

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

Физiol

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ПРОТОНОВ¹

П. А. М. Дирак, Кембридж

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дирак начинает свою крайне интересную статью ссылкой на выведенное ранее им самим релятивистское волновое уравнение электрона (1). Однако, сущность рассматриваемого им затруднения с отрицательной энергией, как отмечает сам Дирак, не связана со специальным видом волнового уравнения; больше того, затруднение это имеет место и в до-квантовой теории, будучи неразрывно связано с основными положениями теории относительности.

Рассмотрим в виде примера свободно движущуюся материальную частицу, масса которой в состоянии покоя равна m . Кинетическая энергия этой частицы согласно классической механике равна $\frac{mv^2}{2}$, согласно же теории относительности (полная) энергия ее равна

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Таким образом энергия частицы является в классической механике величиной существенно положительной (принимая, что m положительно), тогда как знак релятивистского выражения энергии W остается неопределенным, ибо, вообще говоря, неопределенен знак корня.

Правда, обычно неявно делается дополнительное допущение, что в выражении для W нужно брать лишь положительное значение корня, т. е. что в действительности

¹ Proc. Roy. Soc., Jan. 1930, стр. 360. Перевод студ. ЛГУ Я. И. Ларионова, С. Ю. Лукьянова и П. Павикского.

все частицы обладают положительной энергией. Это допущение не ведет к внутренним противоречиям теории по следующей причине. Скорость частицы v может принимать все значения от 0 до c , соответственно чему энергия W может принимать значения от $+mc^2$ до $+\infty$ и от $-mc^2$ до $-\infty$. Таким образом наименьшее положительное значение энергии $+mc^2$ и наибольшее отрицательное значение ее $-mc^2$ разделены конечным промежутком. Так как по классической (т. е. до квантовой) теории энергия частицы может изменяться лишь непрерывным образом, то знак энергии каждой отдельной частицы действительно изменяться не может.

Положение дела существенно меняется в квантовой теории, согласно которой могут иметь место прерывные (скачкообразные) изменения состояния. Таким образом в квантовой теории допущение о положительной энергии всех частиц только в том случае окажется лишенным внутренних противоречий, если перескоки частиц из состояний положительной энергии в состояния энергии отрицательной окажутся невозможными. В рамках старой (Боровской) квантовой теории вопрос этот не мог быть разрешен, потому что теория эта вообще не давала возможности вычислить вероятность квантовых переходов; пользуясь же принципом соответствия, можно оценить вероятность только таких переходов, которым соответствуют классически возможные изменения состояния.

Согласно же новой квантовой теории переходы из состояний положительной энергии оказываются возможными, и таким образом затруднение с отрицательной энергией не может быть обойдено на основании указанного допущения: если бы даже в некоторый начальный момент все частицы обладали энергией положительной, то с течением времени часть частиц должна была бы перейти в состояния отрицательной энергии. Хотя вероятность этих переходов и была фактически подсчитана на основе Дираковского уравнения электрона, однако, эта вероятность остается конечной и при замене Дираковского уравнения релятивистской формой уравнения Шредингера.

С другой стороны, частицы отрицательной энергии должны были обладать совершенно аномальными свойствами: двигаться против приложенных сил, отдавать энергию при ускорении и поглощать ее при замедлении движения и т. п. Таким образом затруднения, рассмотрение которых привело Дирака к созданию его крайне интересной теории протонов действительно имеют совершенно фундаментальное значение.

В заключение отметим два затруднения, с которыми встретилась сама теория Дирака, изложенная им в настоящей статье. Во-первых, до настоящего времени (август 1930 г.) не удалось подтвердить высказанного Дираком в конце § 2 предположения, что разница массы электрона и протона („дыры“) может быть объяснена взаимодействием электронов отрицательной энергии; более того, некоторые неопубликованные соображения Паули заставляют сомневаться в справедливости этого предположения, имеющего решающее значение для всей теории Дирака. Во-вторых, вероятность сопровождающегося излучением спонтанного перехода электрона положительной энергии в незанятое состояние отрицательной энергии („скачок электрона в дыру“, нейтрализация электрона и протона) была за последнее время вычислена как самим Дираком, так и другими авторами,¹ причем вычисленная вероятность этих переходов оказалась чрезмерно большой, не могущей быть согласованной с опытными фактами. Дирак надеется, что эта невязка теории с опытом объясняется лишь невозможностью в настоящее время учесть в теории разность массы электрона и протона.²

Иг. Тамм

§ 1. Сущность затруднений, связанных с отрицательной энергией

Релятивистическая квантовая теория движения электрона в электромагнитном поле с успехом предсказала собственное вращение электрона. Однако она принесла с собой некоторые серьезные затруднения, указывающие на необходимость основательных изменений, прежде чем на нее можно будет смотреть, как на точное описание природы. Трудности сопряжены с тем фактом, что в волновом уравнении, написанном в форме:

$$\left| \frac{W}{c} + \frac{\hbar}{c} A_0 + \rho_1 (\sigma \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}) + \rho_3 mc \right| \Psi = 0 \quad (1)$$

¹ P. A. M. Dirac, Proc. Cambr. Phil. Soc. июль 1930; Иг. Тамм, Z. Physik 63, 545, 1930. Проведший вычисление для частного случая Оппенгеймер (Phys. Rev., 1930) допустил вычислительную ошибку.

