3} (kT)^n \left\{ I x^n + 2 \left[c_2 \frac{d^2(I x^n)}{dx^2} + \dots \right] \right\}_{x=a} = \\ &= \frac{8\pi Gm}{3h^3} \left\{ I \epsilon^n + 2c_2 (kT)^2 \frac{d^2(I \epsilon^n)}{d\epsilon^2} + \dots \right\}_{\epsilon=\epsilon_0} = \\ &= \frac{8\pi Gm}{3h^3} \left\{ I_0 \epsilon_0^n + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{d^2(I \epsilon^n)}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=\epsilon_0} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (15a)$$

Здесь K_n зависит только от хода $I(\epsilon)$ вблизи $\epsilon = \epsilon_0$ и в первом приближении определяется значением I при $\epsilon = \epsilon_0$. Мы отметили это обстоятельство индексом 0 у I и ϵ . Таким образом для дальнейшего расчета нам пока не нужно более подробных сведений о законе рассеяния. Позднее, в ч. IV, мы разберем этот вопрос подробнее.

Для случая максвелл-больцмановской статистики (теория Лоренца) необходимы более точные данные о свободном пробеге. Мы ограничимся здесь простейшим предположением и будем считать, что I не зависит от скорости вовсе. В этом случае необхо-

димое интегрирование может быть проведено, причем для K получается [ср. (13) и ч. I § 9 (2a)] следующее выражение:

$$K_n = \frac{8\pi N}{3m^2} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{l}{kT} \int_0^{\infty} \varepsilon^n e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon = \\ = \frac{8\pi N}{3m^2} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} l (kT)^n \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

(N — число электронов в 1 см^3). Последний интеграл известен, он равен просто $n!$, и мы находим окончательно:

$$K_n = \frac{4}{3} \frac{Nl}{\sqrt{2\pi mkT}} (kT)^{n-1} n! \quad (15b)$$

Использованное нами предположение о независимости l от скорости соответствует первоначальной модели Лоренца, в которой ионы рассматриваются как бесконечно тяжелые упругие шары. В этом случае

$$l = \frac{1}{n\pi R^2}, \quad (16)$$

где n — число ионов в 1 см^3 , а R — радиус иона. В дальнейшем мы все время будем сопоставлять результаты обеих теорий, снабжая соответствующие формулы буквами Z (Зоммерфельд) и L (Лоренц).

Относительно физического истолкования всего расчета нужно заметить следующее. Мы везде пренебрегали энергетическим обменом между электронами и решеткой. Соответственно этому мы должны были бы получить сначала переход механической энергии электронов в тепловую энергию того же электронного газа. Однако эта тепловая энергия должна выравниваться и переходить отчасти и к ионной решетке. Таким образом энергия, накопленная электронами в поле, в конце концов перейдет в тепловую энергию всего металла. Мы опять оставляем пока открытым вопрос о механизме этого перехода, поскольку он несуществен для функции распределения. Мы разберем этот вопрос подробнее в ч. IV.

§ 5. Электропроводность и теплопроводность. Закон Видемана-Франца

Величины F , T , $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial x}$ в уравнениях § 4 (12a, b) определены экспериментальными условиями. Поэтому мы можем сейчас же вычислить потоки тепла и электричества*.

* Некоторые несогласия, которые встречаются в литературе при статистическом истолковании коэффициентов Томсон- и Пельтье-эффектов, объясняются различиями в условиях, кладущихся в основу расчета. По этому вопросу отсылаем к работе Зоммерфельда и Франка. Формулы (7) и (8) этих авторов полностью совпадают с нашими § 4 (12a), (12b).

Положим, что в направлении тока никаких иных изменений состояния не происходит. В этом случае $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$ и

$$i_x = e^2 K_1 F = \kappa F.$$

Электропроводность κ получается из § 4 (15а, б) равной

$$\kappa = e^2 K_1 = \begin{cases} \frac{8\pi e^2 G m l_0 \epsilon_0}{3h^3} & (1) \text{ З} \\ \frac{4}{3} \frac{e^2 N l}{\sqrt{2\pi m k T}} & (1) \text{ Л} \end{cases}$$

Как отмечалось выше, здесь использовано только первое приближение § 4 (15а). Так как

$$\epsilon_0 \cong \mu = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{4\pi G} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (2) \text{ З}$$

$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ = средней скорости максвелловского распределения, (2) Л
предыдущие выражения для κ могут быть переписаны в такой форме:

$$\kappa = \begin{cases} \frac{e^2 l_0 N}{m v_0} & (1а) \text{ З} \\ \frac{4}{\sqrt{6\pi}} \frac{e^2 l N}{m \bar{v}} & (1а) \text{ Л} \end{cases}$$

Мы получаем в обоих случаях выражения, совпадающие с точностью до численного фактора с результатом примитивной теории Друде [ч. 1, § 1 (3)]. Однако в формулах теории Лоренца $\bar{v}$ мало и поэтому N получается также слишком малым. В теории же Зоммерфельда $v_0 \gg \bar{v}$, и N по порядку величины может быть положено равным числу атомов в 1 см^3 . Температурная зависимость электропроводности оказывается целиком связанной с l_0 . В ч. IV мы увидим, что модельные представления и здесь приводят к хорошим результатам.

