

## ГИПОТЕЗА СВЕТОВЫХ КВАНТОВ

ЕЕ РАЗВИТИЕ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ <sup>1</sup>

К двадцатипятилетию гипотезы световых квантов (1905—1930)

*П. Нордан, Гамбург*

Введение. I. Первоначальное развитие гипотезы световых квантов. 1. Работы Эйнштейна периода 1905 — 1909 гг. 2. Вывод планковского закона Дебаем. 3. Исследования Эйнштейна периода 1916—1917 гг. 4. Построение теории световых квантов. II. Световые кванты и волновая теория. 5. Кризис теории света. 6. Теория Бора-Крамерса-Слэтера. III. Волны материи. 7. Статистика Бозе-Эйнштейна. 8. Волны де Бройля. 9. Волны де Бройля и Эйнштейновская теория газа. IV. Влияние гипотезы световых квантов на развитие квантовой механики. 10. Волны Шредингера. 11. Волновая механика и теория матриц. 12. Дальнейшее развитие теории. V. Квантово-механическая теория излучения. 13. Квантовая механика флуктуаций излучения. 14. Взаимодействие атомов излучения. 15. Проблема нескольких тел и квантовая механика. 16. Волны и частицы. 17. Релятивистское построение теории.

## ВВЕДЕНИЕ

Планк впервые обосновал квантовую гипотезу следующими рассуждениями. Если представить себе, что электрон упруго связан с некоторым положением равновесия, около которого он в состоянии колебаться с частотой  $\nu$ , и если затем предположить, что он подвергается влиянию электро-

<sup>1</sup> Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. B. VII. Berlin. Springer, 1929.

магнитного излучения, то средняя энергия колеблющегося электрона  $W$ , остается длительно неизменной в том случае, если ее значение связано с плотностью излучения  $\rho$ , соотношением

$$W_\nu = \frac{c^3}{8\pi\nu^2} \rho_\nu \quad (1)$$

( $c$  — скорость света). Это можно показать, применив классическую механику для колеблющегося электрона, теорию Максвелла для поля излучения и теорию Лоренца для взаимодействия между ними. Но по данным опыта

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (2)$$

Именно эта формула была получена Планком путем интерполирования между формулами излучения Рэлея — Джинса и Вина, а затем была подтверждена экспериментально, прежде чем Планк нашел теоретическое объяснение ее. Из равенств (1) и (2) следует, что известная статистическая теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы, вытекающая из классической теории и дающая для энергии осцилляторов, находящихся в термическом равновесии, значение  $W_\nu = kT$ , не может быть справедлива, так как она совместно с равенством (1) приводит к закону излучения Рэлея — Джинса. Напротив, согласно равенствам (1) и (2) должно иметь место соотношение:

$$W_\nu = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (3)$$

Из этой формулы Планк и сделал свой потрясающий вывод о существовании дискретных энергетических уровней в осцилляторах такого рода. Этот вывод, очевидно, разрушал самые глубокие основания всех теорий, применявшихся для вывода формулы (1), — именно предположение о непрерывном ходе явлений природы. Критика часто обрушивалась на это доказательство, кажущееся логически столь легко уязвимым, но я должен сказать, что никогда не мог

смотреть на этот ход мыслей иначе, чем с глубоким почтением, если можно так выразиться. Замечательный инстинкт дал Планку возможность найти как раз то место, где классические теории, несмотря на полную их непригодность к решению рассматривавшейся Планком задачи, дали в виде исключения правильную и решающую формулу. Специальное соотношение (1) правильно, хотя общие теории, из которых оно было выведено, неправильны: совершенно особое сочетание содержания этих теорий со специальными свойствами гармонического осциллятора привело, в сущности говоря случайно, к правильному результату.

С таким же положением мы встретимся и в других решающих пунктах исторического развития квантовой теории. Основы классической теории, разумевшиеся раньше как нечто само собой понятное, оказывались ложными при проникновении в область квантовых явлений. Таким образом сначала вообще не было никакой возможности делать логически-безупречно обоснованные заключения о законах этой совершенно неизвестной области, и продвигаться вперед можно было только таким путем, как Планк в приведенном выше рассуждении; а именно в основу положить некоторые законы и формулы классической теории, относительно которых можно было предполагать, что они имеют более широкую область приложимости, чем представления, из которых они первоначально были выведены.

Стремления постепенно приспособить в этом смысле теоретические представления к своеобразным фактам этой новой области явлений путем обобщения и развития классических понятий по существу группируются вокруг двух основных циклов идей: гипотезы световых квантов Эйнштейна и принципа соответствия Бора. Характеризуемые ими направления квантовой теории развивались в течение некоторого времени отдельно, и сравнительно мало влияли друг на друга. Только в новой квантовой механике оба они слились в нечто единое. Здесь мы проследим только за развитием гипотезы световых квантов.

## I. ПЕРВОНАЧАЛЬНОЕ РАЗВИТИЕ ГИПОТЕЗЫ СВЕТОВЫХ КВАНТОВ

## 1. РАБОТЫ ЭЙНШТЕЙНА ПЕРИОДА 1905 — 1909 ГГ.

Развитие гипотезы световых квантов начинается с опубликованной в 1905 г. Эйнштейном работы: „Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt“ („Об одной эвристической точке зрения, касающейся получения и превращения света“). В этой работе Эйнштейн впервые высказал гипотезу о том, что световой поток — по крайней мере в случае небольших плотностей излучения — состоит из дискретных, корпускулярных квантов энергии  $h\nu$ ; эту гипотезу он обосновал двумя различными рассуждениями.

С одной стороны, он усмотрел основу для своей гипотезы в опытах, относящихся к получению и превращению света: правило Стокса (согласно которому частота света флюоресценции, — если оставить в стороне исключения, — всегда меньше, чем частота первичного, возбуждающего света) получило непосредственное объяснение на основании закона сохранения энергии.

Обнаруженный Ленардом за несколько лет до того факт, что скорость электронов, испускаемых под влиянием света (в так называемом фотоэлектрическом эффекте), зависит только от частоты возбуждающего света, а не от его интенсивности, также мог быть объяснен новой гипотезой, между тем как для классической волновой теории он представлял непреодолимые трудности. Основываясь на равенстве  $\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - P$ , Эйнштейн получил и количественно удовлетворительное совпадение теоретического и экспериментального порядка величины максимальной скорости испускаемых электронов  $v$ . Наконец гипотеза Эйнштейна привела к количественному соотношению между известными тогда лишь очень грубо минимальными значениями электрического потенциала ионизации и ионизирующей частоты света для газа; это соотношение также удовлетворялось с достаточной точностью. Здесь мы видим первые зачатки того направления исследовательской работы, которое было

затем столь плодотворно разработано Штарком, Франком, Гертцем и другими; многочисленные и разнообразные результаты этих исследований все находят свое объяснение в простом условии частот Эйнштейна-Бора.

Эйнштейн, впрочем, вскоре после этого (в 1906 г.) указал на то, что выдвинутая им гипотеза может рассматриваться и как естественное развитие указанного выше предположения Планка о возможных дискретных состояниях электрического осциллятора: если существуют только дискретные состояния, то должны существовать и дискретные, скачкообразные изменения их, а отсюда мы непосредственно переходим к эмиссии световых квантов  $h\nu$ . Конечно, только дальнейшее развитие могло показать, действительно ли законны эти выводы, в равной мере примитивные и смелые. Известно, как долго остерегался Бор перехода от условия частот и предположения о квантовых скачках в атоме, к радикальным представлениям о квантах света.

Однако важнейшее обоснование своей гипотезы Эйнштейн дал своими термодинамически-статистическими рассуждениями. Эйнштейн произвел следующий мысленный эксперимент. Пусть в некоторой полости с отражающими стенками объема  $V$  заключена энергия  $E$  в виде электромагнитного излучения, которое все относится к узкой области частот  $\nu$ ,  $\nu + \Delta\nu$ . В некоторой (сравнительно очень малой) части  $V_0$  объема  $V$  будет при этом в среднем находиться количество энергии  $E_0 = E \frac{V_0}{V}$ . Но это количество энергии не будет иметь постоянно строго определенного значения; напротив оно подвержено известным временным колебаниям (флуктуациям). Согласно классической волновой теории можно заранее вычислить все закономерности этих флуктуаций. Эйнштейн показал, что их можно, с другой стороны, рассчитать и с помощью термодинамических рассуждений, не прибегая к волновой теории, если только сделать предположение, что установленная Больцманом зависимость между энтропией и статистической вероят-

ностью<sup>1</sup> сохраняется не только в классической, но и в квантовой теории.

Закон излучения Планка (2) может быть при этом введен как эмпирический закон. В дальнейшем оказывается следующее. При большой плотности излучения, которая соответствует классическому закону Рэлея-Джинса,<sup>2</sup> естественно мы получаем те же результаты, какие дает (без помощи термодинамики) классическая волновая теория. Но при малой плотности излучения термодинамика требует эффектов, которые не совместимы с классической волновой теорией. Эйнштейн показал это в 1905 г. на следующем примере. Пусть плотность излучения  $\rho_\nu$  в рассматриваемой области частот  $\Delta\nu$  будет весьма мала, что соответствует закону распределения Вина;<sup>3</sup> спрашивается, как велика вероятность того, что в виде исключения в некоторый момент вся энергия излучения  $E$  окажется сконцентрированной в объеме  $V_0$ . Результат Эйнштейна заключается в том, что эта вероятность равна

$$W = \left( \frac{V_0}{V} \right)^{E/h\nu} \quad (4)$$

Здесь явную роль начинают играть световые кванты  $h\nu$ ; величина  $n = \frac{E}{h\nu}$ , по гипотезе Эйнштейна, есть число световых частиц, а  $\left( \frac{V_0}{V} \right)^n$  — вероятность того, что все они соберутся в объеме  $V_0$ . Можно утверждать, что вообще в области применения закона Вина излучение ведет себя в отношении флуктуаций плотности точно так же, как классический идеальный газ, состоящий из частиц  $h\nu$ . Формула (4), которую мы будем называть первым Эйнштейновским

<sup>1</sup> По Больцману  $S = k \lg W$ , где  $S$  — энтропия, а  $W$  — статистическая вероятность некоторого определенного состояния ( $k$  — больцмановская постоянная).

<sup>2</sup> Зак. Рэлея Джинса  $\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot kT$ . Справедлив при  $kT \gg h\nu$ .

<sup>3</sup> Закон Вина  $\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ . Справедлив при  $h\nu \gg kT$ .

законом излучения, дает чрезвычайно наглядный пример приложимости этого предложения.

В 1909 г. Эйнштейн снова вернулся к этому вопросу и показал следующее. Если в некотором пространстве черного излучения  $V_0$  энергия, относящаяся к области частот  $\nu$ ,  $\nu + \Delta\nu$ , равна  $E_0$  и если положить  $E_0 - E = \Delta E_0$ , то можно снова чисто термодинамически вычислить средний квадрат флуктуации  $(\Delta E_0)^2$ .

$$(\Delta E_0)^2 = h\nu \cdot E_0 + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 \cdot \Delta\nu} \cdot \frac{E_0^2}{V_0} \quad (5)$$

Отсюда для предельного случая закона Рэлея-Джинса ( $\rho$ , велико) получаем

$$(\Delta E_0)^2 = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 \cdot \Delta\nu} \cdot \frac{E_0^2}{V_0} \quad (5a)$$

а для предельного случая закона Вина ( $\rho$ , мало)

$$(\Delta E_0)^2 = h\nu E_0 \quad (5b)$$

Так как число световых квантов, заключающихся в объеме  $V_0$ , равно  $n_0 = \frac{E}{h\nu}$ , то из формулы (5b) следует, что при малом  $\rho$ ,

$$(\Delta n)^2 = n_0, \quad (6)$$

а это снова точно соответствует законам классического идеального газа. Формулу (5) мы будем коротко называть вторым Эйнштейновским законом флуктуаций.

Классическая волновая теория дает для квадрата флуктуации вместо выражения (5) выражение (5a); это было подробно исследовано Лоренцом.<sup>1</sup> Таким образом, и в этой закономерности только в предельном случае боль-

<sup>1</sup> Много раз высказывалось сомнение в допустимости и доказательности вычислений Лоренца с точки зрения классической теории — сомнение, основанное на том, что Лоренц определяет среднее значение при помощи определенного фазового усреднения (ср. обширную дискуссию между Лауе Эйнштейном и Планком). Однако выражение (5a) можно получить и без помощи спорных статистических понятий как точное среднее во времени значение (Борн-Гейзенберг-Иордан).

шой плотности излучения классическая волновая теория дает результаты правильные, т. е. удовлетворяющие требованиям термодинамики.

То же обнаружилось и в другом рассуждении, заключающемся в работе Эйнштейна 1909 г. Эйнштейн представляет себе, что в поле излучения, замкнутого в некоторой полости, находится пластинка, способная свободно перемещаться; она должна свободно пропускать все излучение, лежащее вне области частот  $\nu$ ,  $\nu + \Delta\nu$ , и отражать излучение этой области частот. Двигаясь относительно полого пространства, эта пластинка должна в среднем испытывать постоянное сопротивление, являющееся результатом светового давления; если бы действовало только одно это сопротивление, то оно тормозило бы движение пластинки и в конце концов привело бы ее в состояние покоя. Но в силу флуктуаций интенсивности излучения, в этом давлении излучения также имеют место флуктуации, которые не дадут пластинке притти в полный покой: она будет совершать броуновское движение. Статистические законы этого броуновского движения были уже изучены раньше (Эйнштейн - Смолуховский); именно в силу общности статистических принципов они должны быть всегда одними и теми же, независимо от того специального механизма, который вызывает их в данном определенном случае. В области приложимости классического закона Рэлея - Джинса, конечно все остается в порядке: флуктуации давления излучения, вычисленные по волновой теории, оказываются как раз настолько сильными, насколько это требуется, чтобы дать правильное броуновское движение. Но там, где становятся заметными отступления от закона Рэлея - Джинса, флуктуации, вытекающие из классической волновой теории, оказываются уже недостаточно сильными, для того чтобы они могли вызвать броуновское движение. Исследования Эйнштейна и в этом случае дают возможность количественно проследить за отступлениями от классической волновой теории, которых требует термодинамическая статистика. При этом становится гораздо более наглядной картина световых квантов.



По классической теории Максвелла плоская волна несет вместе с запасом энергии  $E$  и запас импульса  $\frac{E}{c}$ . Так как вытекающие отсюда формулы для величины Максвелловского давления излучения несомненно правильны и эмпирически и термодинамически, то совершенно естественным является предположение, что световой квант с энергией  $h\nu$  обладает импульсом  $\frac{h\nu}{c}$ . В согласии с этим и кинематика специальной теории относительности требует для частицы, движущейся со скоростью света и обладающей энергией  $E$  импульса  $\frac{E}{c}$ .