² Общие вопросы, связанные с представлениями Дирака, будут затронуты в связи с другой статьей Дирака — „Протон“ — печатающейся в следующем номере „Успехов“. *Ред.*

в дополнение к ожидаемым решениям, по которым кинетическая энергия электрона положительна, имеется такое же число неожиданных решений с отрицательной кинетической энергией электрона, что, казалось бы, лишено всякого физического смысла.

Так, например, в случае неизменного электромагнитного поля, уравнение (1) допускает периодическое решение вида

$$\Psi = ue^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \quad (2)$$

где u не зависит от t , указывая на стационарное состояние; E — полная энергия положения, включающая выражение mc^2 , требуемое теорией относительности.

Решения (2) с отрицательными значениями для E существуют так же, как и с положительными. В самом деле, если мы возьмем матричное выражение операторов $\rho_1\sigma_1, \rho_2\sigma_2, \rho_3\sigma_3$ с вещественными элементами матриц, то выражение, сопряженное с любым решением уравнения (1), будет решением волнового уравнения, полученного из (1) изменением знака потенциала A , и либо первоначальная волновая функция, либо сопряженная с ней должна дать отрицательное E .

Затруднение это свойственно не одной только квантовой теории электрона, как таковой, но является общим, так как оно встречается во всей теории относительности так же, как и в классической теории. Оно возникает в результате того фундаментального обстоятельства, что в релятивистском гамильтоновском уравнении классической теории:

$$(W + \frac{e}{c}A_0)^2 - (\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 - m^2c^2 = 0 \quad (3)$$

знак W , или скорее $W + eA_0$, остается неопределенным. Хотя операция над волновой функцией в (1) линейна относительно W , они все же, грубо говоря, эквивалентны левой части (3), и неопределенность знака сохраняется. Затруднение это не существенно для классической теории, ибо ее динамические переменные должны всегда изменяться непрерывно, вследствие чего здесь имеется резкое разграничение

между теми решениями уравнений движения, для которых $W + eA_0 \geq mc^2$, и теми, для которых $W + eA_0 \leq mc^2$, так что можно просто игнорировать последние.

В квантовой теории мы не можем, однако, так легко преодолеть эту трудность. Правда, в случае неизменного электромагнитного поля, можно разграничить решения уравнения (1) вида (2) с положительным E и решения с отрицательным E , утверждая, что только первые имеют физический смысл (как и поступают, применяя теорию к определению уровней энергии в атоме водорода); но это не представляется возможным, если система подвержена возмущениям и может переходить из одного состояния в другое.

В общем случае произвольно меняющегося электромагнитного поля мы не можем раз навсегда отделить решения волнового уравнения, дающие положительную энергию, от прочих. Далее, в точной квантовой теории, где электромагнитное поле также подчинено квантовым законам, могут иметь место такие переходы, когда энергия электрона изменяется от положительного до отрицательного значения, даже в отсутствии какого-либо внешнего поля. Излишек энергии, равный в итоге $2mc^2$, испускается в форме радиации (закон сохранения энергии и момента требует по крайней мере двух световых квантов, образованных одновременно при этом процессе).

Рассмотрим теперь несколько подробнее волновые функции, представляющие состояние отрицательной энергии электрона. Если мы наложим друг на друга некоторое количество волновых функций таким образом, чтобы получить „волновой пакет“, то его движение будет происходить по классической траектории, задаваемой гамильтонианом (3) с отрицательным $W + eA_0$. Такая траектория, как легко видеть, является возможной траекторией для обычного электрона с положительной энергией, движущегося в электромагнитном поле противоположного знака или для электрона с зарядом $+e$ (и положительной энергией) движущегося в электромагнитном поле того же знака.¹

¹ См., например, H. Weyl, Z. Physik 56, 332, 1929.

Итак, электрон с отрицательной энергией движется во внешнем поле, как бы обладая положительным зарядом. Этот результат заставлял некоторых предполагать связь между электроном с отрицательной энергией и протоном, т. е. ядром водородного атома. Однако нельзя просто утверждать, что электрон с отрицательной энергией есть протон, так как это приводит к следующим парадоксам:

1. Переход электрона из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной должен быть интерпретирован, как переход электрона в протон, что нарушает закон сохранения электрических зарядов.