Полагая N (а вместе с этим и v_0) известными, мы получаем из (1) З и (2) З выражение:

$$l_0 = \frac{3h^3 \kappa}{e^2 8\pi G m \epsilon_0} = \frac{\kappa h}{e^2} \left(\frac{3}{4\pi G} \right)^{\frac{1}{3}} N^{-\frac{2}{3}} = \frac{\kappa h}{e^2} \left(\frac{3}{4\pi G} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{2}{3}} z^{-\frac{2}{3}}, \quad (3)$$

позволяющее найти свободный пробег l_0 из эмпирических данных. Отсюда получаются для различных металлов при комнатной температуре следующие величины:

Металл	Na	K	Cu	Ag	Au	Hg	Pb	Fe	Ni	Pd	Pt
$l z^{\frac{2}{3}} \cdot 10^7 \text{ (см)}$	35	36	48	59	38	12	6,5	7	6	8	6
$\tau z \cdot 10^{15} \text{ (сек.)}$	33	42	30	42	28	10	5,8	4,7	3,7	5,8	5,4

l_0 оказывается порядка 100 атомных расстояний. И эта последняя величина хорошо объясняется модельной теорией. Мы видим, как далеко от действительности представление об упругих шарах, которое приводит для l к величине, всего только порядка атомных расстояний. В таблице приведено также время релаксации

$$\tau = \frac{l_0}{v_0} = \frac{\chi m}{e^2 N} = \frac{\chi m}{e^2 n z},$$

дающее непосредственную меру быстроты восстановления стационарного состояния. Правильность порядка величины для τ может быть проверена следующим образом. При электрических (оптических) колебаниях с частотой порядка $\nu = \frac{1}{\tau}$ и выше электроны уже не смогут давать равновесный ток, соответствующий имеющемуся полю. Мы должны ожидать, что, начиная с этих частот, будут наблюдаться отклонения от формул феноменологической максвелловской теории. Такие отклонения наблюдаются в действительности*; они начинаются как раз при частотах порядка $\nu = 10^{13}$.

Мы разберем сейчас вопрос о пределах применимости закона Ома. Последний должен выполняться лишь до тех пор, пока справедливо предположение, что $f_1 \ll f_0$ [§ 4 (1)]. Так как при всех расчетах существенна лишь область вблизи $\epsilon = \epsilon_0$, нам достаточно сравнить соответствующие величины только для критического значения ϵ_0 . Согласно § 4 (6) и (9) имеем:

$$f_1 = -\frac{\epsilon}{\nu} l \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} eF,$$

а по § 3 (12):

$$f_0(\epsilon_0) = \frac{1}{2}; \quad -\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=\epsilon_0} = \frac{1}{4kT}.$$

Полагая $\frac{\epsilon}{\nu} \cong 1$, получаем для неравенства $f_1 \ll f_0$ следующее выражение:

$$\frac{l_0 e F}{4kT} \ll \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, согласно § 5 (1):

$$l_0 e F = \frac{3h^2 i}{16 \pi e m \epsilon_0}.$$

Поэтому мы получаем искомое условие выполнимости закона Ома в следующем виде:

$$l \ll \frac{32 \pi m \epsilon_0 e k T}{3h^2}.$$

* Более точная теория металлооптики была развита Кронигем¹¹ на основании блоховских представлений и привела к хорошим результатам.

Подставляя $\epsilon_0 = 10^{-11}$ эрг ($= 6$ В) и $T = 300^\circ$, находим для правой части неравенства, в круглых цифрах, $2 \cdot 10^{19}$ CGSE $= 6 \cdot 10^9$ А/см². Отклонений от закона Ома даже на 1% мы можем ожидать лишь при токах около $5 \cdot 10^7$ А/см², которые все же почти в 10 раз больше, нежели в известных опытах Бриджмена. Поэтому полученные Бриджменом результаты вряд ли можно считать правильными.

Для вычисления теплового потока будем считать, что электрический ток равен нулю. Полагая в § 4 (12a) $i = 0$, мы видим, что в этом случае электрическое поле все же может и не равняться нулю. Последнее обстоятельство, как мы увидим ниже, связано с наличием термоэлектрических эффектов. Мы получаем отсюда соотношение:

$$(eF + kT \frac{\partial x}{\partial x}) = \frac{K_2}{K_1 T} \frac{\partial T}{\partial x},$$

подстановка которого в § 4 (12b) дает:

$$w_x = \frac{1}{T} \frac{K_2^2 - K_1 K_3}{K_1} \frac{\partial T}{\partial x} = - \gamma \frac{\partial T}{\partial x}.$$

По определению, величина

$$\gamma = - \frac{1}{T} \frac{K_2^2 - K_1 K_3}{K_1} \quad (4)$$

равна коэффициенту теплопроводности (отметим, что здесь мы получаем только часть теплопроводности, обусловленную свободными электронами; передачей тепла кристаллической решеткой для хороших проводников можно пренебречь).

При расчете числителя (4) для случая теории Зоммерфельда мы находим, что члены первого приближения выпадают вовсе. Такой результат не является неожиданным, так как первое приближение соответствует распределению при $T = 0$. Для чисто электрических явлений это обстоятельство не играет существенной роли, однако для тепловых процессов важным оказывается как раз влияние температуры на состояние системы (функцию распределения). Поэтому здесь мы должны воспользоваться вторым приближением [пренебрегая уже только членами $(kT)^4$], для которого из § 4 (15a) находим:

$$K_3 K_1 - K_2^2 = \left(\frac{8 \pi G m}{3 h^3} \right)^2 \left\{ \left(\epsilon^3 l + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{\partial^2 (l \epsilon^3)}{\partial \epsilon^2} \right) \left(\epsilon l + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{\partial^2 (l \epsilon)}{\partial \epsilon^2} \right) - \left(\epsilon^2 l + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{\partial^2 (l \epsilon^2)}{\partial \epsilon^2} \right)^2 \right\}_{\epsilon=\epsilon_0} \cong \left(\frac{8 \pi G m}{3 h^3} \right)^2 \frac{\pi^2}{3} (kT)^2 l_0^2 \epsilon_0^2.$$

Производные от l_0 выпадают и в этом приближении, и существенным оказывается только влияние температуры на функцию распределения. Мы находим поэтому:

$$\gamma = \left\{ \frac{8 \pi G m \pi^2}{3 h^3} \frac{\pi^2}{3} k^2 T l_0 \epsilon_0 \right. \quad (5) \text{З}$$

$$\left. \frac{8}{3} \frac{N l}{\sqrt{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{h^2}{m^2 c^2}}} k^2 T \right. \quad (5) \text{Л}$$

Для экспериментальной проверки удобнее воспользоваться законом Видемана-Франка:

$$\frac{\gamma}{\pi T} = \frac{1}{e^2 T^2} \frac{K_1 K_3 - K_2^2}{K_1^2} = \begin{cases} \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e}\right)^2 & (6) \text{ З} \\ 2 \left(\frac{k}{e}\right)^2 & (6) \text{ Л} \end{cases}$$

Это отношение в обеих теориях оказывается универсальной константой для всех металлов. Однако новое, большее значение численного коэффициента $\left(\frac{\pi^2}{3} = 3,3\right)$ значительно лучше согласуется с экспериментальными данными. Теоретическое численное значение (6) З равно $7,56 \cdot 10^{-11} \text{ CGSE} = 6,83 \cdot 10^{-6} \text{ ватт} \cdot \text{ом} \cdot \text{град}^{-1}$ при $T = 273^\circ \text{C}$.