Эйнштейн показал, что это предположение об импульсах  $\frac{h\nu}{c}$  находится в удивительном согласии с флуктуациями давления излучения, изучаемыми на подвижной пластинке.<sup>1</sup> Действительно, если снова рассмотреть предельный случай малых плотностей излучения (область закона Вина), то колебания, обусловленные этими флуктуациями, оказываются именно такого рода, как если бы на пластинку действительно падал дождь корпускулярных частиц с импульсом  $\frac{h\nu}{c}$ .

В этой связи отметим еще раз, что и самый закон излучения Вина может быть выведен из представления об идеальном газе световых квантов; формула закона Вина:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad (7)$$

непосредственно соответствует максвелловскому распределению скоростей:

$$\rho(v) = \text{const.} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \quad (8)$$

где  $\rho(v)$  измеряет число атомов со скоростью  $v$ .

<sup>1</sup> Эйнштейн, впрочем, в этом месте не высказал явно предположения, что импульсы равны  $\frac{h\nu}{c}$ ; он отметил только, что мы снова встречаем здесь кванты с энергией  $h\nu$ .

Таким образом в результате работ Эйнштейна картина излучения в полном пространстве представляется нам чрезвычайно живой, но вместе с тем глубоко загадочной. Чисто феноменологически, пользуясь термодинамическими рассуждениями и принципом Больцмана, мы можем на основании экспериментально проверенной ф-лы Планка не только наперед рассчитать его стационарное температурное равновесие, но и предвидеть закономерность всех эффектов, могущих наблюдаться в результате флуктуаций. Но только в двух предельных случаях можно на основании классических представлений дать с помощью модели наглядное истолкование всех этих законов, и при этом модели, которыми мы в обоих этих случаях должны пользоваться, оказываются совершенно различными: в случае Рэлея-Джинса это — колеблющееся волновое поле, а в случае Вина — корпускулярный идеальный газ.

## 2. Вывод Планковского закона Девалем

Следуя исторической последовательности, мы упомянем здесь прежде всего работу Дебая, опубликованную в 1910 г. В этой работе, несомненно впервые, была сделана попытка применить к полю электромагнитного излучения те представления, которые были развиты на отмеченном выше примере Планковского осциллятора, затем подтвердились в идеях Эйнштейна относительно теории удельной теплоты твердых тел и двумя годами позже вошли как одна из существеннейших основ в атомную теорию Бора. Колеблющееся электромагнитное поле в полном пространстве является наложением чисто гармонических собственных колебаний, каждое из которых в отдельности представляет собой в известном смысле гармонический осциллятор. Смелое предположение Дебая заключалось в том, что эти собственные колебания подлежат квантованию так же, как и материальные осцилляторы, и что они обладают дискретными энергетическими уровнями  $0, h\nu, \dots$

Это предположение непосредственно приводит к закону излучения Планка. Действительно, средняя энергия такого квантового осциллятора определяется формулой (3).

Но в полном пространстве объема  $V$  существует как раз  $V \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \Delta\nu$  собственных колебаний с частотой, лежащей в интервале  $\nu, \nu + \Delta\nu$ . Таким образом общая лучистая энергия этой области частот во всем объеме равна

$$U = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \Delta\nu \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}; \quad (9)$$

деля это выражение на  $V \Delta\nu$ , мы получаем плотности излучения  $\rho_\nu$ , выражение, соответствующее формуле (2).

Кроме этого результата, из представлений Дебая, как показали Рубинович и Фламм, вытекает возможность истолкования условия частот Эйнштейна-Бора без помощи радикальной гипотезы о световых квантах. Если атом излучает свет квантовым скачком, то это значит, что он передает эфиру запас энергии  $\Delta W$ . Этот запас энергии расходуется эфиром на то, чтобы перевести подходящее собственное колебание в квантовое состояние, на одну ступень более высокое, чем раньше. Стало быть, частота  $\nu$  этого собственного колебания должна удовлетворять условию  $\Delta W = h\nu$ .

Так же как и в представлениях Эйнштейна, у Дебая энергия полого пространства является суммой дискретных элементов энергии  $h\nu$ . Но в то время как Эйнштейн предполагает пространственную локализацию этих элементов, Дебай приписывает каждому из собственных колебаний распространяющемуся на все полое пространство, определенное число квантов  $h\nu$ . Дальнейшее развитие привело к слиянию обоих этих представлений. Хотя работа Дебая уже в 1910 г. содержала значительную долю истины, ей не суждено было стать исходным пунктом дальнейшего продвижения. При тогдашнем положении вещей ее результаты должны были оканчиваться исчерпанными отмеченными выше пунктами. Тогда не было никакой возможности усмотреть в ней орудие, с помощью которого можно преодолеть трудности волновой теории, вскрытые Эйнштейном в флуктуационных явлениях. Только 15 лет спустя квантовая механика пошла до конца по пути, на который вступил Дебай.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЙНШТЕЙНА ПЕРИОДА 1916—1917 гг.

К периоду 1916—1917 гг. относится наиболее известная работа Эйнштейна по квантовой теории излучения. В ней он установил свои знаменитые законы вероятности для взаимодействий между излучением и материей. Эта работа пролила яркий свет на элементарные процессы эмиссии и абсорбции излучения отдельными атомами или молекулами и указала на существование также и в этих процессах световых квантов, которые ранее были обнаружены в флуктуациях чистого излучения.

Пусть два стационарных состояния атома или молекулы обладают энергией  $W_1$ ,  $W_2$ , ( $W_2 > W_1$ ). Тогда для атома, свободного от внешних воздействий и находящегося в момент  $t$  на верхнем из этих уровней, существует определенная вероятность  $w$  того, что он до момента  $t + dt$  самопроизвольно (спонтанно) перейдет на нижний уровень, испустив световой квант  $h\nu = W_2 - W_1$ . Вероятность  $w$ , как и в процессе радиоактивного распада, не зависит от того, как долго атом уже находится в этом состоянии. Эйнштейн сам, впрочем, совершенно отчетливо отметил принципиальную трудность этого предположения. Если оно правильно, то мы лишаемся всякой надежды когда-нибудь истолковать атомную эмиссию как строго каузальный процесс. Однако, речь идет здесь о трудности, созданной самой природой. Опытная правильность закона радиоактивного распада не подлежит никакому сомнению, а этот закон являет собой такой очевидный и несомненный случай некаузального явления, что до сих пор никто еще не пытался свести его к какому-нибудь каузальному механизму.

Влияние поля излучения на атом создает далее по Эйнштейну дальнейшие вероятности переходов, именно вероятности положительной или отрицательной абсорбции для атомов, находящихся соответственно на нижнем или верхнем уровне. В совокупности для переходов сверху вниз получается вероятность

$$w = C \left( 8\pi h \frac{\nu^2}{c^3} + \rho_\nu \right), \quad (10a)$$

а для переходов снизу вверх вероятность

$$w^+ = C\rho_\nu \quad (10b)$$

при этом  $\nu$  есть частота перехода, вычисленная из формулы  $h\nu = W_1 - W_2$ .

Если  $N_1$  и  $N_2$  суть количества атомов, находящихся на нижнем и верхнем уровне, то при термодинамическом равновесии должно иметь место соотношение <sup>1</sup>

$$N_2 = N_1 e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \quad (11)$$

а равновесие с одним и тем же числом переходов вверх и вниз возможно в том и только в том случае, если  $\rho_\nu$  как раз определяется по планковской формуле (2) для черного излучения.

Эйнштейн далее исследовал влияние эмиссионных и абсорбционных процессов на поступательное движение: при этом определилось, что так же, как и в случае подвижной отражающей пластинки, правильное термическое равновесие может иметь место лишь в том случае, когда каждый акт эмиссии или абсорбции связан в атоме с изменением импульса.

Здесь после долгого перерыва импульсы световых квантов  $\frac{h\nu}{c}$  снова предстали глазам физиков, и с этих пор они уже не переставали служить предметом дискуссии. Однако еще на протяжении нескольких лет они рассматривались как нечто более или менее недостоверное и неясное, пока, наконец, А. Г. Комптон и Дебай не нашли в рассеянии рентгеновского излучения возможности экспериментального обнаружения этих толчков отдачи. Закономерности этого эффекта Комптона и его связь с гипотезой световых квантов общеизвестны, и мы ограничимся поэтому только указанием на них.

---

<sup>1</sup> Из  $N_1 w^+ = N_2 w^-$  следует  $1 = e^{-\frac{h\nu}{kT} \left( \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{\rho_\nu} + 1 \right)}$ , а отсюда вытекает формула (3).

## 4. ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ СВЕТОВЫХ КВАНТОВ

Эйнштейновская трактовка взаимодействия излучений свободных атомов стала образцом для ряда работ, изучавших с точки зрения квантовой теории различные элементарные акты, имеющие место при соударениях материальных частиц со световыми квантами или друг с другом (абсорбция, испускание или рассеяние света, возбуждение, ионизация, химические превращения и т. д.). Общие итоги всех исследований (Паули, Эйнштейна-Эренфеста, Клейна-Росселанда, Мильна, Фаулера, Бекера и др.) подвел Дирак в своей работе, появившейся в 1924 г. Наиболее общий элементарный акт этого рода, очевидно, таков, что в нем происходит соударение некоторого количества (одинаковых или различных) материальных частиц и одновременно поглощается некоторое количество световых квантов. После процесса возникают некоторые другие (или измененные) материальные частицы и кроме того снова некоторое количество световых квантов. Вероятность такого процесса—до некоторого множителя, зависящего от специального характера процесса—определяется произведением концентраций всех соударяющихся частиц, умноженным на фактор  $\rho_\nu$  для каждого поглощенного кванта  $h\nu$  и на фактор  $\frac{8\pi h\nu^3}{c^3} + \rho_\nu$  для каждого вновь испускаемого кванта.

Кроме того, формулы Эйнштейна (10a) и (10b) принимают более наглядный вид, если ввести в них вместо  $\rho_\nu$  величину

$$n_\nu = \frac{c^3}{8\pi h\nu^3} \rho_\nu. \quad (12)$$

В духе представлений Дебая величину  $n_\nu$  можно рассматривать как среднее число квантов энергии  $h\nu$  на каждое собственное колебание частоты  $\nu$ .

При этом для испускания вероятность пропорциональна  $n_\nu + 1$ , а для абсорбции она пропорциональна  $n_\nu$ . Это является результатом, совершенно естественно вытекающим из соображений симметрии, что было (правда, позже) обнаружено исследованиями Ботэ и Дирака. Если положить опять в основу представления Дебая и исследовать вероятность

того, что из отдельного совершенно определенного собственного колебания атомом поглощается квант  $h\nu$ , то окажется, что эта вероятность пропорциональна числу квантов в этом собственном колебании до процесса, а после процесса это число уменьшается на единицу. Мы получим, поэтому, полную симметрию, если предположим для обратного процесса, что вероятность испускания одного  $h\nu$  в определенном осцилляторе нашего полого пространства пропорциональна числу квантов этого собственного колебания после процесса, т. е. пропорциональна числу, которое на единицу больше, чем число квантов до процесса. Это объясняет пропорциональность вероятности испускания и абсорбции различным числам  $n, + 1$  и  $n$ , если принять во внимание, что среднее число квантов  $n$ , различных имеющих собственные колебаний надлежит рассматривать без учета изменений, вызванных самим процессом, т. е. до процесса.

## II. ГИПОТЕЗА СВЕТОВЫХ КВАНТОВ И ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ

### 5. Кризис теории света

Все успехи гипотезы световых квантов — с одной стороны, естественность в развитии теоретических представлений и простота получающихся при этом результатов и, с другой стороны, экспериментальное подтверждение ее следствий в эффекте Комптона — сначала, казалось, лишь делали все более серьезным кризис теории света. Бесконечному количеству опытов, которые, по видимому, удовлетворительно подтверждали волновую теорию света, противопоставались доказательства корпускулярной природы излучения, которые уже нельзя было обойти. В задачу этой статьи не входит обрисовать подробнее беспокойство и смятение, которые были порождены этим результатом; здесь не могут быть также отмечены или даже только упомянуты многочисленные и своеобразные пути, которыми пытались разрешить эти затруднения. Многие из вопросов и экспериментов, обсуждавшихся тогда, так тесно связаны с почти уже забытыми теперь представлениями, что мы с трудом

можем даже понять их. Так, например, много изумления вызвал тот факт, что некоторые спектральные линии дают свет необычайно высокой степени монохроматичности, при которой еще при разности хода порядка одного метра получается заметная интерференция; с этим связывались спекуляции относительно „протяженности светового кванта“. Другие думали, что с помощью николя можно „разделить пополам“ световой квант, а один автор заставил каналовой луч проходить мимо узкой щели, при чем он думал, что не весь световой квант, испускаемый быстро движущимся атомом, успеет пройти через щель, и искал дробные части кванта с соответственно измененной частотой.

Содержание имевшегося к тому времени опыта можно охарактеризовать приблизительно так, что, с одной стороны, в многочисленных эффектах проявляется корпускулярная природа света, а с другой, — во всех классических интерференционных опытах волновая теория дает возможность делать правильные предсказания. Делавшиеся в то время попытки понять эту загадочную двойственную природу излучения сводились к тому, что пытались построить модель света, работающую в рамках классических представлений о времени и пространстве и, если возможно, то с классической каузальностью, например, модель квантов энергии, описывающих определенные траектории в смысле классической кинематики и связанных с некоторым интерференционным полем. Даже Эйнштейн пытался в течение некоторого времени построить такую модель путем изменения Максвелловых волновых уравнений света. Однако в силу полной противоположности между классическими представлениями о волнах, с одной стороны, и корпускулах, с другой, все попытки такого рода должны были наперед казаться еще более безнадежными, чем, например, прежние попытки построения механической модели эфира. И действительно в то время как механические теории эфира имели все же хоть частичные успехи, эти попытки не привели ни к каким результатам.

Однако серьезным оставался вопрос о том, не могут ли быть найдены незамеченные до сих пор случаи, где клас-



сическая волновая теория и в отношении интерференционных явлений вела бы к ложным результатам. Здесь прежде всего заслуживают внимания три специальных постановки этого вопроса. Во-первых, могло казаться сомнительным, сохраняют ли силу обычные законы интерференции и при чрезвычайно малых плотностях излучения, при заведомо далеко отстоящих друг от друга в пространстве отдельных световых квантах. Естественно было думать, что быть может интерференция возникает только в результате взаимодействия большого числа квантов. <sup>1</sup>

Опыт, однако, не дал здесь никаких оснований предполагать зависимость интерференции от абсолютного значения яркости, напротив, в этом вопросе он подтверждает неизменную правильность классической волновой теории.

Во-вторых, „односторонность“ эмиссии света атомом, проявляющаяся в толчке отдачи  $\frac{h\nu}{c}$ , и направленность эмиссии светового кванта в каждом элементарном акте делает естественным предположение о том, что в отличие от следствий из классических представлений о сферической волне — не может быть никакой когерентности между излучением, исходящим от одного и того же источника света в разных направлениях. Но и здесь опыт (Зелени, Шредингер, Герлах-Ланде) показал, что классическая волновая теория права.