2. Хотя электрон с отрицательной энергией движется во внешнем поле, как бы обладая положительным зарядом, однако на основании закона сохранения моментов легко показать, что поле, созданное самим электроном, будет таким, как если бы электрон обладал отрицательным зарядом. Отсюда, например, следует, что электрон с отрицательной энергией будет отталкивать обычный электрон с положительной энергией, хотя сам будет притягиваться им.

3. Электрон с отрицательной энергией должен обладать тем меньшей энергией, чем быстрее он движется, и, чтобы прийти в состояние покоя, он должен бы поглотить энергию.

Частицы подобного рода никогда не были наблюдаемы

Подробное рассмотрение тех условий, которые, по нашим представлениям, существуют в реальном мире, дает понять, что связь между протоном и электроном с отрицательной энергией основана на каком-то ином базисе, позволяющем устранить все вышеупомянутые затруднения.

§ 2. УСТРАНЕНИЕ ЗАТРУДНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Наиболее вероятными состояниями электрона являются те, энергия которых минимальна, т. е. состояния с отрицательной энергией и очень большой скоростью. Все электроны мира стремятся прийти в это состояние с эмиссией

радиации. Однако, как всегда, здесь входит в силу принцип исключения Паули, запрещающий занимать одно и то же состояние более чем одному электрону. Предположим теперь, что электронов в мире так много, что ими уже заняты все наиболее вероятные состояния, или, точнее говоря, заняты все состояния с отрицательной энергией, за исключением, быть может, некоторых с малой скоростью. В этом случае электроны с положительной энергией будут иметь весьма мало шансов „перескочить“ в состояния с отрицательной энергией и поэтому будут вести себя подобно обычным электронам, наблюдаемым в лабораториях. Мы можем считать число электронов с отрицательной энергией бесконечно большим и даже бесконечно большим в единице объема во всем мире. Но если их распределение в точности однородно, то мы должны ожидать, что они будут для нас совершенно незаметны. Только лишь небольшие отклонения от совершенной однородности, созданные тем, что некоторые состояния электронов с отрицательной энергией остались незанятыми, могут быть нами обнаружены.

Рассмотрим свойства незамещенных мест или „дырок“. Проблема подобна той, которая возникает при изучении уровня рентгеновых лучей в атоме со многими электронами. Согласно с общей теорией уровней рентгеновых лучей дырка, образующаяся при удалении одного из внутренних электронов атома, может быть описана, как некая орбита, а именно, как орбита отсутствующего электрона, удаленного с этого места. Такое описание может быть оправдано квантовой механикой, если только рассматривать орбиту не в смысле Бора, а как нечто, представляемое трехмерной волновой функцией (не считаясь с вращением). Таким образом дырка или незамещенное место в области, обычно насыщенной электронами, во многом подобна единичному электрону в области, обычно лишенной электронов.

В случае рентгеновых лучей дырки должны считаться как бы обладающими отрицательной энергией, так как для того, чтобы добиться исчезновения одной из них (т. е. для ее заполнения), к ней необходимо прибавить обычный электрон с положительной энергией. Как раз обратное имеем

место в нашем распределении электронов с отрицательной энергией. Эти дырки будут обладать положительной энергией и в этом отношении будут подобны обычным частицам. Далее, движение одной из этих дырок во внешнем электромагнитном поле будет подобно движению электрона с отрицательной энергией, который заполнил бы ее. Таким образом дырка будет как бы обладать зарядом $+e$. Итак, мы приходим к выводу, что дырки в распределении электронов с отрицательной энергией суть протоны. Если электрон с положительной энергией попадет в дырку и заполнит ее, мы будем иметь исчезновение протона и электрона с испусканием лучистой энергии.

При рассмотрении поля, образованного распределением электронов с отрицательной энергией, возникает одно затруднение. В этом случае бесконечная плотность электричества, согласно с уравнением Максвелла,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi\rho \quad (4)$$

должна произвести поле бесконечной дивергенции. Однако, кажется естественным интерпретировать ρ в уравнении Максвелла (4), как отклонение от нормального состояния электризации мира, под которым, согласно с этой теорией, мы будем понимать такое состояние, когда все места с отрицательной энергией заняты, а с положительной энергией — свободны. Тогда ρ будет состоять из заряда $-e$, возникающего от каждого занятого места с положительной энергией, и заряда $+e$, возникающего от каждого незанятого места с отрицательной энергией. Таким образом поле протона и поле заряда $+e$ будут тождественны.

Таким путем мы можем преодолеть три затруднения, упомянутые в конце предыдущего параграфа. Необходимо постулировать существование только одного основного рода частиц, вместо двух, требовавшихся ранее. Очевидное стремление всех частиц перейти в состояния с наименьшей энергией приводит к тому, что все наблюдаемые объекты в природе имеют положительную энергию.