В заключение следует особо подчеркнуть, что выведенные здесь результаты относятся только к достаточно высоким температурам и действительно хорошим проводникам. При невыполнении этих условий могут иметь место значительные отступления от теории.

§ 7. ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Рассмотрим теперь процесс выделения тепла электрическим током, которое образуется за счет работы, совершаемой полем над электронами. Для расчета совершенно неважно, каков тот механизм, посредством которого беспорядочная тепловая энергия электронов передается решетке металла. Точно так же нет никакого противоречия и в том, что при выводе основного уравнения мы пренебрегли взаимодействием электронов с решеткой, в то время как теперь мы рассматриваем нагревание всего металла в целом. То обстоятельство, что вся работа поля в конце концов перейдет в тепло, есть просто одно из следствий закона сохранения энергии.

Если имеется поток тепла, то часть энергии непрерывно уходит. Избыток энергии, который превращается в тепло, для элемента объема будет:

$$QdV = (A - \text{div } \mathbf{W}) dV. \quad (1)$$

Выбирая элемент объема в виде цилиндра с высотой dx и площадью основания 1 см^2 в плоскости yz (все величины зависят только от x), получаем для количества тепла:

$$Qdx = \left(A - \frac{dw_x}{dx} \right) dx. \quad (2)$$

Величина работы вычисляется следующим образом. Над одним единственным электроном из интервала скоростей $d\xi d\eta d\zeta$ за время dt совершается работа $eF\xi dt$. В элементе объема имеется, однако,

$$\frac{Gm^3}{h^3} f dx d\xi d\eta d\zeta$$

электронов с рассматриваемой скоростью; поэтому полная работа получается интегрированием по всем значениям скорости:

$$Adxd\tau = eF \frac{Gm^3}{h^3} \left\{ \int \int \int \xi f d\xi d\eta d\zeta \right\} dx d\tau.$$

Сравнивая полученное выражение с § 3 (9), мы находим известное соотношение феноменологической теории:

$$A = iF. \quad (3)$$

После этого для количества тепла, выделяющегося в каждом $см^3$, получаем:

$$Q = iF - \frac{\partial w_x}{\partial x}. \quad (4)$$

Здесь для F нужно брать истинное значение поля с учетом и того поля, которое создается самими электронами. Из § 4 (12a) имеем:

$$F = \frac{i}{e^2 K_1} - \frac{kT}{e} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{K_2}{e K_1 T} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (5)$$

Точно так же и тепловой поток может быть согласно § 4 (12b) выражен через электрический:

$$w_x = \frac{i K_2}{e K_1} + \frac{K_2^2 - K_2 K_1}{K_1 T} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{e i K_2}{\kappa} - \gamma \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Подставляя это выражение в (4), находим окончательно:

$$Q = \frac{i^2}{\kappa} + i \left\{ -\frac{kT}{e} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K_2}{K_1} \right) + \frac{K_2}{e K_1 T} \frac{\partial T}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{i^2}{\kappa} - \frac{i}{e} \left\{ kT \frac{\partial \alpha}{\partial x} + kT \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K_2}{K_1 T} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Полученное выражение содержит три члена, пропорциональные i^2 , i и i^0 . Эти слагаемые могут быть интерпретированы следующим образом. Член $\frac{i^2}{\kappa}$ представляет обычное джоулево тепло. Член, не содержащий i вовсе, дает, очевидно, количество теплоты, подведенное вследствие теплопроводности ($Q = \text{div } \gamma \text{ grad } T$). И, наконец, член с i описывает термоэлектрические явления. Последние, следуя обычной терминологии, мы классифицируем следующим образом:

1. Эффект Томсона. Явление заключается в обратимом выделении тепла, которое имеет место в однородном, но неравномерно нагретом проводнике. Величина эффекта пропорциональна току (который считается положительным в направлении, обратном движению электронов). Коэффициент Томсона ρ по определению дается множителем при $i \frac{\partial T}{\partial x}$. Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T},$$

то для коэффициента Томсона получаем:

$$\rho = \frac{kT}{e} \frac{\partial}{\partial T} (\alpha + \delta). \quad (7)$$

Здесь для сокращения обозначено:

$$\delta = \frac{K_2}{K_1 k T}. \quad (8)$$

II. Эффект Пельтье. Теплота Пельтье пропорциональна току (считается положительным в том же случае, как и выше) и выделяется при протекании тока между двумя различными металлами, находящимися при одинаковой температуре. Если 1 и 2 две точки, расположенные по разные стороны поверхности раздела, то:

$$Q_{12} = i \frac{kT}{e} \int_1^2 \frac{\partial}{\partial x} (\alpha + \delta) dx = i \frac{kT}{e} (\alpha + \delta) \Big|_1^2.$$

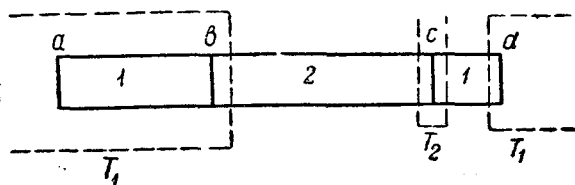


Рис. 2.

Коэффициент Пельтье — множитель при i , и поэтому

$$\Pi_{12} = \frac{kT}{e} \{(\alpha_2 + \delta_2) - (\alpha_1 + \delta_1)\}. \quad (9)$$

Из (7) и (9) вытекает известное соотношение Томсона:

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\Pi_{12}}{T} \right) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{T} = 0, \quad (10)$$

которое может быть получено и чисто термодинамическим путем.