В-третьих, могло казаться возможным, что в опытах с быстро движущимися источниками света или интерференционными аппаратами классическая теория откажется служить. Действительно, мы располагаем лишь очень небольшим числом опытов такого рода, и теория световых квантов, связанная с классическими корпускулярными представлениями, давала основания ожидать несостоятельности волновой теории именно при таких обстоятельствах. Эйнштейн в течение долгого времени думал, что при таких установках можно ожидать обнаружения новых эффектов, и сделал по-

---

<sup>1</sup> С современной точки зрения нужно было бы сказать: в случаях, где световые кванты заведомо далеко отстоят друг от друга в пространстве, если они в этих случаях вообще имеют определенное место.

дробное предложение о постановке такого рода опытов. Однако, осуществленные Руппом, эти опыты снова подтвердили только предсказания классической волновой теории. Тем временем и Эйнштейн, независимо от этого, пришел к убеждению, что и в этом случае нельзя ожидать никаких отступлений от классической теории. Действительно, классическая оптика является столь строго замкнутой в самой себе системой принципов и положений, что нельзя предположить наличия в этой теории специальных неправильностей в каком-нибудь частном случае без того, чтобы не подвергнуть сомнению самые общие и неизбежные принципы ее. Поэтому в результате должно было утвердиться единодушное убеждение в том, что по отношению к интерференционным опытам классическая волновая теория является безупречной и исчерпывающей.

#### 6. ТЕОРИЯ БОРА-КРАМЕРСА-СЛЭТЕРА

Историк теории квантов дал бы лишь очень несовершенную картину работы Нильса Бора, если бы он ограничился последовательным перечислением всех его отдельных открытий и результатов. То, чем мы обязаны Бору, заключается не только в частностях, но прежде всего в общем духе его работ; мы обязаны ему той психической установкой, которая только и дает возможность видеть в правильном свете отдельные проблемы. При этом в квантовой теории подтвердилось правило, гласящее, что проблема оказывается в большей части решенной, как только дана ее правильная формулировка. Прежде чем сделать попытку выяснить здесь значение работы Бора, Крамерса и Слэтера в развитии теории излучения, мы должны посвятить несколько слов общему ходу идей Бора.

Существенное отличие представлений Бора от тогдашних взглядов других виднейших теоретиков характеризуется одним выражением Зоммерфельда, назвавшего принцип соответствия „волшебной палочкой“, с помощью которой могут быть получены чрезвычайно многочисленные и важные результаты. В этом определении ясно проявляется не-

которая недооценка, и несомненно, что тогда у большей части теоретиков было ощущение, что принцип соответствия, несмотря на всю его плодотворность, надлежит рассматривать как чисто феноменологический, эвристический принцип, дающий возможность познать лишь в известном смысле слова внешнюю связь вещей, а не подлинные корни предсказываемых с его помощью фактов.

Хотя отдельные акты испускания происходят прерывисто, скачками, тем не менее статистические средние значения интенсивности излучения можно вычислить с помощью классических понятий, например, понятия об излучении непрерывной сферической волны. Естественно, что большая часть теоретиков занялась вопросом о том, почему же это так: какой замечательный и загадочный механизм обуславливает эти своеобразные соотношения? Однако, такая постановка вопроса была неплодотворна. И вот именно Бор не только установил своеобразное взаимоотношение между квантовыми и классическими законами, формулируемое принципом соответствия, но — что не менее важно — совершенно отчетливо высказался за то, что это взаимоотношение нужно рассматривать не как нечто нуждающееся в объяснении, а как первично данный факт.

Из этой установки развилась и работа Бора, Крамерса и Слэтера. Ни в какой мере не стремясь оградить ее от заслуженных упреков, можно сказать, что основная ее черта заключается в том, что она не разрешает трудности теории излучения, а отрицает их. Для нужд исследования исключение кажущихся проблем так же важно и часто требует такой же затраты духовной энергии, как и разрешение действительных проблем. Крупный и сохраняющий свое значение успех, которого достигли Бор, Крамерс и Слэтер, заключался в установлении того, что проблема совместного объяснения световых квантов и явлений интерференции в значительной мере является кажущейся проблемой, которая находит свое разрешение при простом непредубежденном истолковании фактов. Характерным для этой установки является первое предложение работы Бора-Крамерса-Слэтера: „В попытках теоре-

тически истолковать взаимодействия излучения и материи мы встречаемся с двумя различными точками зрения, кажущимся образом противоречащими друг другу“.

Рассмотрим какой-нибудь из классических интерференционных опытов, в котором свет, испускаемый монохроматическим источником, через установку из зеркал, призм и т. п., падает на некоторый приемный экран. Методы классической оптики дают нам возможность предсказать определенное распределение интенсивности света на этом экране. Если мы представим себе теперь, что источник испускает только один единственный квант света, то из опыта (справедливость законов интерференции для малых плотностей излучения), не прибегая к слишком смелой экстраполяции, мы можем заключить только одно: существует известная вероятность того, что этот квант попадет на определенный небольшой участок экрана, и эта вероятность точно определяется освещенностью соответствующего места, вычисленной по классической теории. Новое, установленное Бором, Крамерсом и Слэтером, заключается просто в том, что установлением этого факта можно ограничиться. Если производить эксперименты с отдельным световым квантом, пользуясь макроскопическими оптическими приборами, то эти опыты не могут дать ответа ни на какой другой вопрос, кроме вопроса о вероятности воспринять этот квант при данных условиях в том или другом месте. Стало быть, — и в этом-то и заключается решительный поворот — от теории ничего большего и нельзя требовать. Этим положением вещей можно удовлетвориться. При этом сами собой отпадают все безнадежные вопросы, как вопрос о „траектории“ светового кванта в волновом поле и т. п. Нет никаких оснований приписывать световым квантам траектории в духе классической кинематики.

Эта формулировка, соответствующая современным точкам зрения, конечно, лишь отчасти совпадает с формулировкой Бора, Крамерса и Слэтера. Эти авторы, как известно, были вынуждены сделать попытку оспаривать строгую приложимость закона сохранения энергии к излучению; классически рассчитанное волновое поле должно было

согласно их точке зрения, давать не вероятности нахождения в данном месте определенного отдельного светового кванта, как в нашем мысленном опыте, а вероятность того, что в данном месте экрана внезапно появится световой квант, без того, чтобы точно соответствующая ему энергия была предварительно передана эфиру. Как известно, эта гипотеза была экспериментально проверена Боте и Гейгером, а также Комптоном и Саймоном, причем опыты обнаружили, напротив, точное соблюдение закона сохранения энергии.

Предположение о статистическом только сохранении энергии понадобилось именно потому, что не удалось устранить все трудности теории света путем их отрицания. Кроме кажущихся трудностей, созданных неправильной постановкой вопроса, существовали и действительные. Для случая отдельного светового кванта, с которым мы экспериментируем только с помощью макроскопических аппаратов, мы сумели выше показать в наиболее простой форме, как можно себе представлять точные физические законы. Но значительно более сложные вопросы возникают, когда мы занимаемся интерференционными действиями в реакциях излучения отдельных атомов, реакция которых изменяется в результате их собственных квантовых скачков с отдачей  $\frac{h\nu}{c}$ . Бор, Крамерс и Слэтер попытались разрешить и эти вопросы, но слишком примитивными средствами. Очень поучительное изложение и критика этой теории имеется в статье Паули о теории квантов в „Handbuch der Physik“ (В. XXIII); там в частности подробно освещено и отношение ее к проблеме естественной ширины спектральных линий. Здесь мы отметим еще только то, что в этой работе Бор впервые признал Эйнштейновские законы вероятности для эмиссии и абсорбции излучения, так же как и его толчки отдачи при излучении.

Предположение о статистическом характере закона сохранения энергии заставило несколько менее серьезно относиться к выводам Эйнштейна относительно флуктуа-

ций излучения. <sup>1</sup> Действительно, эти рассуждения Эйнштейна не упоминаются у Бора, Крамерса и Слэтера ни единым словом.

Вернемся теперь снова к нашим рассуждениям относительно классических интерференционных опытов, чтобы со всей возможной отчетливостью выяснить на этом простейшем примере точку зрения современной теории. Мы можем поставить два совершенно различных ряда опытов: во-первых, опыты с большой „классической“ плотностью излучения ( $\rho_v > > \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3$  или  $n_v > > 1$ ) и, во-вторых, опыты с одним отдельным световым квантом. Теория обоих рядов экспериментов основывается на одном и том же математическом базисе (волновом уравнении), но содержание ее в обоих случаях совершенно различно. В опытах с одним отдельным световым квантом, вычисленная классически волновая интенсивность представляет вероятность того, что квант попадает в некоторую точку. Если такие опыты производить серийно, или заставлять источник испускать кванты в большом числе, но через достаточно большие промежутки времени, <sup>2</sup> то результаты их можно предсказать по волновой теории статистически. Если теперь мы поставим вопрос о флуктуациях, которые проявляются в результатах целого ряда таких экспериментов, то ответ будет дан правилами вероятности, как в игре в кости; <sup>3</sup> с классически рассчи-

<sup>1</sup> Предлагалось, например, вместо флуктуаций в „виртуальном“ поле излучения, которые, по теории Бора, Крамерса и Слэтера, являются принципиально ненаблюдаемыми, рассматривать только флуктуации в абсорбции и испускании материальных атомов. Эта мысль, которую позже особенно настойчиво развивал Сmekаль, повидимому, началась уже указанными тремя авторами. Нужно, однако, отметить, что это предложение может казаться удовлетворительным только до тех пор, пока принимается статистическое сохранение энергии. То же относится и к недавно предложенному Боте выводу флуктуационных формул.

<sup>2</sup> Именно такие, чтобы еще оставалось в силе соотношение

$$\rho_v \ll \ll \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \text{ или } n_v \ll \ll 1.$$

<sup>3</sup> Точнее, как в игре в кости с фальшивыми костями, в которых различные результаты имеют различную вероятность.

танными флуктуациями излучения это конечно не имеет ничего общего. Но если мы вместо этого экспериментируем с большими плотностями излучения ( $n_v \gg 1$ ), то мы должны сопоставить обычным образом физические понятия с математическим волновым построением; вычисленная интенсивность волнообразного излучения полностью соответствует интенсивности действительного физического излучения — как относительно среднего во времени значения, так и в отношении всех флуктуационных эффектов.

Таким образом, для каждого из этих, в основе различных, случаев мы имеем полную и удовлетворительную теорию: теория для случаев больших плотностей излучения — это „классическая“ теория и, как таковая, она обладает лишь приближенной приложимостью;<sup>1</sup> теория для отдельных световых квантов — это часть общей теории квантов, и она точна. Но с помощью описанных выше средств мы не можем получить полной теории для промежуточной области, где не имеет место ни одно из неравенств  $n_v \gg 1$  и  $n_v \ll 1$ . Правда, мы знаем достаточно, чтобы понимать и в этом случае все обычные интерференционные опыты, ибо все наблюдаемые при этом на экране относительные яркости совершенно не зависят от абсолютной силы света, т. е. и в этом случае таковы же, как при  $n_v \gg 1$  и  $n_v \ll 1$ . Но мы не имеем полной теории, если, кроме средних во времени значений интенсивности, мы захотим правильно рассчитывать и флуктуации (не обходя эти трудности термодинамическим путем). Это не удавалось, пока для построения модели светового излучения мы обладали только классической кинематикой.

На ряду с этой проблемой осталась ожидать своего разрешения группа затронутых выше проблем, связанных с интерференционными действиями реакций излучения отдельных атомов; на эти вопросы теория Бора, Крамерса и Слэтера не давала удовлетворительного ответа. В упомянутой уже выше статье Паули отметил, что не-

<sup>1</sup> Точно: она была бы справедливой только при бесконечно большой плотности излучения.

обходимой основой для подхода к этим вопросам является развитие нового квантового понятия о поле. В последнем разделе этой статьи я попытаюсь пояснить, как и в каком смысле вновь образованные понятия новой квантовой механики частично решают эту задачу.

### III. ВОЛНЫ МАТЕРИИ

#### 7. СТАТИСТИКА БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА

Мы видели, что если относиться с доверием к рассуждениям Эйнштейна, то свет, несмотря на свой волновой характер, проявляющийся в явлениях интерференции, с другой стороны все же имеет корпускулярную природу. В настоящее время кажется уже почти совершенно естественным предположить, что и в атомном луче, чисто корпускулярная природа которого представлялась несомненной, могут проявляться интерференционные свойства, чтобы таким образом сделать по возможности более полной аналогию между световыми и материальными лучами. Но для того, чтобы рискнуть сделать этот вывод, требовалось так много мужества и такая глубокая вера в правильность хода идей теории световых квантов, что, повидимому, только два физика, — сам Эйнштейн и Л. де Бройль, — решились на это. Эйнштейн долго вынашивал эту идею, не публикуя ее, так как он не получил никаких результатов, которые дали бы возможность количественно формулировать ее. Подход к этому наметился для него лишь после того, как в 1924 г. Бозе предложил свою новую статистику световых квантов.

Выше было уже упомянуто, что проведенная классическими методами статистика корпускулярных световых квантов дает закон Вина вместо закона Планка. При этом статистическом выводе поступают следующим образом. „Фазовое пространство“ светового кванта <sup>1</sup> делят на не-

---

<sup>1</sup> Фазовое пространство имеет шесть измерений; каждая точка его означает некоторое состояние светового кванта, определяемое тремя координатами точки и тремя компонентами импульса.



большие ячейки и представляют себе, что световые кванты последовательно и совершенно случайно разбрасываются по этим ячейкам. Различные равновероятные микроскопические распределения, которые возникают таким образом, очевидно, можно описать, указав те индивидуальные световые кванты, которые попадают в ту или иную отдельную ячейку. Нормальным, наиболее вероятным при заданной общей энергии распределением оказывается при этом то, которое соответствует закону Вина. Бозе заметил, что вместо этого можно получить закон Планка, если, во-первых, принять объем ячейки постоянно равным  $h^3$  (что делали уже раньше другие авторы), и затем внести в намеченный выше ход рассуждений следующее изменение, кажущееся сначала совершенно произвольным и бессмысленным: при описании равновероятных случаев не нужно указывать, какие световые кванты попадают в данную ячейку, а лишь сколько их там находится.<sup>1</sup>

Хотя вначале смысл этого условия мог казаться чрезвычайно темным, тем не менее с его помощью удалось развить статистику излучения, основываясь исключительно на корпускулярных понятиях, что в классической статистике, без изменений Бозе, было возможно только для Виновской области. Эйнштейн поэтому сейчас же занялся статистикой Бозе и выразил свое убеждение в глубокой родственности материальных лучей со светом, создав теорию одноатомного идеального газа, аналогичную статистике Бозе. При этом, действительно, получается теория, совпадающая с классической в тех пределах, в каких это требуется опытом: заметных отклонений от классических газовых законов можно ожидать только при очень низких

---

<sup>1</sup> Поясним это примером. Положим, что имеется только две ячейки и два кванта. С классической точки зрения существует четыре равновероятных случая: оба кванта в первой ячейке; оба кванта во второй; первый квант в первой, второй во второй; первый квант во второй, второй — в первой ячейке. По Бозе нужно считать только три равновероятных случая: оба кванта в первой ячейке, оба — во второй, по одному в каждой.