Может ли настоящая теория объяснить большую диссиметрию, существующую между электронами и протонами, и выражающуюся в их различной массе и способности протонов образовывать более тяжелые атомные ядра. Очевидно, теория дает в значительной степени симметрию между электронами и протонами. Мы можем переменить их места и утверждать, что протоны суть реальные частицы, а электроны только дырки в равномерном распределении протонов с отрицательной энергией. Однако симметрия становится математически несовершенной, если принять в расчет взаимодействие между электронами. Если пренебречь этим взаимодействием, гамильтониан, описывающий всю систему, будет иметь вид $\sum H_a$, причем H_a есть гамильтониан или энергия электрона в состоянии a , суммирование же производится по всем занятым местам. Он отличается только на постоянную (т. е. на нечто независимое от того, какие именно места заняты) от суммы $\sum (-H_a)$, взятой по всем незаполненным местам. Таким образом мы получим формально ту же динамическую систему, если примем, что незанятые состояния добавляют к гамильтониану член $-H_a$. С другой стороны, принимая в расчет взаимодействие между электронами, получим в гамильтониане дополнительный член вида $\sum V_{ab}$, где суммирование производится по всем парам занятых мест (a, b), что не эквивалентно любой сумме, взятой по парам незанятых мест. Итак, взаимодействие электронов дает существенно другой гамильтониан, если смотреть на протоны как на реальные частицы, занимающие места.

Последствия этой диссимметрии не легко подсчитать с релятивистической точки зрения, но мы надеемся, что она приведет в будущем к объяснению различия масс протона и электрона. Возможно, что прежде чем удастся достичь этого результата, появится необходимость в более совершенной теории взаимодействия, быть может, основанной на вычислениях Эддингтоном ¹ константы тонкой структуры $\frac{e^2}{\hbar c}$.

¹ A. Eddington, Proc. Roy. Soc. 122, 358, 1929.

§ 3. Явления рассеяния

Как элементарный пример, иллюстрирующий предыдущее, рассмотрим проблему рассеяния радиации свободным или связанным электроном.

Согласно теории, явление рассеяния надо представлять себе, как процесс двойного перехода, состоящего, во-первых, из абсорбции кванта электроном, переходящим тотчас же в другое состояние, и затем эмиссии с одновременным перескоком электрона в его окончательное положение (или сначала эмиссия, а потом поглощение). В конечном счете нам предстоит рассмотреть три состояния всей системы: 1) первоначальное состояние, с квантом, падающим на электрон в его исходном положении, 2) промежуточное, когда налицо два или ни одного кванта и электрон в ином положении, и 3) окончательное с рассеянным квантом и электроном в конечном состоянии.

Первое и последнее состояния всей системы должны обладать той же самой общей энергией, от которой энергия в промежуточной стадии, длящейся очень короткое время, может существенно отличаться.

Возникает вопрос о том, как можно истолковать этот процесс рассеяния, когда промежуточное состояние есть состояние с отрицательной энергией электрона. Согласно прежним воззрениям, это последнее не имеет никакого физического смысла и сомнительно, чтобы явление рассеяния, возникающее через его посредство, могло быть заключено в формулу для коэффициента рассеяния. Это приводит к серьезным затруднениям, ибо во многих важных практических случаях чуть ли не все акты рассеяния исходят от промежуточного состояния с отрицательной энергией электрона. Действительно, для свободного электрона и радиации низкой частоты, где имеют силу классические формулы, все рассеяние проходит через такое промежуточное состояние.

Согласно изложенной здесь теории, скачок электрона в состояние с отрицательной энергией абсолютно запрещен принципом исключения, так что процесс двойного перехода

с промежуточного состояния отрицательной энергии тем самым исключается. Мы имеем однако другой вид двойного перехода, а именно, когда сперва один из электронов с отрицательной энергией перескакивает в требуемое окончательное положение электрона с поглощением (или эмиссией) кванта и лишь потом первоначальный электрон с положительной энергией падает в дырку, образовавшуюся в результате первого перехода, с эмиссией (абсорбцией) кванта. Этот процесс дает в итоге окончательное состояние всей системы неотличимое от такового, полученного в результате прямого процесса, в котором один и тот же электрон совершает два последовательные скачка. Эти новые процессы должны привести к тому же, что и прямые процессы, которые исключены в результате промежуточного состояния с отрицательной энергией электрона, потому что элементы матриц, определяющие вероятности переходов, одни и те же в обоих случаях, хотя и входят в игру в обратном порядке.

Таким образом старые формулы рассеяния, в которых никакие промежуточные состояния не исключались, должны быть оправданы.