III. Термоэлектродвижущие силы. В качестве третьего эффекта мы рассмотрим возникновение термоэлектродвижущих сил, развивающихся в цепи, содержащей различные металлы при неодинаковой температуре.

Электродвижущая сила по определению равна разности потенциалов при разомкнутой цепи. Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 2, содержащую два спая b и c, находящихся при различной температуре; замыкание цепи могло бы быть осуществлено, например, соединением точек a и d.

Термоэлектродвижущая сила будет:

$$F_{12} = \varphi_a - \varphi_d = - \int_a^d F dx.$$

Так как в разбираемом эффекте ток $i=0$, то на основании (5):

$$F = \frac{k}{e} \left(-T \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \delta \frac{\partial T}{\partial x} \right),$$

и, следовательно:

$$F_{12} = - \frac{k}{e} \int_a^d \left(-T \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \delta \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx.$$

Мы можем в последнем выражении произвести интегрирование по частям, причем значения на пределах пропадут, так как $T_a = T_d = T_1$. Тогда получается:

$$F_{12} = - \frac{k}{e} \int_a^d (\alpha + \delta) \frac{\partial T}{\partial x} dx = - \frac{k}{e} \int_a^d (\alpha + \delta) dT.$$

Разбивая, наконец, участок интегрирования на отрезки ab , bc , cd (так как $\int_a^b = 0$ вследствие $T_a = T_b$), находим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} F_{12} &= - \frac{k}{e} \left\{ \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_2 + \delta_2) dT + \int_{T_2}^{T_1} (\alpha_1 + \delta_1) dT \right\} = \\ &= \frac{k}{e} \int_{T_1}^{T_2} \{ \alpha_1 + \delta_1 - (\alpha_2 + \delta_2) \} dT = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi_{12}}{T} dT. \end{aligned} \quad (11)$$

Термоэлектродвижущая сила оказывается связанной с коэффициентом Пельтье. Получающееся соотношение и здесь в точности совпадает с выводами феноменологической термодинамики.

Формулы (10) и (11) вытекают как следствие из основных уравнений § 3 (12а, б), причем для их вывода оказывается ненужным точное значение величин K_n . Как уже было упомянуто, эти формулы сохраняют свою силу и при гораздо более общих предположениях (например при допущении энергетического обмена при элементарных актах). Таким образом статистическая теория, как это и должно было быть, с большой общностью воспроизводит результаты термодинамики. Однако статистическая теория позволяет еще дать и интерпретацию коэффициентов, чего не в состоянии сделать термодинамика. Мы вычислим здесь величину $\alpha + \delta$, которая входит в соотношения (7) и (9).

3. (Теория Зоммерфельда). Согласно определению этих величин (8) и § 4 (15а) имеем во втором приближении [до членов с $(kT)^4$]:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{K_2}{K_1 kT} = \frac{1}{kT} \left\{ \frac{\varepsilon^2 l + 2c_2 (kT)^2 \frac{\partial^2 (\varepsilon^2 l)}{\partial \varepsilon^2}}{\varepsilon l + 2c_2 (kT)^2 \frac{\partial^2 (\varepsilon l)}{\partial \varepsilon^2}} \right\}_{\varepsilon=\varepsilon_0} = \\ &= \frac{1}{kT} \left\{ \varepsilon + 2c_2 \frac{(kT)^2}{\varepsilon l} \left(\frac{\partial^2 (l \varepsilon^2)}{\partial \varepsilon^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 (l \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right) \right\}_{\varepsilon=\varepsilon_0} = \\ &= \frac{1}{kT} \left\{ \varepsilon + \frac{\pi^2}{3} (kT)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial \varepsilon} \right) \right\}_{\varepsilon=\varepsilon_0}.\end{aligned}$$

Так как по определению $\alpha = -\frac{\varepsilon_0}{kT}$, находим:

$$\alpha + \delta = \frac{\pi^2}{3} kT \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=\varepsilon_0}. \quad (12)З$$

Члены первого приближения здесь исчезают, как и для всех остальных термических эффектов. Следует отметить также, что само ε_0 при помощи малого поправочного члена зависит немного от температуры [независящую от температуры часть ε_0 дает величина μ ; см. ч. 1, § 9 формулы (7), (4)].

Л (Теория Лоренца). Из (8) и § 4 (15b), (3а) получается:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{K_2}{K_1 kT} = 2; \quad \alpha = \ln \frac{G}{n h^3} (2\pi m kT)^{\frac{3}{2}} \\ \alpha + \delta &= \ln \frac{G}{n h^3} (2\pi m kT)^{\frac{3}{2}} + 2.\end{aligned} \quad (12)Л$$

Возможная зависимость l от скорости здесь не учитывается вовсе, отчего в формуле (12)Л и отсутствует соответствующий член, учитывающий эту зависимость; наоборот, в формуле (12)З это обстоятельство учитывается вторым слагаемым.

Величина постоянной эффекта Томсона получается из (7); имеем:

$$\rho = \frac{\pi^2}{3} \frac{kT}{e} \frac{\partial}{\partial T} kT \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=\varepsilon_0}. \quad (13)З$$

Предполагая, что электронная плотность не зависит от T , мы должны считать, что ε_0 также мало меняется с изменением температуры. Далее, из температурной зависимости электропроводности вытекает, что l можно считать пропорциональным T . Поэтому

$$\rho = \frac{\pi^2}{3} \frac{k}{e} kT \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l} \frac{dl}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\varepsilon_0}. \quad (13а)З$$

В случае Л имеем:

$$\rho = \frac{kT}{e} \left(\frac{3}{2T} - \frac{\partial \ln n}{\partial T} \right) = \frac{3k}{2e} \left(1 - \frac{2}{3} T \frac{\partial \ln n}{\partial T} \right). \quad (13)Л$$

Полученные для ρ выражения показывают, что порядок величины коэффициента оказывается в обоих случаях совсем различным. Значение 3 оказывается намного меньше, приблизительно в $\frac{2\pi^2 kT}{9\varepsilon_0}$ раз. Правильный порядок величины дает значение 3 , в то время как теория Л дает слишком большую величину. Пропорциональность температуре также, повидимому, соответствует данным опыта*.