температурах,<sup>1</sup> где так или иначе газы уже не ведут себя как идеальные. Точно так же получается и правильное значение для химической постоянной одноатомных газов (а при надлежащем построении теории, — и для многоатомных). С этим связано далее то обстоятельство (Ланжевен, Иордан), что теория Эйнштейна дает возможность установить, какое количество материи вообще может стационарно существовать при данной температуре, если в духе гипотезы Эддингтона допустить возможность превращения материи в излучение и задаться вопросом о термодинамическом равновесии между лучистой и материальной энергией.<sup>2</sup> При этом получается формула, которую уже раньше вывел другим путем Штерн. Можно также изучать по методу Эйнштейна, вместо отдельных газов, равновесие систем из нескольких газов, между которыми происходят какие угодно химические и т. п. превращения (Иордан); при этом непосредственно получаются все известные закономерности, касающиеся химического, ионизационного равновесия и т. п., какие можно вывести с помощью тепловой теоремы Нернста и известных химических констант газов.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Закон Планка отличается от закона Вина тем, что в него входит множитель  $\frac{1}{e^{kT} - 1}$  вместо множителя  $e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ ; соответственно

этому распределение скоростей в Эйнштейновском газе отличается от максвелловского распределения множителем  $\frac{1}{e^{a(T) + \frac{mv^2}{2kT}} - 1}$  вместо  $e^{-\frac{mv^2}{kT}}$

где  $a(T)$  есть некоторая определенная функция от температуры.

<sup>2</sup> При этом нужно искать вероятнейшее распределение не при заданной общей энергии и заданном числе частиц, а только при заданной общей энергии. В полной аналогии с газом, состоящим из световых

квантов вместо  $\frac{1}{e^{a(T) + \frac{mv^2}{2kT}} - 1}$  получаем  $\frac{1}{e^{\frac{E}{kT}} - 1}$ , где  $E$  есть общая

энергия искоемых частиц, включая их энергию в состоянии покоя  $mc^2$ .

<sup>3</sup> Конечно всегда с теми изменениями, которые соответствуют вырождению газов.

То обстоятельство, что истинное значение Эйнштейновской теории газов заключается в сообщении материальным лучам некоторых свойств волнового излучения, становится ясно заметным при изучении закона вероятности для соударений атомов Эйнштейновского газа и их взаимодействий с световыми квантами (Иордан). Действительно, эти элементарные процессы нарушали бы Эйнштейновское распределение скоростей (и постепенно переводили бы его в Максвелловское), если бы для них еще сохраняли силу закон действия масс. Вместо простой пропорциональности между вероятностью реакции и концентрацией реагирующих материальных частиц нужно, стало быть, ввести измененный закон вероятности; и действительно, мы получаем статистическое равновесие, соответствующее Эйнштейновскому распределению скоростей, если для этих частот реакций принять полную аналогию между материальными частицами и световыми квантами.

Эйнштейн далее обнаружил волновой характер, который получают материальные лучи в его теории газов, путем исследования флуктуаций плотностей. Однако, прежде чем коснуться этого пункта, мы должны обратиться к открытию де Бройля.

## 8. Волны де Бройля

Л. де Бройль также обратил идею гипотезы световых квантов, выдвинув положение, что и движущиеся материальные частицы имеют волновой характер. Как известно, ему принадлежит заслуга установления количественного соотношения между массой и скоростью частиц, с одной стороны, и частотой и фазовой скоростью волны, с другой (1922). Его соотношения гласят:

$$E = h\nu; \quad \Gamma = \frac{h\nu}{v} \quad (13)$$

Здесь  $E, \Gamma$  — энергия и импульс частицы;  $\nu, v$  частота и фазовая скорость соответствующей плоской волны, распространяющейся в том же направлении, что и частица. В случае света  $v = c$ . Существеннейшее во взглядах де Бройля,

которыми он обосновал равенство (13), заключалось в следующем: эти равенства должны быть инвариантны в смысле специальной теории относительности, т. е. не должны зависеть от координатной системы наблюдателя. По отношению к иначе движущейся координатной системе частица имеет другие значения энергии и импульса  $E', \Gamma'$ , а волна — другие  $\nu'$  и  $\nu'$  и между этими четырьмя величинами должны снова автоматически устанавливаться соотношения (13). Что такая инвариантность действительно имеет место для специального случая световых квантов, отметил впервые за несколько лет до этого Боте.<sup>1</sup>

Но и общие соотношения де Бройля (13) действительно соответствуют принципу относительности.<sup>2</sup>

Как известно, соответствующие этим волнам интерференционные эффекты в последнее время являлись предметом большого числа опытов. На свободных электронах, которые в силу малых значений своей массы в состоянии покоя связаны с сравнительно длинноволновым излучением де Бройля, соответствующие дифракционные явления могли быть обнаружены очень ясно и убедительно.<sup>3</sup>

Теоретическое обоснование теории де Бройля может быть получено и из рассуждений Дюэна (W. Duane, 1923), которые очень поучительны и сами по себе. В том виде, как их изложил А. Комптон, они сводятся к следующему.

<sup>1</sup> Неявно это утверждение заключалось и в одной работе Шредингера относительно релятивистской инвариантности условия частот Бора при предположении об отдаче  $\frac{h\nu}{c}$ .

<sup>2</sup> Если, напр.,  $\cos 2\pi (k_1x + k_2y + k_3z - k_4ct)$  есть инвариантная амплитуда волны, при чем  $x, y, z, ict$  образуют четырехмерный вектор, то и  $k_1, k_2, k_3, k_4$  образуют четырехмерный вектор; так как кроме того и  $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z, \frac{iE}{c}$  — четырехмерный вектор ( $\Gamma_x$  и т. д. — компоненты импульса), то равенства  $\Gamma_x = \hbar k_1, \Gamma_y = \hbar k_2, \Gamma_z = \hbar k_3, E = \hbar k_4 c$ , тождественные с равенствами (13), остаются инвариантными.

<sup>3</sup> См. статьи П. Тартаковского (Успехи физич. наук 8, 338, 1928), К. Дэвиссона (там же 8, 483, 1928), Дж. Дж. Томсона (8, 570, 1928), В. Л. Грановского (9, 308, 1929).

Если бесконечно тонкая и совершенно правильная дифракционная решетка перемещается в своей плоскости перпендикулярно к линиям решетки, то очевидно, мы имеем в некотором смысле периодическое движение, которое можно квантовать по известным из атомной теории правилам. Если мы направим теперь на решетку корпускулярный световой квант, то при этом получится квантовый скачок решетки. При этом, однако, квантованная решетка может испускать только определенные дискретные изменения импульса и соответственно этому по теореме о сохранении импульса существует только ряд дискретных различных направлений, в которых может быть отражен световой квант. Далее можно показать, что из предположения об импульсе  $\frac{h\nu}{c}$  для светового кванта вытекают точно те же закономерности отражения, что и из классической волновой теории. Из этих рассуждений видно, как постепенно начинает заполняться зиявшая в мире классических представлений пропасть между двумя столь различными вещами, как корпускулы и волны, если только ввести характерные понятия теории квантов. Эренфест и Эпштейн сумели далее показать, какой необычайно большой продуктивностью и широкой областью приложения обладает точка зрения Дюэна.

Эти взгляды можно применить и для установления связи между волнами де Бройля и материальными частицами. Действительно, если вообще принять всерьез основную мысль рассуждения Дюэна, то и при отражении материальных частиц вместо световых квантов решетка может испытывать только те изменения импульса, которые допускаются теорией квантов. При этом оказывается (Иордан), что и материальная частица ведет себя в отношении отражения точно так же, как классическая волна, и притом как волна именно такой длины, как это требуется по де Бройлю.

Впрочем, если хоть раз решиться, по крайней мере для одного специального случая, связать энергию с частотой равенством  $E = h\nu$ , то уже не остается возможности уклониться от вывода, что это соотношение должно носить уни-

версальный характер. Именно предположение об универсальной связи между корпускулами и волнами в форме де Бройля — и только это предположение — дает возможность привести в согласие выводы, которые получаются, с одной стороны, из закона сохранения импульса, если придерживаться корпускулярных представлений, и с другой — из представлений об интерферирующих волнах.

В качестве примера отметим здесь обычный закон преломления. Пусть в двухмерной плоскости ось  $x$  представляет собой границу двух однородных сред с различными показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ . Тогда в обеих средах длины волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и фазовые скорости  $v_1$  и  $v_2$  световой волны частоты  $\nu$  (которая остается постоянной в обеих средах) равны

$$\lambda_1 = \frac{c}{n_1 \nu}, \quad \lambda_2 = \frac{c}{n_2 \nu}, \quad v_1 = \frac{c}{n_1}, \quad v_2 = \frac{c}{n_2} \quad (14)$$

Если теперь соответствующий световой квант  $h\nu$ , пролетая через обе среды, имеет компоненты импульса соответственно  $p_{1x}$ ,  $p_{1y}$  и  $p_{2x}$ ,  $p_{2y}$ , то (по де Бройлю):

$$\sqrt{p_{1x}^2 + p_{1y}^2} = \frac{h\nu}{v_1}, \quad \sqrt{p_{2x}^2 + p_{2y}^2} = \frac{h\nu}{v_2} \quad (15)$$

и кроме того, при прохождении через поверхность раздела тангенциальная слагающая остается неизменной:  $p_{1x} = p_{2x}$ . Отсюда следует, что должна иметь место пропорция

$$\frac{p_{1x}}{\sqrt{p_{1x}^2 + p_{1y}^2}} : \frac{p_{2x}}{\sqrt{p_{2x}^2 + p_{2y}^2}} = v_1 : v_2 = n_2 : n_1 \quad (16)$$

Это и есть закон преломления Снеллиуса. На примере этого, уже давно известного вывода,<sup>1</sup> видно, как можно облечь в корпускулярную форму объяснения, которые обычно связываются с принципом Гюйгенса. Если, однако, точнее сравнить эти два различных вывода закона преломления, то легко видеть, что нет ничего странного в совпадении результатов, к которым они приводят, ибо, несмотря на большое различие в интуитивной основе обоих

<sup>1</sup> К сожалению, я не могу указать, кем были впервые приведены эти соображения, известные еще до де Бройля.

рассуждений, по существу в том и другом случае приходится выполнять одно и то же геометрическое построение.

Можно указать и много других примеров, в которых имеют место такие же соотношения. Самым замечательным из них является, вероятно, эффект Комптона, для которого Шредингер обстоятельно выяснил, как можно понять изменения частоты, не вводя явным образом корпускулярные понятия, а допуская возможность интерференционного взаимодействия между светом и волнами де Бройля. Вообще можно сказать, что существует совершенно всеобщая и единая аналогия, между простыми правилами сложения импульса (законами сохранения) и элементарными родственными интерференции законами комбинаций частот и длин волн. Предпосылкой этой аналогии является, однако, допущение универсальности соотношения де Бройля после того как они были приняты для специального случая световых квантов.

Работа де Бройля, помимо количественной формулировки связи между волнами и корпускулами, содержит еще одно положение, которое, правда, было давно уже высказано Гамильтоном, но теперь приобретает большую важность для квантовой механики. Рассмотрим ход световых волн, длина которых очень мала, по сравнению с препятствием, стоящим на их пути; при этих условиях, совершенно вне зависимости от волновой структуры света, мы можем пользоваться геометрической оптикой вместо волновой. Но математический метод высшей геометрической оптики формально совершенно совпадает с так называемой теорией Гамильтона-Якоби в механике системы материальных точек. Исторически последняя теория и была развита Гамильтоном на основе этой аналогии, которая, однако, в течение долгого времени оставалась почти забытой и была вновь независимо открыта де Бройлем.

Естественно поставить эти факты в связь с проблемой материальных волн, и де Бройль, а особенно Шредингер поставили вопрос так: если стать на точку зрения радикальной волновой теории материи, то можно тем не менее непосредственно заключить, что „траектории“ мате-

риальных частиц в хорошо известных пределах можно рассчитывать по методам классической механики вне всякой связи с их волновой природой. Здесь мы имеем действительно просто „геометрическую“ оптику волн де Бройля; „траектории“ являются „лучами“, если выражаться оптически. Этим, однако, делается еще шаг по пути к известному положению о том, что точная квантовая механика атома относится к классической механике точно так, как волновая оптика к геометрической. Эта точка зрения, которая привела Шредингера к его важному открытию, сообщает наглядность обширной области квантово-механических закономерностей. На этом мы еще вскоре остановимся подробнее, но уже здесь, на основе ранее сказанного, мы попытаемся выяснить, в каких пределах справедливо это положение. Заранее известно, что оно никоим образом не может содержать решения собственно квантовой проблемы, ибо вся гипотеза световых квантов именно потому и была развита, что классическая волновая механика оказалась недостаточной для описания светового излучения. Если мы теперь видим, что и в материальных лучах, подобно свету, наблюдаются интерференционные явления, то мы не можем сомневаться в том, что классическая волновая теория по существу так же недостаточна для описания материального излучения, как и для описания света.

#### 9. Волны де Бройля и газовая теория Эйнштейна

Эйнштейн показал, что волновые соотношения де Бройля как раз и дают точную формулировку того волнового характера, который неявно приписывала материальным частицам его газовая теория. Это обнаружилось при изучении флуктуаций плотности Эйнштейновского газа, о которых мы говорили уже выше. Приняв вытекающее из теории Эйнштейна изменение Максвелловского распределения скорости, можно, напр., снова термодинамически вывести выражение для квадрата средней флуктуации количества газа в некоторой части большого



объема газа и получить формулу, совершенно аналогичную формуле (5) для излучения в полном пространстве. Первое слагаемое, которое единственно только и имеет значение при невырожденном газе, то же, что и весь квадрат флуктуации для классического идеального газа; второе слагаемое, которое приобретает решительный перевес при очень больших „плотностях“ материального излучения, совершенно тождественно с полным квадратом флуктуации для полого пространства, в котором находится классическое поле колебаний с частотами и длинами волн, соответствующими формулам де Бройля.

Таким образом, если действительно правильна Эйнштейновская теория газа (позже мы будем еще говорить о том, в каких пределах теперешний уровень наших знаний позволяет принять ее), то для материального газа мы имеем точно такое же положение, как и для излучения в полном пространстве: ни классические корпускулярные представления, ни классические волновые представления не дают правильной их картины.

Как показали независимо друг от друга Шредингер и Борн-Гейзенберг-Иордан, Эйнштейновскую теорию газа можно изложить в форме, которая аналогична отмеченному выше Дебаевскому изложению теории излучения в полном пространстве;<sup>1</sup> при этом уясняется и замечательная статистическая гипотеза Бозе-Эйнштейна. Действительно, прежде всего, и для излучения в полном пространстве, и для Эйнштейновского газа можно на основании равенств (13) показать, что число „ячеек“ фазового пространства, относящихся к области частот  $\nu$ ,  $\nu + \Delta\nu$ , равно числу собственных колебаний, относящихся к этой области частот.

Таким образом можно установить в известном смысле перевод корпускулярной статистики в статистику квантованных собственных колебаний с помощью следующего ключа:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{„Ячейка“} & \longrightarrow & \text{„собственное колебание“} \\
 \left. \begin{array}{c} \text{Число частиц в ячейке} \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{Квантовое число кван-} \\ \text{тованных собственных} \\ \text{колебаний} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Если мы теперь рассмотрим квантованное волновое поле, то совершенно естественно характеризовать каждое равновероятное состояние заданием квантовых чисел всех отдельных собственных колебаний. Но это как раз и есть положение Бозе-Эйнштейна, выраженное переведенной терминологией.

Конечно, здесь нужно ясно понимать, что этим пока устанавливается только совершенно формальная зависимость между представлениями Дебая (точнее представлениями Дебая, обобщенными на волны де Бройля), с одной стороны, и корпускулярной теорией Бозе-Эйнштейна — с другой.

Взаимная связь обеих этих точек зрения, проявляющаяся в возможности перевода одной теории в другую путем простого изменения нескольких слов, не может, однако, скрыть глубоких различий в модельных представлениях, лежащих в их основе.

Только применение представлений квантовой механики дает возможность вскрыть в этих формальных аналогиях внутреннюю равнозначность и распознать в этих образах равноправные стороны одной и той же целостной вещи.

#### IV. ВЛИЯНИЕ ГИПОТЕЗЫ СВЕТОВЫХ КВАНТОВ НА РАЗВИТИЕ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

##### 10. Волны Шредингера

Исключительное значение, которое приобрели идеи де Бройля благодаря тому, что они послужили исходным пунктом для открытия Шредингера, в настоящее время настолько общеизвестно, что в дальнейшем мы выдвинем на первый план фактическую связь теории Шредингера с гипотезой световых квантов, коснувшись исторических взаимоотношений лишь в той мере, в какой это необходимо для понимания.

Вернемся прежде всего к нашим прежним рассуждениям относительно квантовой динамики отдельного светового кванта. Мы видели, что чисто классическая волновая

теория давала формальный математический аппарат для точной обработки этой проблемы; только интерпретация формул была в этом случае совершенно иной, чем в случае обыкновенной теории света, которая дала первый толчок к развитию математической волновой теории.<sup>1</sup>

Аксиома Эйнштейна об аналогии между светом и материальным излучением должна поэтому вести к следующему предположению: для квантовой механики одной изолированной материальной точки можно получить точную формулировку, введя подходящее волновое поле, функционирующее по классическим законам. Де Бройль показал, как должны быть подобраны эти волны в случае частицы, движущейся без внешних сил. Шредингер поставил перед собой более трудную задачу — осуществить для материальной точки, находящейся в силовом поле, точное построение волн, определяющих ее поведение. Указанная Гамильтоном де Бройлем аналогия между классической механикой системы и геометрической оптикой дала Шредингеру исходные точки для овладения этой проблемой: волновая теория должна была быть формулирована именно так, чтобы в предельном случае геометрической оптики получились классические траектории частиц.

Таковы были (в главных чертах) те основы, из которых исходил Шредингер, и, как известно, ему действительно удалось найти решение этой важной проблемы. Его результат сводится к следующему: пусть  $U(x, y, z)$  есть потенциальная энергия, а  $m$  масса частицы; тогда соответствующую

---

<sup>1</sup> Еще в классической физике встречаются примеры того, что один и тот же формальный математический аппарат может применяться в совершенно различных по существу теориях. Так, напр., уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

встречается и в теории потенциала, и в теории теплопроводности, причем в обоих случаях из него извлекаются одни и те же математические следствия. Однако физическая интерпретация математической теории в обоих случаях совершенно различна.

щее поле колебаний имеет (комплексную) амплитуду  $\psi$ , которая удовлетворяет уравнению: <sup>1</sup>

$$-\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2m} \Delta\psi + U(x, y, z) \cdot \psi + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

Наиболее общее решение уравнения (17) может быть представлено как сумма частных решений, каждое из которых имеет вид

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) \cdot e^{-2\pi i \nu t} \quad (18)$$

т. е. во времени колеблется чисто гармонически (в комплексном смысле). Для пространственного фактора амплитуды получаем уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2m} \Delta\psi + U\psi = W\psi; \quad W = h\nu \quad (19)$$

Те (всегда вещественные) значения  $W = h\nu$ , для которых существует решение  $\psi$  уравнения (19), соответствующее природе проблемы (т. е. не имеющее особых бесконечных значений и удовлетворяющее известным „краевым условиям“), в математике носят название характеристических чисел уравнения (19), а соответствующие решения  $\psi$  называются „фундаментальными функциями“.

Так же как и для волн де Бройля, эти характеристические числа, т. е. умноженные на  $h$  частоты волн Шредингера, имеют простое и важное физическое значение: они представляют собой те энергии различных „стационарных состояний“, которые согласно квантовой теории может принимать материальная точка, движущаяся в силовом поле.

Эти положения, как известно, наилучшим образом подтвердились на опыте (в тех пределах, где этого можно было ожидать). Очевидно, они представляют собою не что иное, как законное развитие идей, неявно заключающихся в гипотезе световых квантов. При ретроспективном рас-

---

<sup>1</sup> Через  $\Delta$  обозначен оператор  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

смотреии можно усмотреть во всем развитии этих идей от первого положения Эйнштейновской гипотезы световых квантов до Шредингеровской волновой механики полную логическую необходимость.

С такой же необходимостью вытекает и физическое истолкование функций  $\psi$  или  $\varphi$ . Уравнение (17), для отдельной движущейся материальной точки, имеет, как было сказано, то же значение, что и уравнения Максвелла для отдельного светового кванта. Из уравнений Максвелла мы могли найти вероятность того, что отдельный световой квант, с которым мы экспериментируем, будет воспринят в определенном месте; соответственно этому и из функции  $\psi$  мы можем получить вероятность того, что материальная точка, с которой мы производим опыты, окажется в определенном месте. (Эта вероятность пропорциональна квадрату абсолютного значения  $|\psi|^2$  функции  $\psi$  в данном месте). Это значение функции  $\psi$ , которое с совершенной необходимостью вытекает из аналогии с динамикой световых квантов, было особенно выяснено Борном. В тесной связи с этим находится высказанное впервые Паули истолкование отдельных фундаментальных функций  $\varphi$ . Если мы знаем, что атом находится как раз в  $n$ -ом квантовом состоянии, — предположению об определенной энергии атома соответствует его изображение с помощью чисто гармонической волны, т. е. отдельного собственного колебания, — то  $|\varphi_n|^2 dx dy dz$  есть вероятность того, что при соответствующем эксперименте движущаяся частица окажется в элементе объема  $dx dy dz$ . (При этом  $\varphi_n$  есть фундаментальная функция, соответствующая  $n$ -му состоянию). О какого рода экспериментах здесь идет речь, нам еще придется говорить ниже.

Выше уже было отмечено, что возможность точного вывода известных квантово-механических свойств материальных частиц из представления о классических волнах никоим образом не может рассматриваться как доказательство того, что с помощью волновых представлений можно вернуться к классическим понятиям. Проведенный выше анализ основных идей теории Шредингера должен только вы-

яснить, что открытие Шредингера в действительности означает не что иное как установление глубокой аналогии между световыми квантами и материальными частицами, и что поэтому пригодность классических волн для описания материи доказана только в тех пределах, в каких она имеет место для света. Но мы знаем — если нужно лишний раз сказать это — что по отношению к свету пригодность классической волновой теории, вообще говоря, ограничена (по существу даже ограничена весьма узкими пределами). Поэтому, если бы мы захотели предполагать, что волны материи функционируют чисто классически, то это значило бы, что мы отныне решаемся категорически отрицать аналогию между светом и материей.

Однако вряд ли есть возможность преодолеть на этом пути стоящие перед нами трудности. Если мы вспомним аналогию между классической механикой и геометрической оптикой, — механические траектории математически точно совпадают с лучами волнового поля, — то нельзя забывать и того, что, несмотря на это совпадение математических законов по существу обе теории совершенно различны. (С такого рода соотношениями мы встречались уже и в других примерах.) В механике материальной точки существует не только траектория, но и сама материальная точка, и существует возможность уловить эту точку на ее траектории. Этому в геометрической оптике нет никакой аналогии. Только с помощью особых дополнительных предпосылок можно было бы попытаться построить чисто классическую теорию материи, примыкающую к волновой механике Шредингера, но такая попытка заранее имела бы не больше шансов на успех, чем многочисленные напрасные попытки аналогичной формулировки теории световых квантов. Поэтому, когда и в случае волн материи рассматривают статистическую связь между волнами Шредингера и положением частицы в пространстве, как закономерность, которая не объяснена, а просто принимается, то это снова выражение доверия к положению Эйнштейна об аналогии между светом и материей.

## 11. Волновая механика и теория матриц

Физические величины, получающиеся непосредственно из теории Шредингера — значения энергии  $W$  и вероятности нахождения в данном месте  $|\psi|^2$  — являются только частью того, что мы хотим знать. Если мы остановимся сначала на примере атома, то в первую очередь нас интересуют вероятности различных процессов перехода, связанных с излучением.

Эти вопросы можно решать в непосредственной связи с положениями Шредингера, применяя вместе с тем должным образом характеристические понятия квантовой механики: скачкообразные переходы и т. п. (Клейн, Гордон); таким путем получается вывод закона испускания и абсорбции, данный Бором и Эйнштейном (так же как и получающихся из принципа соответствия дисперсионных формул и формул для интенсивности комптоновского рассеяния).<sup>1</sup>

На самом же деле ответ на эти вопросы был дан не дальнейшим развитием понятий Шредингера, а одновременным развитием другой независимой теории. Позже оказалось возможным чрезвычайно просто связать волновую механику с этой теорией, так что обе теории оказались лишь различными изложениями одних и тех же фактов. Все это в настоящее время так хорошо известно, что здесь мы можем ограничиться лишь несколькими короткими замечаниями по этому поводу.

Классическое периодическое движение может быть, по Фурье, представлено как результат сложения ряда чисто гармонических движений. Электромагнитное излучение движущегося по классическим законам точечного заряда дает нам возможность по интенсивностям отдельных гармонических составляющих излучения судить об амплитудах

---

<sup>1</sup> Совершенно другие выводы получаются, однако, если совершенно отказаться от квантовых разрывных представлений и предположить, что волны Шредингера ведут себя квази-классическим образом. Примеры этого подробно рассчитал Иоос (H. Joos).

отдельных гармонических компонентов движения материальной точки. Далее, согласно классической теории, мы могли бы на основании дисперсионных опытов определить фазовые соотношения между различными гармоническими компонентами движения точечного заряда. Таким образом мы оказались бы в состоянии точно проследить за ходом движения частицы по наблюдениям за ее излучением. Совершенно таково же положение вещей при движении электрона в действительном атоме. Здесь точно также интенсивности испускания или абсорбции отдельных атомных частот соответствуют гармоническим компонентам „движения“ электрона в атоме, и снова можно из дисперсионных опытов сделать выводы о фазовых соотношениях между этими частичными гармоническими колебаниями (между тем как интенсивности испускания дают возможность судить только об абсолютных значениях гармонических компонентов движения). Конечно, нет возможности объединить эти частичные гармонические колебания с „траекториями“ электронов в смысле классической кинематики; это не удастся, потому что в отличие от классического предельного случая их нельзя рассматривать как компоненты движения в одном определенном атомном состоянии, а можно связывать с помощью условия частот  $h\nu$  только с различными возможностями перехода в атоме. Несмотря на это различие, как установил Бор в своем принципе соответствия, все же существует формальное сходство между классическими и квантово-механическими компонентами движения Фурье, и после того как это сходство было исследовано и количественно сформулировано для различных примеров, Гейзенбергу и примыкающим к нему авторам удалось, наконец, показать, как можно использовать эту близость для того, чтобы получить такую формулировку квантово-механических законов движения, с помощью которой можно полностью определить энергетические состояния и вероятности переходов при излучении.

Оказалось, что в основе сформулированных таким образом законов с математической точки зрения лежит проблема харак-



теристических чисел (Борн-Гейзенберг-Иордан), а затем было выяснено, что эта проблема совершенно эквивалентна такой же проблеме в волновой механике Шредингера (Шредингер, Эккарт, Паули). Мы получаем одни и те же значения энергии и из волновой и из матричной механики, и те величины, которые в матричной механике определяют вероятности переходов, можно вычислить и из фундаментальных функций Шредингера.

Важно, однако, уяснить себе, что хотя „компоненты Фурье“ или „элементы матрицы“  $q(nm)$  в матричной механике исторически были введены в связи с вероятностями переходов и хотя эта связь делает их особенно наглядными, — тем не менее по сути дела эти  $q(nm)$  вовсе не имеют непосредственного и необходимого значения вероятностей перехода. Напротив, прежде всего в них нужно видеть чисто кинематические величины, содержащие необходимые обобщения классических понятий движения. Поэтому они могут быть определены и в тех случаях, где не может быть и речи об электромагнитном излучении или о чем-нибудь в этом роде.<sup>1</sup>

Вне зависимости от реакции излучения физическая интерпретация величин  $q(nm)$  может быть дана, например, так: Среднее во времени значение величины  $q$  с матричной схемой ( $q^{(nm)}$ ) для атома, находящегося в  $n$ -ом квантовом состоянии, есть  $n$ -й диагональный элемент матрицы  $q^{(nm)}$ . Если из матрицы для  $q$  составить матрицы для  $q^2, q^3, \dots, q^s$ , то можно соответствующим образом определить и средние во времени значения всех этих степеней  $q$ . Наоборот, этими средними во времени значениями определяется по существу и вся матрица  $q$ . Мы находим здесь новую связь между теорией Шредингера и матричной теорией, и снова оказывается, что обе теории ведут к согласным результатам. Действительно, если атом находится в  $n$ -ом состоянии, то согласно волновой механике вероятность того, что  $q$  имеет значение в интервале  $q', q' + dq'$ , равна по

<sup>1</sup> Этим мы еще воспользуемся позже.

Паули  $|\varphi_n(q')|^2 dq'$ ; отсюда мы получаем для среднего значения  $q^s$  в  $n$ -ом состоянии выражение <sup>1</sup>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q^s |\varphi_n(q')|^2 dq' \quad (20)$$

и математическая связь между волновой и матричной механикой такова, что действительно это выражение (20) точно равно  $n$ -му диагональному числу матрицы для  $q^s$ .

## 12. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ

Логическая последовательность и необходимость в эволюции от гипотезы световых квантов к волновой механике и от принципа соответствия к матричной теории, и затем совпадение результатов, полученных обоими путями, сами по себе должны были внушить большое доверие к новой теории; еще больше подействовало то, что по мере развития приложений теории, последняя получала все больше подтверждений. Но с другой стороны, нельзя было не видеть и того, что система квантовой механики являлась еще в значительной мере несовершенной и незаконченной, как с точки зрения совокупности ее понятий, так и с математической стороны. Несмотря на большой охват понятий, о которых шла речь в предыдущих разделах, их еще отнюдь недостаточно для интерпретации всех многообразных экспериментов, которые можно произвести с атомами. В скрытом виде формальный аппарат элементарной волновой или квантовой механики содержит, правда, уже ответ на всякий возможный вопрос, но было необходимо именно развить то, что имелось налицо в скрытом виде, чтобы ответить на все мыслимые частные вопросы и выяснить принципиальное отношение теории к таким проблемам, как каузальность. Подходы к этому (кроме указанных выше), были получены из исследований об обмене энергии между атомами, находящимися в резонансе (Гейзенберг, Иордан). Известная законченность с формальной стороны была

<sup>1</sup> Напр. среднее значение  $q^s$  для  $n$ -го состояния равно  $\sum q(nk) q(kn)$ .