Для коэффициента Пельтье получаем из (9) и (12):

$$\Pi_{12} = \frac{(kT)^2 \pi^2}{e} \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon^{(2)}} + \frac{1}{l^{(2)}} \frac{\partial l^{(2)}}{\partial \varepsilon^{(2)}} \right)_{\varepsilon^{(2)} = \varepsilon_0^{(2)}} - \left(\frac{1}{\varepsilon^{(1)}} + \frac{1}{l^{(1)}} \frac{\partial l^{(1)}}{\partial \varepsilon^{(1)}} \right)_{\varepsilon^{(1)} = \varepsilon_0^{(1)}} \right\}, \quad (14)3$$

$$\Pi_{12} = -\frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}. \quad (14)Л$$

Несмотря на то, что обе формулы выглядят совсем различно и дают разную температурную зависимость, численная величина эффекта получается в обоих случаях одинакового порядка (десятые доли вольта). Однако экспериментальные данные о температурной зависимости соответствуют новой теории.

Термоэлектродвижущая сила может быть выражена согласно (11) через коэффициенты Пельтье. Полагая ε и $\frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial \varepsilon}$ независимыми от T (что является хорошим приближением), получаем:

$$F_{12} = \frac{\pi^2 k^2}{6e} \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon^{(1)}} + \frac{1}{l^{(1)}} \frac{\partial l^{(1)}}{\partial \varepsilon^{(1)}} \right)_{\varepsilon^{(1)} = \varepsilon_0^{(1)}} - \left(\frac{1}{\varepsilon^{(2)}} + \frac{1}{l^{(2)}} \frac{\partial l^{(2)}}{\partial \varepsilon^{(2)}} \right)_{\varepsilon^{(2)} = \varepsilon_0^{(2)}} \right\} (T_1^2 - T_2^2), \quad (15)3$$

$$F_{12} = -\frac{k}{e} (\ln n_1 - \ln n_2) (T_1 - T_2). \quad (15)Л$$

Для высоких температур зависимость термоэлектродвижущей силы от температуры (15)3 хорошо подтверждается опытом.

Выражения для ρ , Π_{12} и F_{12} , даваемые новой теорией, удовлетворяют также теореме Нернста, обращаясь в нуль для $T=0$. Последнее не имеет места в теории Лоренца. Что же касается вида температурной зависимости при низких температурах, то здесь мы не можем и ожидать согласия теории с опытом, так как предположение теории о существовании определенного свободного пробега (§ 3) перестает быть справедливым.

* Здесь имеется, однако, значительная трудность, состоящая в том, что знак выражения (13)3, как раз для хороших проводников оказывается неверным. Учет зависимости свободного пробега от скорости [второй член в (13)3] не разъясняет дела, так как согласно модельной теории (ч. IV) свободный пробег должен возрастать с энергией. Все же недавно Блохинцевым и Нордгеймом [14] было показано, что и этот эффект может быть объяснен при помощи соответствующих модельных представлений.

Эффект Бриджмена. В заключение мы приведем еще некоторые замечания, касающиеся эффекта Бриджмена. Этот эффект состоит в том, что наблюдается тепло Пельтье между одинаковыми монокристаллами при одной и той же температуре, если только кристаллы по разному ориентированы. Как показали Эренфест и Рутгерс [15], и этот эффект непосредственно вытекает из предыдущих рассуждений. В формулу (14) 3 для эффекта Пельтье входят два члена. Первый член для рассматриваемого эффекта не играет никакой роли, так как энергия абсолютного нуля в обоих кристаллах независимо от их ориентировки одинакова ($\epsilon_0^{(1)} = \epsilon_0^{(2)}$). Наоборот, второй член, зависящий от изменения свободного пробега со скоростью, может дать объяснение эффекта. Для этого только нужно принять, что характер зависимости свободного пробега от скорости зависит еще и от направления движения.

Наглядно можно пояснить это следующим образом. Пусть в двух проводниках I и II с одинаковой электронной плотностью подвижности (т. е. свободный пробег) для различных скоростей v_1 и v_2 (пусть при этом $v_1 > v_2$) особенно велика сравнительно с другими близкими значениями скорости. В этом случае в проводнике I ток будет обусловлен, главным образом, электронами со скоростью v_1 , а в проводнике II — электронами со скоростью v_2 . Но тогда обязательно при наличии тока на границе раздела будет освобождаться энергия $\frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2)$, которая и будет истолкована

нами как теплота Пельтье. Изложенные соображения применимы и к двум одинаковым монокристаллам в эффекте Бриджмена, если ток в различных направлениях обуславливается преимущественно электронами различной скорости. При этом все же формула (14) не может быть непосредственно перенесена на эффект Бриджмена. При сделанном предположении уже нельзя писать по Лоренцу соотношение § 4(6), а поэтому и весь дальнейший способ интегрирования уже невозможен. Однако и здесь, по крайней мере формально, удастся решить соответствующее обобщенное интегральное уравнение, причем, действительно, получается искомый эффект. Более детальное численное сравнение порядка величин здесь невозможно, так как при интегрировании входят неизвестные функции.*

Можно было бы думать, что разбираемый эффект для газа Ферми-Дирака должен быть очень малым, так как здесь в расчет должны приниматься только электроны с энергией, весьма близкой к ϵ_0 , поэтому оперирование с двумя различными скоростями v_1 и v_2 могло бы вызвать сомнение. В связи с этим мы укажем еще и на другую возможность объяснения эффекта Бриджмена, которая еще в литературе не упоминалась. Именно согласно модельной теории (ч. IV) электроны с одинаковой энергией создают в кристалле ток, который зависит от направления их движения. Поэтому в двух кристаллах в опыте Бриджмена заряды могли бы переноситься и электронами одинаковой энергии (именно, энергии абсолютного нуля), причем, однако, число электронов, участвующих в переносе, должно быть теперь различным. Это могло бы также повести к возникновению термоэлектрических эффектов.