достигнута статистической формулировкой квантовой механики в теории преобразований Дирака-Иордана.<sup>1</sup>

С точки зрения наглядно-физической и теоретико-познавательной полную ясность внесли работа Гейзенберга и затем доклад Бора.<sup>2</sup>

Не входя здесь в детали этого хода идей, которые завели бы нас слишком далеко в сторону, мы хотим вкратце коснуться хотя нескольких пунктов, в которых снова выплывает старая проблематика теории световых квантов.

Здесь нужно прежде всего упомянуть исследованные Гейзенбергом и Борном правила недостоверности.

Согласно квантовой механике, корпускулярной частице нельзя одновременно приписывать точно определенные импульсы  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  и точно определенные координаты положения  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$ . Неизбежные ошибки  $\Delta p_x, \dots, \Delta q_x, \dots$  никогда нельзя сделать настолько малыми, чтобы не выполнялись неравенства

$$\Delta p_x \cdot \Delta q_x > \hbar; \quad \Delta p_y \cdot \Delta q_y > \hbar; \quad \Delta p_z \cdot \Delta q_z > \hbar \quad (21)$$

Это обстоятельство, которое в рамках теории преобразований тесно связано с так называемыми правилами перестановки матриц для  $p_x q_x \dots (p_x q_x - q_x p_x = \frac{\hbar}{2\pi i}$  и т. д.) становится непосредственно очевидным в связи с волнами де Бройля.

Действительно, если мы представим себе свободно движущуюся частицу, то связанные с ней волны имеют то свойство, что они обязательно должны заполнять все пространство, если частота и длина их строго определены (т. е. если волна является чисто гармонической). Если же

<sup>1</sup> Эту теорию весьма замечательным образом дополнили Г. Вейль и Нейман, которые на ряду с „чистыми случаями“ исследовали и квантово-механические „смеси“. Вейль попытался, кроме того, дать очень интересное построение математической стороны теории; однако сейчас еще трудно решить, какие из математических понятий Вейля могут иметь собственно физический смысл.

<sup>2</sup> Доклад, читанный на Международном конгрессе в Комо в 1927 г. в честь юбилея Вольта. Русский перевод ср. Усп. физич. наук. 8, 306, 1928.

мы хотим отграничить волну в пространстве, то мы непременно должны неточно определить ее частоту. Можно перейти даже к другому предельному случаю, когда амплитуда волны (в течение очень короткого времени) отлична от нуля лишь в области сколь угодно близкой в данной точке пространства, но тогда волновой образ вообще не имеет какой-нибудь определенной частоты. Встречающиеся здесь „волновые пакеты“ были введены в квантовую механику (первоначально для нескольких других целей) Шредингером.

Мы много раз подчеркивали, что на установление соответствия между волнами и частицами нужно смотреть как на нечто первично данное, неподдающееся какому-нибудь объяснению иными фактами. При этом нам остается только рассматривать и эту невозможность одновременного резкого определения места и частоты волнового пакета, как выражение аналогичных свойств частиц; определяемая из уравнений де Бройля энергия частицы сама должна быть определена неточно, если соответствующий волновой образ не имеет точно определенной частоты. Исходя из этой точки зрения мы, путем простых геометрических исследований волн, приходим к правилам недостоверности (21).

С этой точки зрения мы понимаем и формальное сходство Дебаевской и Эйнштейновской статистики излучения в полном пространстве, как действительное внутреннее единство. Положение о том, что объем ячейки фазового пространства равен  $h^3$ , соответствует тому обстоятельству, что в лучшем случае мы можем превратить три неравенства (21) в три равенства; тогда мы действительно получаем ячейки с объемом  $h^3$ . Но при этом мы можем еще в произведении  $\Delta p_x \cdot \Delta q_x = h$  один из множителей выбрать произвольно, и изложение Дебая именно и соответствует тому предельному случаю, когда импульсы  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  определены совершенно точно, тогда как положения световых квантов остаются совершенно неопределенными.

Решающее значение имеет тот факт, что неопределенность положения или импульса является с изложенной только что точки зрения современной квантовой механики отнюдь

не следствием неполноты наших современных знаний, а наоборот, неопределенностью, связанной с самими фактами, или, лучше говоря, ограниченностью применимости классических понятий к действительности, соответствующей природе вещей. Действительно, и классическая волна, поскольку она не распространяется равномерно во всем пространстве, обладает некоторой неопределенностью в отношении своей частоты, но в этом заключается не неопределенность самого физического образа, а только недостаточность понятия частоты для точной передачи этих образов. Экспериментально, однако, можно установить определенное положение частицы и в том случае, когда определен импульс частицы, а положение ее остается неопределенным. Можно, например, по крайней мере в мысленном эксперименте, определить положение электрона, освещая его светом очень короткой длины волны (напр.  $\gamma$ -лучами) и наблюдая затем в подходящий „микроскоп“ световую вспышку, возникающую при соударении электрона со световым квантом. Но при этом нужно представлять себе, что именно в результате этого наблюдения координаты положения частицы получают определенные значения; предыдущими экспериментами определялись только законы вероятности этих измерений положения. Одновременно с этим установлением положения частицы происходит также по существу неконтролируемое, т. е. по существу неопределенное изменение импульса.

Эти соображения подводят нас к проблеме каузальности; современная квантовая механика содержит категорическое отрицание классического детерминизма. По сути дела и здесь имеет место только последовательное проведение тех идей, к которым с самого начала была устремлена гипотеза световых квантов. Наша прежняя формулировка, согласно которой статистическую связь между волнами и частицами нужно рассматривать как исходный принцип теории, по существу уже содержит отказ от принципа каузальности. Дальнейшее развитие лишь укрепило этот отказ.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Современная квантовая механика показала недостаточность механического детерминизма. Та роль, которую в новой квантовой механике

Очень замечательно, что несмотря на этот отказ от классической каузальности, квантовая механика все же сумела и в этом вопросе сохранить известное согласие с классическими представлениями. Классическая теория дает возможность предвычислить движение микроскопической „материальной точки“ под влиянием известных сил, если для некоторого начального момента известно ее положение и скорость. Квантовая механика не утверждает просто неправильности этого утверждения; напротив, ее индетерминизм проявляется в том, что предпосылки этого классического утверждения не выполняются в микро-физической области (Гейзенберг).

Отметим еще один пункт, в котором вместе с тем видно, как смягчаются новыми представлениями принципиальные трудности прежних квантово-теоретических формулировок. По тем же причинам, что место и импульс, — никогда не бывают точно определены время и энергетические превращения в квантовых скачках. Этим устраняется прежнее странное представление о том, что в некоторый определенный момент времени скачкообразно происходит определенное конечное изменение энергии: вместе с этим исчезают и все вопросы о „механизме“ этих квантовых скачков.

Эти примеры проливают свет на удивительные взаимоотношения между классической и квантовой механикой, которые в несколько парадоксальной форме можно формулировать так, что между обеими теориями существует, с одной стороны, наибольшая возможная противоположность, а с другой, — наибольшее возможное сходство. Наибольшая противоположность в основных предпосылках и тем не менее повсюду проявляющееся сходство во всех закономерностях. Основные идеи гипотезы световых квантов: дуализм волн и

---

играет статистическая закономерность, заставила многих физиков, в том числе и Иордана, говорить об индетерминизме в мире микрокосмоса.

Такое утверждение неправильно: статистическая закономерность, хотя и не укладывается в рамки механического детерминизма, однако нисколько не нарушает принципа причинности. Более подробно об этой проблеме см. статью Б. Гессена в книге Гааса „Волны материи и квантовая механика“ Гиз. 1930. *Ред.*

частиц, соответствие между частотой и энергией характеризуют двусторонним образом, с одной стороны, основную противоположность, а с другой — тесную близость обеих теорий.

#### V. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

##### 13. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ФЛУКТУАЦИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ

Еще до того, как идеи, выросшие из гипотезы световых квантов, проникли в развитие квантовой механики и там проявили свою плодотворность, — еще до этого матричная механика со своей стороны сделала первый успешный шаг по пути к полному уяснению проблемы световых квантов. Начиная теперь ознакомление с этими обстоятельствами, мы приближаемся к новейшим и наиболее трудным исследованиям в области квантовой теории и потому должны просить читателя быть не только особо внимательным к рассуждениям этой последней главы, но и возможно отчетливее припомнить все ранее сказанное.

Мы оставили гипотезу световых квантов в момент, когда нам стало ясно, что на основе классических волн мы можем построить точную теорию для специального случая одного светового кванта (во взаимодействии с микроскопическими оптическими приборами). После этого мы подробно выяснили, что то же возможно и для одной (изолированной) материальной частицы. Однако мы не имеем еще никакого ответа на вопрос о том, как можно построить точную теорию для полого пространства, содержащего больше чем один световой квант.

Чтобы уяснить себе смысл ответа, который должен быть дан на этот вопрос, представим себе снова картину квантовой механики материальной точки, о которой мы говорили в предыдущем разделе. Эта теория находила себе наглядное обоснование в де Бройлевском соответствии между волнами и частицами и в аналогии между классической механикой и геометрической оптикой. Однако можно придать этой теории и другой вид, отказавшись от этих наглядных основ в пользу более абстрактных точек зрения;

это и делает теория преобразований, для которой распространяющиеся в пространстве волны Шредингера являются только частным случаем общих „функций преобразования“ („амплитуда вероятности“), которые определяют статистические соотношения между результатами отдельных экспериментов (измерений), производимых с данной материальной точкой. В пределах этой теории преобразований можно дать многообразные различные матричные изображения квантово-механически измеримых величин, и матрицы, введенные Гейзенбергом, снова являются лишь частным случаем их.

Тому недостатку, что теперь мы оставили наглядные основы теории де Бройля-Шредингера, противопоставляется выигрыш, заключающийся в том, что мы приобретаем общий абстрактный квантово-механический формальный аппарат, который может быть приложен и к решению таких проблем, для которых наглядные идеи де Бройля сами по себе ничего не дают. Мы выяснили ведь еще раньше, что проблема светового излучения с числом световых квантов большим единицы или проблема идеального газа (с несколькими атомами) в смысле теории Эйнштейна не может получить удовлетворительного решения на основе идей де Бройля. Такие проблемы лежат за пределами достижимости этих идей (исследования де Бройля и газовая теория Эйнштейна показали нам, что в обеих этих проблемах возникают аналогичные трудности).

Нет, однако, никаких препятствий к тому, чтобы прилагать формальный аппарат теории преобразований вместо отдельной материальной точки к совершенно иной механической системе или именно к электромагнитной среде внутри некоторого полого пространства; при этом, как показали Борн, Гейзенберг и Иордан, даже с помощью матричной теории в ее прежней форме можно получить здесь существенно важные результаты. Совершенно так же, как в случае материальной точки, мы изображаем координаты  $q, \dots$  или импульсы  $p, \dots$  или кинетическую энергию, или вообще произвольную функцию координат и импульсов в виде матриц с элементами  $q(nm)$ , где  $n$  и  $m$  означают два квантовых



состояния системы; так же могут быть представлены с помощью матриц для полого пространства, например, напряженность электрического поля  $\mathcal{E}(x, y, z)$  в точке  $x, y, z$  нашего пространства  $V$  или энергия  $E_0$  в частичном объеме  $V_0$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, y, z) &= \left( \mathcal{E} \begin{matrix} (x, y, z) \\ (n, m) \end{matrix} \right) \\ E_0 &= \left( E_0(n, m) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

где  $n, m$  означают два стационарных состояния всей системы (колеблющегося полого пространства). По существу это означает то же, что пытался уже сделать Дебай в 1910 г., производя квантование колебаний полого пространства; но на этот раз эта попытка производится не слабыми средствами прежней теории, представлявшей смесь классических и квантово-теоретических элементов, а в точной квантово-механической форме. Поэтому наши предпосылки дают не только закон Планка вместо закона Рэлея-Джинса, как это было и у Дебая, но и устраняют более глубокие трудности теории излучения, не затронутые Дебаем.

Выше мы установили уже совершенно отчетливо, что матричные элементы  $q(n, m)$  отнюдь не имеют непременно первоначального значения вероятностей переходов, связанных с испусканием или абсорбцией излучения; поэтому нет никаких принципиальных затруднений в том, что мы представляем с помощью матриц величины  $\mathcal{E}(x, y, z)$  и  $E_0$ , хотя понятие о вероятностях излучения здесь неприменимо. Значение этого перехода к матрицам (22) заключается именно в том, что мы приписываем измененную кинематику как величинам, характеризующим поле  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  и их функциям (напр.,  $E_0$ ), так и координатам колеблющегося электрона. Это изменение кинематики становится незаметным, когда мы задаемся вопросом о каких-либо средних во времени значениях интенсивности света; в этих случаях мы всегда снова получаем эмпирически подтвержденные положения классической оптики. Однако, оно сказывается, как только мы опять обращаемся к вопросу о флуктуациях. Мы

можем, например, повторить прежние расчеты Лоренца—на этот раз, правда, с волновыми амплитудами  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$ , представленными в форме матриц—и вычислить с учетом интерференции среднее во времени значение квадрата  $E_0^2$  или квадрата флуктуации  $(\Delta E_0)^2 = (E_0 - \bar{E}_0)^2$ .

При этом мы получаем результат, что именно на основе тех отклонений от классической теории, которые описываются матричными соотношениями, действительно, получаются формулы, названные выше „вторым Эйнштейновским законом флуктуаций“. Это обнаружили Борн, Гейзенберг и Иордан, которые исследовали несколько более простую систему, чем полое пространство, именно одномерную идеально упругую струну (здесь имеют место принципиально такие же соотношения).

В двух пунктах эти достижения оставались еще, конечно, не вполне удовлетворительными.<sup>1</sup> Во-первых, примененный в то время метод еще не давал возможности получить дедуктивным путем и первый Эйнштейновский закон флуктуаций, в котором определяется вероятность известных крайне маловероятных распределений энергии в полном пространстве. Правда, выше мы познакомились с одним путем, который принципиально мог бы пролить свет и на этот пункт. Вычисляя последовательно среднее во времени значение всех степеней,  $E_0^2$ ,  $E_0^3$ , ...,  $E_0^s$ , ..., мы можем в конечном счете вычислить, отсюда вероятность осуществления определенного значения  $E_0^1$  величины  $E_0$ , но, конечно, практически это неосуществимо. Поэтому только позже, с помощью более совершенных средств, удалось показать, что и первый Эйнштейновский закон флуктуаций получается сам собой, когда мы производим квантование волн в полном пространстве указанным выше образом.

Во-вторых, известный недостаток изящества теории заключается в появлении некоторой (даже бесконечно большой) нулевой энергии. Действительно, согласно квантовой механике энергия гармонического осциллятора частоты  $\nu$ , нахо-

<sup>1</sup> На оба эти пункта тогда же обратил мое внимание в своем письме Эйнштейн.

дящегося в  $n$ -ом квантовом состоянии (для основного состояния  $n=0$ ) равна не  $n h\nu$ , а  $(n + \frac{1}{2}) h\nu$ ; таким образом и в основном состоянии остается еще некоторая энергия  $\frac{1}{2} h\nu$ . Квантовое покое пространство получает, стало быть, для каждого отдельного собственного колебания соответствующую энергию, и сумма этих энергий становится бесконечно большой. Заметим здесь же, что этот неприятный пункт до сих пор не мог быть изменен. Нужно, однако, сказать, что речь идет здесь в большей мере о формальном усложнении, чем о действительной трудности. В действительности для полого пространства мы можем наблюдать только разности энергии различных стационарных состояний,<sup>1</sup> а для них не имеет значения нулевая энергия.

Оставляя в стороне еще нерешенные проблемы и обращаясь к тому, что уже удалось сделать, мы прежде всего видим, что нет нужды возвращаться снова к гипотезе световых квантов в явной форме. Действительно, мы придерживались все время волновой теории света и изменили в квантово-механическом направлении только кинематику волн в полом пространстве. В результате этого сами собой получились эффекты, характерные для световых квантов. Совершенно вне зависимости от того, что здесь мы впервые имеем теорию, приложимую ко всем проблемам, связанным с полым пространством, проблема световых квантов вообще получает совершенно новую постановку. При предположении этой теории нет надобности вводить представления о световых квантах. Наоборот, можно, — и это, повидимому, наиболее естественно — исходить из волновых представлений; если формулировать их в понятиях квантовой механики, то корпускулярные эффекты световых квантов получаются сами собой, как необходимые следствия из общих закономерностей квантовой теории. Понятно, какие перспективы открываются здесь, если снова подумать о волнах материи вместо световых волн. Мы обретаем надежду понять когда-

<sup>1</sup> В этом отношении колеблющееся покое пространство ведет себя совершенно иначе, чем, напр., колеблющаяся кристаллическая решетка.

нибудь аналогичным образом и существование материальных частиц и охватить атомную структуру материи и электричества, представлявшую непреодолимые трудности для классической теории, как частный вывод из общих квантово-теоретических законов.

Существенным результатом исследований Борна, Гейзенберга и Иордана для самой теории света является положение, что можно осуществить развитие нового понятия о поле (которого требовал Паули), применяя понятия квантовой механики к колеблющемуся полю. Но это положение в известном смысле слова разделило судьбу тех рассуждений Эйнштейна, в разъяснении которых искали его обоснования: в течение долгого времени оно оценивалось сдержанно или отрицательно даже сторонниками квантовой механики<sup>1</sup>. Признание его пришло только тогда, когда годом позже Дирак показал, что и Эйнштейновские законы испускания и абсорбции для атома, находящегося в поле излучения, вытекают из этих предложений естественно и точно.

#### 14. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АТОМОВ И ИЗЛУЧЕНИЯ

Дирак предпринял также исследования реакций излучения атома, исходя из представлений о квантованном полом пространстве. Конечно, до тех пор, пока взаимодействие колеблющегося дипольного момента атомов с пространством излучения не рассматривалось с этой точки зрения, можно было только дать вывод законов вероятности Эйнштейна, наполовину связанный с принципом соответствия и, во всяком случае, нельзя было получить дедуктивно естественного обоснования его. С помощью вновь созданных орудий общей квантовой механики Дираку удалось получить ясное разрешение этой проблемы. Действительно, этим путем мы приходим к формулам Эйн-

<sup>1</sup> Это всеобщее непризнание вызывало в течение некоторого времени даже в самом авторе известные сомнения, которые изложены в соответствующих замечаниях статьи „Развитие квантовой механики“ в „Naturwissenschaften“.

штейна, затем к соответствующим формулам для дисперсии и т. д.<sup>1</sup> Кроме того были получены важные новые результаты в тончайших и сложнейших вопросах, связанных с вопросом об естественной ширине спектральных линий. Другие авторы (Оппенгеймер, Ландау, Блох) развивали дальше и применяли метод Дирака.

Для нас здесь прежде всего имеют значения те рассуждения в исследованиях Дирака, с помощью которых он сделал важный вклад в дело уяснения дуализма между квантованными волнами, с одной стороны, и корпускулярными частицами (в любом количестве), с другой. Но к этому мы еще вернемся позже. Здесь мы отметим только одну проблему, которая в известном смысле является естественным продолжением вопросов, разработанных Дираком. По Дираку можно теперь без труда рассчитать взаимодействие двух удаленных атомов, осуществляемое излучением; но при этом существенно необходимо считать расстояние между ними настолько большим, чтобы было исключено грубое электростатическое взаимодействие электронов с обеих сторон. С другой стороны, этим грубым взаимодействием электронов можно количественно овладеть в тех приближениях, в которых оно описывается Кулоновской силой, мгновенно действующей на расстоянии. Но в действительности существуют только осуществляемые полем, запаздывающие взаимодействия между электронами. Классическая электронная теория Лоренца была, как известно, в состоянии дать сравнительно простые высказывания об этих запаздывающих взаимодействиях. Наоборот, квантовая теория еще не зашла так далеко. Мы увидим ниже, сколько труда и вдумчивых размышлений нужно было затратить, чтобы достичь по крайней мере известной подготовки к овладению этой проблемой. Тем не менее, до сих пор положение таково, что эта подготовка оказывается еще недостаточной. Только одно может считаться, очевидно, твердо установленным: именно, что после-

---

<sup>1</sup> При этом отпадают и уклоняющиеся в сторону выводы, основанные на квази-классических посылках, например, выводы Иосса.

довательная теория запаздывающих взаимодействий электронов должна охватывать как частный случай и взаимодействия излучения в том виде, как они описаны Дираком. Таким образом, заведомо нет возможности разрешить эту проблему, не прибегая к квантованию электромагнитного поля.

### 15. ЗАДАЧА О НЕСКОЛЬКИХ ТЕЛАХ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Теперь мы возвращаемся снова от квантов света к материальным частицам. Выше мы достаточно часто подчеркивали, что представления де Бройля и основанные на них результаты Шредингера первоначально давали точную теорию только для проблемы квантовой механики одной изолированной частицы. Но вместе с тем мы выяснили, что существует возможность абстрагировать из квантовой механики одной изолированной частицы формальную квантово-механическую теорию, которая может быть приложена и к другим проблемам, хотя здесь она не имеет тех же наглядных обоснований. Это удалось проще всего сделать для задачи о нескольких телах в квантовой механике; элементарная матричная механика, не связанная заранее со столь узкой проблемой, как представления де Бройля, указала единственный путь для этого. Если мы, например, хотим описать по Шредингеру механику водородного атома, состоящего из ядра и одного электрона, то для этого нужны волны в абстрактном шестимерном пространстве. (Соответственно этому предельный случай классической механики для этой проблемы аналогичен геометрической оптике некоторой шестимерной протяженной среды.) С формально математической стороны это является простым обобщением Шредингеровской теории проблемы одного тела; но интуитивный исходный пункт — представление, что материя подобно свету должна быть описана с помощью известных волн в реальном трехмерном пространстве — здесь совершенно оставлен и уступил место абстрактным квантово-механическим представлениям.

Дальнейшее продвижение по этому пути привело Дирака и Гейзенберга к очень удивительным положениям. Мы ограничимся напоминанием об этих хорошо известных в настоящее время вещах. При решении задачи о нескольких телах с совершенно однородными, по существу неразличимыми частицами (атом с несколькими электронами, газ из однородных атомов) получаются новые соотношения из появления не комбинирующихся по существу систем термов. В природе в каждом определенном случае может быть реализована только одно из них, но теория не дает возможности определить, какое именно. Нужно, стало быть, дополнить здесь теорию некоторыми дополнительными утверждениями, основанными на опыте. Опыт же показывает, что только две из этих систем термов имеют место физически; математически они характеризуются соответственно „симметрическими“ и „антисимметрическими“ фундаментальными функциями.

Если газ из однородных атомов обладает состояниями, которые соответствуют „симметрической“ системе термов, то он ведет себя как газ в теории Эйнштейна. Мы получаем, таким образом, поразительную возможность понять загадочную статистику Бозе-Эйнштейна и на основании корпускулярных представлений. Наоборот, в случае „антисимметрической“ системы термов выполняется знаменитый „запрет эквивалентности Паули“. В каждой „ячейке“ фазового пространства может находиться не больше одной частицы. По опытным данным это имеет место для отрицательных электронов (Паули), а также для положительных частиц (Деннисон). Легко также рассчитать (Ферми, Дирак), как ведет себя при отсутствии энергетического взаимодействия частиц идеальный газ, подчиненный запрету эквивалентности; <sup>1</sup> это важно для теории металлической электропроводности (Паули, Нордгейм,

<sup>1</sup> В распределении скоростей мы получаем множитель  $\frac{1}{e^{\alpha(T)} + \frac{E}{kT} + 1}$   
 вместо множителя  $\frac{1}{e^{\alpha(T)} + \frac{E}{kT} - 1}$ , встречающегося в теории Эйнштейна.

Зоммерфельд и др.). Наконец, легко также видеть, как должны быть изменены и законы вероятности для соударений атомов газа и всех остальных элементарных процессов, чтобы они соответствовали отличному от Максвелловского распределению скоростей в таком газе (Иордан, Крамерс и Орнштейн).

Из того опытного факта, что для обоих родов заряженных частиц выполняется запрет Паули, можно теоретически сделать следующий вывод (Эльзассер, Вигнер): для газа, частицы которого несут заряд  $\pm e, \pm 3e, \pm 5e$  и т. д. ( $e$  — заряд электрона), осуществляется запрет Паули; для зарядов  $0, \pm 2e, \pm 4e$  и т. д., напротив, имеет место статистика Бозе-Эйнштейна. Как заметил Гейзенберг, это положение можно применить и к световым квантам, если принять с Эддингтоном предположение о нейтрализации электронов, сопровождающейся превращением в световые кванты, а это впервые дает теоретическое обоснование такому элементарному факту, как применимость к световым квантам статистики Бозе-Эйнштейна (вместо запрета Паули).

## 16. Волны и корпускулы

Исключительные успехи, достигнутые коротко очерченной выше формальной теорией задачи о нескольких телах с неразличимыми частями — к ним относится и получение основных элементов качественной и количественной теории атомов с несколькими электронами — не могли однако скрыть неудовлетворительного по существу характера этой теории. Кроме того обстоятельства, что при этом оказалось необходимым, на ряду с квантово-механическими уравнениями движения давать еще дополнительные указания относительно выбора одного из возможных решений, самый отказ от наглядного ядра идей де Бройля оставался серьезным признаком того, что теория еще не нашла своей наиболее целесообразной формы.

Результаты, полученные для проблемы световых квантов, давали однако определенные указания для устранения этих дефектов. Выше мы подробно показали, как можно понять



с точки зрения волновой теории Эйнштейновскую теорию газа — на ней мы сейчас сосредоточим внимание, если принять, что де Бройлевские собственные колебания полого пространства должны квантоваться так же, как и световая волна. Теперь мы можем утверждать, что если это квантование провести с помощью понятий квантовой механики, то не только становится понятной статистика Эйнштейна, но и описываются точно флуктуационные эффекты в идеальном газе. С помощью волн Шредингера можно развить в этой форме теорию и для того случая, когда атомы газа (не взаимодействующие друг с другом) подвергаются действию некоторого силового поля внутри пространства, занятого газом. Этим путем снова восстанавливается в своих правах наглядное ядро теории де Бройля и устанавливается возможно полная аналогия между световым и материальным излучением и для случая произвольного числа корпускул. Вводя квантование волн, мы удовлетворяем подробно обоснованной выше необходимости рассматривать волны де Бройля в газовой теории Эйнштейна не с чисто классической точки зрения. Как в случае света, так теперь и в идеальном Эйнштейновском газе, тот факт, что всегда существует целое число „неделимых“ корпускул, является следствием того, что по квантовой теории гармонический осциллятор может иметь только дискретные равноотстоящие энергетические уровни; атомная структура материи сводится к общим закономерностям квантовой теории.

Эта программа теоретической разработки задачи о нескольких телах, которая (письменно и устно) была формулирована, с одной стороны, в непосредственной связи с флуктуационными исследованиями в работе Борна-Гейзенберга-Иордана, а, с другой — в связи с первой работой Шредингера, потребовала много времени для своего завершения. Первые шаги в этом направлении были сделаны развитием более формальной, покоящейся на других принципиальных основах теории Дирака-Гейзенберга, о которой мы выше коротко говорили. После того, как оказалось, что эта теория во всяком случае правильна

математически, нужно было при всех попытках дать ей иную формулировку, позаботиться о том, чтобы она математически была эквивалентна уже имеющимся в наличии формулировкам.

В уже упомянутом выше исследовании о реакциях излучения атомов Дираку удалось сначала для частного случая идеального газа, подчиняющегося статистике Эйнштейна, точнее понять математическую связь, существующую между корпускулярной теорией, работающей с многомерными фундаментальными функциями, и теорией квантованных волн. Эту связь, которая позже была еще существенно разъяснена (Иордан), можно, не входя в математическую теорию, пояснить следующим образом. Если мы имеем сначала в ящике с газом только одну частицу, то волновой функцией Шредингера  $\psi(x, y, z; t)$  и ее комплексной сопряженной  $\psi^*(x, y, z; t)$  определяется вероятность нахождения частицы в данном месте  $|\psi_n|^2 = \psi_n^* \cdot \psi$ . Развивая в волновой форме теорию газов Эйнштейна для произвольного числа атомов, мы получаем вместо этого матрицу  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ , которая снова является функцией точки  $x, y, z$ ; из этой матричной амплитуды и ее комплексной сопряженной  $\varphi^+(x, y, z)$ <sup>1</sup> мы образуем массовую плотность:<sup>2</sup>

$$N(x, y, z) = \varphi^+(x, y, z) \cdot \varphi(x, y, z) \quad (23)$$

Эти величины: де Бройлевскую амплитуду  $\varphi$  и плотность  $N = \varphi^+ \cdot \varphi$  нужно истолковывать в том же смысле, как напр. координаты матрицы  $q$  для квантово-кинематически колеблющейся материальной точки. Здесь нельзя говорить об амплитудах волн или распределении масс в одном определенном состоянии всего газа, но все те физические свойства, которые могут вообще обнаруживать эти величины при любом состоянии системы, собраны здесь в одну матричную схему. Путем пространственного интегрирования мы можем из величины  $N(x, y, z)$  образовать всю массу в некотором частич-

<sup>1</sup> Точнее „адьюнгированной“.

<sup>2</sup> Чтобы избежать введения нормирующего множителя, мы предположим, что масса отдельного атома газа равна 1.