Мы упомянем еще о последнем чисто термоэлектрическом явлении — об эффекте Бенедикса.** Эффект состоит в возникновении термотока в однородном, но неравномерно нагретом веществе. Основная формула § 4 (12) не дает никаких указаний на существование такого эффекта. Таким образом с кинетической точки зрения эффект Бенедикса мог бы быть связан только с какими-то условиями, не соответствующими основным предположениям наших расчетов. Объяснения нельзя найти и в приближенном методе интегрирования (предположение малости возмущения,

* Полное решение задачи для анизотропной среды в высшей степени сложно и до сего времени не дано. Попытка Хаустона [13], как это показал, Рутгерс, не свободна от возражений.

** См. обзорное изложение самого Бенедикса и критику имеющегося экспериментального материала [17].

§ 4 (1) и в пренебрежении f_1 в левой части основного уравнения), так как если бы последний был недопустим, мы не получили бы закона Ома. Остается единственная возможность считать, что выбранные элементы объема нельзя рассматривать как однородные, что существуют градиенты температуры, уже заметные на участках порядка длины свободного пробега. Однако при этих условиях термоэлектрические коэффициенты должны были бы зависеть от этих градиентов.

§ 7. МАГНИТНЫЕ ЭФФЕКТЫ

До сих пор мы везде предполагали только наличие электрического поля. Сейчас мы рассмотрим еще и магнитные эффекты, среди которых важнейшими являются эффект Холла и влияние магнитного поля на сопротивление. Для элементарной теории здесь возникают большие трудности. Как раз для этих эффектов волномеханическое уточнение теории (ч. IV) имеет очень большое значение, в то время как изложенная выше формальная теория оказывается недостаточной. Мы разберем сейчас принцип расчета, который явится, с одной стороны, основой для развития более совершенной теории, а с другой — уже сейчас позволит выявить те пункты, в которых теория нуждается в изменениях. Мы разберем в дальнейшем только так называемые трансверсальные эффекты*.

Пусть магнитное поле H направлено вдоль оси z . В этом случае действующая на электрон сила равна:

$$\mathbf{K} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}H]; \quad K_x = \frac{e}{c} \eta H, \quad K_y = -\frac{e}{c} \xi H, \quad K_z = 0.$$

Имеющееся магнитное поле вызывает добавочное электрическое поле в направлении y (кроме поля в направлении тока x), и полный вид основного уравнения [ср. § 3 (2) и § 4 (2)] будет:

$$\begin{aligned} \frac{df^*}{dt} &= \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} (\xi G_x + \eta G_y) + \frac{eH}{mc} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = \\ &= \int \int \int V(f' - f) d\xi' d\eta' d\varepsilon', \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{где } G_x = eF_x + kT \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad G_y = eF_y + kT \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (1a)$$

В членах, выражающих влияние поля, мы оставляем пока точную функцию распределения

$$f = f_0 + f_1.$$

Можно было бы думать, что для теории магнитных эффектов особую роль будет играть существование спина у электронов**. Оказывается, однако, что это не имеет места. Так как на диполь в однородном поле не действуют силы вовсе (исключая время установления диполя), то влияние поля сводится только к некоторому

* Полный разбор всех трансверсальных эффектов с точки зрения теории Зоммерфельда дан Зоммерфельдом и Франком [10]. Современное состояние волномеханической теории можно найти в статьях Пейерлса [18]. Сравнительно с указанными обзорами наше изложение — весьма кратко.

** На это было указано Блохом [19].

изменению функции распределения f^0 *. Поэтому влияние спина может быть легко учтено; оно оказывается намного меньше разбиаемых эффектов (см. работу Зоммерфельда и Франка, 1. с., стр. 23).

Уравнение (1) может быть решено, если мы положим

$$f = f_0 + \xi \chi_x + \eta \chi_y, \quad (3)$$

что представляет естественное обобщение лоренцовского соотношения § 4 (6). Здесь как χ_x , так и χ_y должны зависеть только от абсолютного значения скорости v (от энергии), но не от направления. Учитывая, что для всякой функции $g(\epsilon)$

$$\frac{\partial g(\epsilon)}{\partial \xi} = m \xi \frac{\partial g(\epsilon)}{\partial \epsilon},$$

находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \chi_x + m \xi \left(\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} + \xi \frac{\partial \chi_x}{\partial \epsilon} + \eta \frac{\partial \chi_y}{\partial \epsilon} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \chi_y + m \eta \left(\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} + \xi \frac{\partial \chi_x}{\partial \epsilon} + \eta \frac{\partial \chi_y}{\partial \epsilon} \right). \end{aligned}$$

При подстановке этих выражений в (1) получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} (\xi G_x + \eta G_y) + \frac{eH}{mc} (\eta \chi_x - \xi \chi_y) = \\ &= \int \int \int V \{ \chi_x (\xi' - \xi) + \chi_y (\eta' - \eta) \} d\xi' d\eta' d\epsilon' = -\frac{v}{l} (\xi \chi_x + \eta \chi_y). \end{aligned} \quad (4)$$

Вычисление интеграла в члене, зависящем от соударений, может быть проведено так же, как и в § 4, и поэтому l будет выражаться попрежнему § 4 (8). Отсюда сразу видно, что магнитное поле само по себе еще не нарушает статистического равновесия, потому что при $G_x = G_y = 0$ уравнение (4) удовлетворяется при $\chi_x = \chi_y = 0$.

Так как уравнение (4) должно выполняться для всех значений ξ и η , то соответствующие коэффициенты в обеих его частях должны быть равны. Отсюда мы получаем для χ_x и χ_y два обыкновенных уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} G_x - \frac{eH}{mc} \chi_y + \frac{v}{l} \chi_x &= 0, \\ \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} G_y + \frac{eH}{mc} \chi_x + \frac{v}{l} \chi_y &= 0. \end{aligned}$$

Их решение дает:

$$\begin{aligned} \chi_x &= -\frac{l}{v} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{G_x + \frac{hl}{v} G_y}{1 + \left(\frac{hl}{v} \right)^2}, \\ \chi_y &= -\frac{l}{v} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{G_y - \frac{hl}{v} G_x}{1 + \left(\frac{hl}{v} \right)^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

* f_0 будет явно зависеть от H . Выражение для f_0 будет:

$$f_0 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{e^{(\epsilon - \epsilon_0 + \mu H)/kT} + 1} + \frac{1}{e^{(\epsilon - \epsilon_0 - \mu H)/kT} + 1} \right\}. \quad (2)$$

где для сокращения обозначено:

$$h = \frac{eH}{mc}.$$

Для электрического и теплового тока мы получаем теперь уже две компоненты, не равные нулю, именно:

$$\left. \begin{aligned} i_x &= e \left\{ L_1 \left(eF_x + kT \frac{\partial x}{\partial x} \right) + HM_1 \left(eF_y + kT \frac{\partial x}{\partial y} \right) - L_2 \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} - HM_2 \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right\}, \\ i_y &= e \left\{ L_1 \left(eF_y + kT \frac{\partial x}{\partial y} \right) - HM_1 \left(eF_x + kT \frac{\partial x}{\partial x} \right) - L_2 \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y} + HM_2 \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right\}, \\ w_x &= L_2 \left(eF_x + kT \frac{\partial x}{\partial x} \right) + HM_2 \left(eF_y + kT \frac{\partial x}{\partial y} \right) - L_3 \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} - HM_3 \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y}, \\ w_y &= L_2 \left(eF_y + kT \frac{\partial x}{\partial x} \right) - HM_2 \left(eF_y + kT \frac{\partial x}{\partial y} \right) - L_3 \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} + HM_3 \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix}$$

$$\text{Здесь } L_n = -\frac{8\pi Gm}{3h^3} \int_0^\infty \frac{l \epsilon^n \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}}{1 + \left(\frac{hl}{v}\right)^2} d\epsilon; \quad M_n = -\frac{8\pi Ge}{3h^3 c} \int_0^\infty \frac{l^2 \epsilon^n \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}}{1 + \left(\frac{hl}{v^2}\right)^2} d\epsilon. \quad (7)$$

Из этих очень общих формул (справедливых как в теории Зоммерфельда, так и в теории Лоренца) вытекают все интересные нас эффекты как частные случаи. Интегралы L_n и M_n могли бы быть вычислены по схеме, данной в ч. I, § 8. Наличие спина может быть учтено выбором для f_0 выражения (2), причем общие выражения для i и w сохраняют свою форму. Величины L_n при уничтожении магнитного поля ($h \rightarrow 0$) переходят в интегралы K_n § 4 (13).

В качестве примера применения полученных формул рассмотрим изотермический эффект Холла *.

Этот эффект состоит в появлении поперечного электрического поля (F_y) при наличии тока i_x и магнитного поля H_z . Мы положим $i_y = 0$ и вычислим распределение потенциала для того случая, когда цепь в направлении y (перпендикулярно к току) не замкнута. Из (6) следует:

$$(i_y = 0; \frac{\partial}{\partial x} = 0; \frac{\partial}{\partial y} = 0),$$

$$F_y = H \frac{M_1}{L_1} F_x,$$

$$i_x = e^2 F_x L_1 + e^2 F_y H M_1 = e^2 F_x \left(L_1 + H^2 \frac{M_1^2}{L_1} \right) = \kappa F_x. \quad (8)$$

Константой холл-эффекта (R) называют падение потенциала на участке 1 см при i_x и H равном единице. Поэтому:

$$R = \frac{F_y}{i_x H} = \frac{F_y}{\kappa F_x H} = \frac{M_1}{\kappa L_1} = \frac{M_1}{e^2 L_1 \left(L_1 + H^2 \frac{M_1^2}{L_1} \right)} \quad (9)$$

* Изотермический эффект следует отличать от адиабатического, для которого $w_y = 0$ (теплопроницаемость боковых стенок). Вследствие большой теплопроводности металлов сравнительно с изоляторами обычно выполняются условия адиабатического эффекта. Подробнее об этом см. у Зоммерфельда и Франка (l. c.).

Следует отметить уже здесь, что волномеханическое уточнение всей картины (ч. IV, § 7) позволяет объяснить и так называемый аномальный холл-эффект.

Схема разобранный выше опыта такая же, как и при исследовании изменения сопротивления в поперечном магнитном поле. Этот эффект в последнее время подробно изучался Капицей, вплоть до самых высоких достижимых полей. Из (8) и § 5 (1) получаем для отношения электропроводностей в поле x и вне поля (x_0):

$$\frac{x}{x_0} = \frac{L_1}{K_1} \left\{ 1 + H^2 \frac{M_1^2}{L_1^2} \right\} = \frac{L_1}{K_1} \{ 1 + H^2 x^2 R^2 \}. \quad (10)$$

Для численного значения константы холл-эффекта мы получим уже достаточное приближение, если используем только первый член разложения, ч. I, § 8 (7). Это дает:

$$R = \frac{e}{mc} \frac{I_0}{v_0 x}. \quad (11)$$

Заменяя x на x_0 (что вполне допустимо для не очень больших полей) и используя § 5 (1a) 3, мы приходим к следующему выражению для константы R в теории Зоммерфельда:

$$R = \frac{1}{ecN}. \quad (12) 3$$

Несколько более наглядные расчеты по Лоренцу приводят к выражению

$$R = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{ecN}, \quad (12) Л$$

почти совпадающему с (12) 3.

Оба выражения отличаются только несущественным числовым множителем. Они дают для R порядок величины, хорошо согласующийся с данными опыта, если положить N равным числу атомов **.

Элементарная теория не дает никаких указаний об изменении сопротивления. В первом приближении согласно (7) и § 4 (13):

$$L_1 = \frac{K_1}{1 + \left(\frac{h I_0}{v_0} \right)^2}; \quad \frac{M_1}{L_1} = \frac{I}{mc} \frac{I_0}{v_0},$$

и потому из (10) получаем $\frac{x}{x_0} = 1$; при оперировании функцией распределения f_0 (для $T = 0$) зависимости сопротивления от магнитного поля не получается вовсе. Для получения этой зависимости оказывается необходимым

* Мы употребляем Гауссову систему единиц вместо электромагнитной, как у Зоммерфельда; отсюда множитель $\frac{1}{c}$.

** Особенно обращаем внимание на результаты работы Киккина и Фасидова²⁰ с расплавленными щелочами. Для последних основные предположения теории ближе всего соответствуют действительности.

использовать второе приближение. Элементарные рассуждения дают в этом случае:

$$\frac{\kappa}{\kappa_0} = 1 - \frac{BH^2}{1 + CH^2},$$

и для относительного изменения сопротивления $\rho = \frac{1}{\kappa}$ получается выражение

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta \kappa}{\kappa_0} = \frac{BH^2}{1 + CH^2}. \quad (13)$$

B и C имеют следующие значения:

$$B = \frac{\pi^2}{24} \frac{e^2}{mc^2} \left(\frac{kT}{\epsilon_0} \right)^2, \quad (14a)$$

$$C = \frac{l_0^2 e^2}{2\epsilon_0 mc^2} = \kappa_0^2 R^2. \quad (14b)$$

Зависимость (13), повидимому, хорошо соответствует опытным данным. Для малых H получается квадратичный закон, для больших H мы должны ожидать явления „насыщения“. Таким образом для объяснения уклонений от квадратичного закона нет необходимости вводить новые гипотезы. Согласно Франку кривые Капицы хорошо объясняются, они дают для слабых полей квадратичный закон, переходящий для сильных полей в линейный. Загиб кривых, связанный с насыщением, должен наблюдаться только в очень сильных полях ($CH^2 > 1$). В настоящее время уже имеются указания на существование такого эффекта для Te и Ge . Значение константы C , которая согласно (14b) может быть получена из холл-эффекта, также оказывается удовлетворительным. Отметим, что вся теория развита для случая достаточно высокой температуры. Имеющиеся же экспериментальные данные относятся обычно к низким температурам, где зависимость сопротивления от поля особенно сильна. Поэтому мы не можем и ожидать очень хорошего согласия теории с опытом.

Значение константы B получается, наоборот, значительно меньше, чем нужно (приблизительно в 10^4 раз), причем температурная зависимость оказывается также неверной. Формальная теория оказывается здесь недостаточной. Однако, как показал Пейерлс (1. с.), можно ожидать, что последовательное проведение волновомеханической теории приведет к лучшим результатам. Причина малости B лежит в исчезновении первого приближения. По волновой теории, однако, зависимость энергии от скорости уже не будет обладать сферической симметрией, а групповая скорость в поле кристаллической решетки будет зависеть еще и от направления движения. Учет этого обстоятельства уже в первом приближении приводит к существованию определенного эффекта. При расчете входит фактор, по порядку величины равный $\left(\frac{\epsilon_0}{kT} \right)^2$, который компенсирует величину $\left(\frac{kT}{\epsilon} \right)^2$ в (14a) и приводит к приемлемому значению для B . По оценке Пейерлса незначительная анизотропия ($\sim 10^0/0$) могла бы уже вызвать соответствующий эффект. Однако здесь нельзя уже использовать соотношение (3), и задача делается очень сложной*.

Что касается влияния продольного магнитного поля, то из предыдущих рассуждений ясно, что само магнитное поле не может нарушить стационарного состояния; оно не может поэтому и влиять на сопротивление. Это справедливо, во всяком случае, до тех пор

* Для одного специального случая теория была дана Блохинцевым и Нордгеймом¹⁴.

пока можно пренебречь наличием спина. Действительно, магнитное поле в направлении x оказывает влияние только на η - и ζ -компоненты, так что распределение в отношении ξ будет определяться попрежнему только полем F_x . Продольные эффекты, так же как и поперечные, чрезвычайно малы.

Исходя из формулы (6), можно дать теорию и остальных магнитных и термомагнитных эффектов. При этом получается следующий общий результат. Для тех эффектов, которые проявляются в первом приближении, теоретические соотношения между коэффициентами хорошо согласуются с опытом. Порядок величины коэффициентов получается также правильным. Для эффектов, требующих второго приближения в функции распределения, такое совпадение уже не имеет места. Этот результат делается вполне понятным, если учесть соображения, приведенные в настоящем параграфе.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Pauli, Sommerfeld-Festschrift, Leipzig, 1928.
 2. A. Einstein, Phys. Z. 18, 121, 1917.
 3. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London, A 114, 293, 1927.
 4. P. Jordan u. E. Wigner, Z. Physik 47, 631, 1928; H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Lpz., 1931; Kikuchi u. L. Nordheim, Z. Physik 60, 652, 1932.
 5. L. Nordheim, Proc. Roy. Soc. London, A 119, 689, 1928.
 7. F. Ehrenfest. Z. Physik 45, 455, 1927.
 8. L. Nordheim, Ann. d. Phys. 9, 607, 1931.
 9. N. Bohr. Diss., Kopenhagen, 1911.
 10. A. Sommerfeld u. N. H. Franck, Rev. mod. Phys. 3, 1, 1931.
 11. R. de L. Kronig, Proc. Roy. Soc., London, A 124, 409, 1929; 133, 255, 1931.
 12. S. Schubin. Z. Physik 68, 97, 1931.
 13. Y. Fujioka, Z. Physik 76 537, 1932.
 14. D. Blochinzev u. L. Nordheim, Z. Physik 84, 168, 1933.
 15. P. Ehrenfest u. A. I. Rutgers, Roc. Amstr. 32, 698, 883, 1929; A. I. Rutgers, Dissertation Leiden, 1930.
 16. Houston. Z. Physik 48, 449, 1928.
 17. C. Benedicks, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. 48, 28, 1929; Hdb. d. Phys. 13, 200, Berlin, 1928.
 18. R. Peierls, Leipziger. Vortr., 1930, 75; Ann. d. Phys. 10, 97, 1931.
 19. F. Bloch, Z. Physik 53, 216, 1929.
 20. J. Kikoin u. J. Fakidow, Z. Physik 71, 393, 1931.
-