ном объеме  $V_0$  объема  $V$  (она также является некоторой матрицей). Мы можем эти величины возвышать в квадрат или другую степень и затем вычислять средние значения; таким образом мы находим флуктуации плотности газа совершенно так же, как для полого электромагнитного пространства. Получающиеся при этом результаты будут полностью определены, если мы сделаем следующие два предположения (снова аналогично тем условиям, какие мы имеем для света):

1. Для матрицы  $\varphi(x, y, z)$  должно удовлетворяться то же дифференциальное уравнение, что и для функции Шредингера  $\psi(x, y, z)$ .<sup>1</sup>

2. Для матриц  $\varphi(x, y, z)$ ,  $\varphi^+(x, y, z)$  должны быть установлены (как это обычно принято в теории матриц) определенные некоммутативные правила умножения.<sup>2</sup>

В этих формулировках<sup>3</sup> уже содержится все. Нужно только применить общий математический формальный аппарат квантовой механики, чтобы получить дедуктивным путем всю теорию. Квантование отдельных собственных колебаний получается желательным образом. Далее получается — и здесь мы встречаемся в наиболее наглядной форме с корпускулами, — что для общей массы в некоторой части  $V_0$  объема  $V$  (при принятом здесь нормировании), если она подвергается измерению, может получиться только

<sup>1</sup> Там мы имели

$$-\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \cdot \Delta \psi + U(x, y, z) \cdot \psi + \frac{\hbar}{2\pi i} \psi = 0.$$

<sup>2</sup> Действительно, если мы для сокращения будем писать  $r$  и  $r'$  соответственно вместо  $x, y, z$  и  $x', y', z'$ , то

$$\begin{aligned} \varphi(r) \varphi(r') - \varphi(r') \varphi(r) &= 0 \\ \varphi \dagger(r) \varphi(r') - \varphi(r') \varphi \dagger(r) &= \delta(r - r'); \end{aligned}$$

здесь  $\delta$  есть так называемая  $\delta$ -функция Дирака.

<sup>3</sup> Требование 1 может быть выражено и так: плотность энергии должна быть равна  $-\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \psi^* \cdot \Delta \psi + \psi U^*(x, y, z) \psi$ . Потенциальная энергия  $U(x, y, z)$  является — как и в обычном уравнении Шредингера — не матрицей, а простой числовой функцией от  $x, y, z$ .

целое число (конечно, может получиться и нуль).<sup>1</sup> Все это характерные квантовомеханические законы естественно извлекаются из посылок 1 и 2, хотя этими посылками по видимости задаются не частицы, а только волновой континуум.

В этих замечательных квантованных волнах мы можем производить разнообразнейшие эксперименты и измерения, вычисляя для этих экспериментов функции вероятности по правилам квантовой механики. При этом прежняя теория задачи о нескольких телах, принадлежавшая Дираку-Гейзенбергу, включается в новую теорию: фундаментальные функции, рассчитываемые по прежней теории, можно очень просто истолковать как известные функции вероятности, относящиеся к квантованным волнам. Таким образом, для специального случая идеального Эйнштейновского газа полностью проводится синтез волновой и корпускулярной теории, и естественно, что теперь уже не представляет никаких затруднений первый закон флуктуаций Эйнштейна, дедуктивный вывод которого из квантования волн оставался до сих пор нашим долгом.

Эти результаты поставили перед нами две новые задачи. Для случая статистики Бозе-Эйнштейна надлежало исследовать, можно ли, и если можно, то как — трактовать с этой точки зрения и не идеальный газ с энергетически взаимодействующими частицами. А затем следовало посмотреть, как можно достичь того же в случае задачи о нескольких телах при условиях Паули. На первый вопрос дали ответ Иордан и Клейн, на второй — Иордан и Вигнер. Мы обрисуем еще вкратце ход идей в этих исследованиях.<sup>2</sup>

В проблеме взаимодействия речь по существу идет о том, чтобы найти подходящее выражение для энергии взаимодействия, причем в основу опять кладутся наглядные пред-

---

<sup>1</sup> В математической формулировке это означает, что характеристические числа матрицы, изображающей интеграл от  $N(x, y, z)$  по  $V_0$  суть целые числа.

<sup>2</sup> См. на следующей странице.

ставления о квантованных волнах материи. Но, конечно, наперед оставалось неясным, возможно ли что-нибудь подобное с математической точки зрения. Как известно, Шредингер подробно выясняет возможность истолковать величину  $\psi^2$ , образованную из его волновой функции  $\psi$ , не только как вероятность, но и как реальную плотность электричества или массы (с соответствующим множителем). На основе этих представлений для электростатической энергии взаимодействия волн Шредингера было получено выражение

$$E_w = \int \int dV \cdot dV' \frac{|\psi(r)|^2 \cdot |\psi(r')|^2}{|r - r'|} \quad (24)$$

Здесь  $dV$  и  $dV'$  дифференциалы объема,  $r$  и  $r'$  написаны соответственно вместо  $x, y, z$  и  $x', y', z'$ , а  $|r - r'|$  есть расстояние между точками  $r$  и  $r'$ . Но, как ясно установил и резко подчеркнул сам Шредингер, это невозможно. Совершенно отчетливо можно видеть это, напр., в проблеме водорода; в самом деле в дифференциальное уравнение Шредингера должен был бы войти потенциал взаимодействия дискретного ядра и дискретного электрона, а не электростатическое взаимодействие непрерывно распределенной плотности  $|\psi|^2$ , как это следует из уравнений (24). Однако, положение изменяется, если мы рассматриваем матричную плотность  $N = \varphi^\dagger \varphi$ . Ибо здесь, как мы уже знаем из теории идеального газа, дискретные корпускулы скрыты в двойственной квантово-механической форме. Если для проблемы нескольких тел подставить в качестве матрицы энергии взаимодействия квантованных  $\varphi$ -волн, выражение

$$E_w = \int \int dV dV' \frac{\varphi^\dagger(r) \varphi^\dagger(r') \varphi(r') \varphi(r)}{|r - r'|} \quad (25),$$

то для заключающихся в волнах корпускул получается как раз желательная Кулоновская энергия взаимодействия. Очевидно, это выражение представляет собой почти то же, что

$$\int \int dV \cdot dV' \frac{N(r) N(r')}{|r - r'|} \quad (26)$$

но не совсем то же, потому что множители  $\varphi$  и  $\varphi^\dagger$  не все-

гда можно менять местами. Это связано с тем, что при нескольких электрических точечных зарядах только между двумя различными существует взаимодействие  $e^2/r$ , а соответствующую энергию заряда на самого себя вводить в расчет не следует. Здесь за этот эффект ответственна именно некоммутативность умножения в квантовой механике. Мы видим, как знаменитая и много обсуждающаяся проблема странного обратного действия электрона на самого себя („почему электроны не разлетаются?“) получает новый вид в свете теории квантов.

Запрет Паули и основанную на нем статистику можно относить, так же как и Эйнштейновскую, — к собственным колебаниям де Бройля вместо „ячеек“ в фазовом пространстве частиц. Поэтому в случае Паули каждое из этих собственных колебаний должно вести себя не как квантовомеханический гармонический осциллятор, а скорее как образ, который может иметь только два различных стационарных состояния (ибо на это собственное колебание может прийти либо один атом, либо ни одного). Такой замечательный образ нам уже встречался, это — магнитный электрон. Действительно, вращающийся электрон (если оставить в стороне его поступательное движение) может занимать в магнитном поле только два различных положения. После того как удалось включить в рамки общей квантовой механики теорию „покоящегося“ магнитного электрона (Дарвин, Паули, Иордан), можно было подойти и к квантованию собственных колебаний де Бройля, соответствующему запрету Паули. Ибо квантовая механика утверждает: если мы где-нибудь в произвольных в остальном соотношениях встречаем квантово-механическую систему, для которой при каких-нибудь произвольных условиях возможны только два стационарных состояния или только две различных реакции, то эта система с формально-абстрактной точки зрения должна быть эквивалентна (покоящемуся) магнитному электрону. В качестве другого примера мы можем указать на поляризованный световой квант (Иордан). Если мы, например, исследуем световой квант с помощью николя, установленного определенным образом, то возможны

только два результата: либо световой квант проходит, либо он отражается. Из этого следует, что все эксперименты, которые можно сделать над световым квантом с помощью николя или других поляризационных анализаторов, можно статистически описать с помощью формальной теории, абстрагированной от магнитного электрона. С этим никоим образом не следует связывать более глубоких модельных аналогий между световым квантом и вращающимся электроном. Релятивистская теория электрона, данная Дираком, неявно включает в себя тот же формализм по отношению к различию зарядов электрона (существуют два значения заряда,  $+$  и  $-e$ ).

Осуществление на этих основах теории задачи о нескольких телах в условиях Паули оказалось с математической стороны более трудным и сложным, чем в случае Эйнштейна, но конечный результат снова оказался очень простым. Теория идеального газа Ферми может быть дедуктивно получена из предпосылок, которые полностью соответствуют требованиям 1 и 2 для газа Эйнштейна. Только некоммутативные свойства умножения амплитуд  $\varphi \cdot \varphi^\dagger$  теперь оказываются несколько иными (речь идет при этом о различии в знаке).<sup>1</sup> Из этих предпосылок снова вытекает все остальное: появление частиц и иное квантование собственных колебаний (запрет Паули). Наконец, и энергетические взаимодействия частиц могут быть обработаны почти так же, как в случае Эйнштейна.

## 17. Релятивистское построение теории

Таким образом, существует возможность заменить теорию задачи о нескольких телах Дирака-Гейзенберга, связанную с многомерным пространством, другой формулировкой, которая опирается на представления о квантованных

<sup>1</sup> Вместо равенств, приведенных в примечании 2 на стр. 85 для случая Эйнштейна, в случае Паули мы имеем равенства:

$$\begin{aligned}\varphi(r)\varphi(r') + \varphi(r')\varphi(r) &= 0 \\ \varphi^+(r)\varphi(r') + \varphi(r')\varphi^+(r) &= \delta(r - r').\end{aligned}$$

волнах в обыкновенном пространстве. Следствием математической эквивалентности обеих теорий является естественно то, что новая теория отнюдь не собирается вытеснять старую в практически-расчетных задачах, особенно после того как работы Вигнера показали всю большую плодотворность старой теории.<sup>1</sup> Напротив, преимущество новой теории прежде всего заключается в ее более тесной связи с наглядными основами идей де Бройля и Эйнштейна.

Существуют, однако, более глубокие проблемы, решение которых вряд ли может быть получено на основе описания электронных систем в многомерном координатном пространстве. Сюда относятся все вопросы, связанные с относительностью, в частности затронутая выше проблема запаздывающего взаимодействия между электронами. Еще очевиднее становится недостаточность теории координатного пространства, если подумать о таких проблемах, как превращение материи в излучение.<sup>2</sup> Благодаря своей более тесной связи с наглядными основами теории Эйнштейна — де Бройля новая теория задачи о нескольких телах находится по отношению к этим проблемам в более благоприятном положении.

Действительно, кажется столь очевидно естественным построить квантово-теоретическую электродинамику на непосредственном взаимодействии волн света и материи; очевидно, это самый естественный и простой способ учесть волновую природу материи. Эта мысль была подробно развита Шредингером, который с самого начала рекомендовал истолковывать квадрат амплитуды  $|\psi|$ ,<sup>2</sup> не только как вероятность нахождения электрона в данном месте, но и как реальную электрическую плотность, а, как таковая,

---

<sup>1</sup> Тем не менее, повидимому, многие закономерности атомной структуры и т. п., которые до сих пор выводили только с помощью трудных средств теории групп, можно легче обосновать, пользуясь методом Иордана и Вигнера; однако подробнее эти взаимоотношения не изучены.

<sup>2</sup> При допущении таких элементарных процессов само число измерений координатного пространства, которым мы пользуемся, должно было бы быть сделано переменным.



величина  $\psi^2$  должна была по законам теории Максвелла создавать соответствующее электрическое поле. Шредингер показал также, как можно описать в этом смысле взаимодействие  $\psi$ -поля и электромагнитного поля  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  релятивистски инвариантно теории. Однако этот ход идей естественно приводил к тяжелым противоречиям, пока мы рассматривали  $\psi$ ;  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$ , как классические, не квантованные функции поля; выше (в разделе 6) мы отметили уже, что эта трудность была отчетливо подчеркнута самим Шредингером. Разрабатывать эти представления можно лишь после того, как мы принимаем, что  $\psi$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  являются числовыми или матричными  $q$ -функциями в том смысле, как это было подробно пояснено выше. Но те положения, которые мы выше выставляли, относились сначала только к случаю классической нерелятивистской механики с незапаздывающими силами взаимодействия частиц, мгновенно действующими на расстоянии, и даже в упомянутых исследованиях относительно электромагнитного поля излучения сначала не учитывалась релятивистская симметрия пространства и времени. Задача, стало быть, заключалась в том, чтобы выяснить, можно ли и как именно можно обобщить эту теорию в релятивистском смысле и не удастся ли при этом удовлетворительно формулировать взаимодействие квантованных полей  $\psi$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  так, чтобы получить в результате законы запаздывающего взаимодействия отдельных электронов.

Прежде всего, действительно удастся построить инвариантную теорию электромагнитного поля свободного от зарядов (Иордан - Паули). Характерным для этой формулировки является введение „релятивистской  $\Delta$ -функции“, которая является аналогичной особой  $\delta$ -функции Дирака; тогда как функция Дирака  $\delta(x, y, z)$  имеет особую бесконечную точку только при  $x=0, y=0, z=0$ , для функции  $\Delta(x, y, z, ct)$  это имеет место на целом „световом конусе“ ( $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ ). Эта формулировка имеет тот же недостаток изящества, заключающийся в наличии нулевой энергии, но пока мы имеем дело с полем, свободным от зарядов, это не причиняет никаких действительных затруднений. Нужно отметить следующее обстоя-

тельство (не оговоренное в названной выше работе). Релятивистское проведение теории дает возможность установить логическую связь между видом Максвелловых уравнений и тем фактом, что световые кванты подчиняются статистике Бозе, а не запрету Паули. Можно было бы, правда, попытаться применить и к световым волнам иное квантование (по схеме Иордана - Вигнера), но при этом мы приходим к математически неудовлетворительным результатам; только квантование Бозе математически согласуется с видом Максвелловых уравнений поля.

Следующим за этим шагом является релятивистское квантование одних только волн материи без учета их взаимодействия со световым полем. В качестве основы для этого нужно иметь релятивистскую механику одного отдельного электрона; такая механика была дана Дираковской теорией вращающегося электрона. Сначала кажется, будто нет возможности выразить свойства умножения квантованных Дираковских амплитуд поля  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  через  $\Delta$ -функцию. Однако, Гейзенберг и Паули показали, что это все же возможно при одном ограничении, полностью соответствующем смыслу вещей. При этом кроме того оказывается, что так же, как для Максвелловского поля в пустом пространстве — математически нет возможности производить квантования по желанию либо в направлении Бозе, либо в направлении Паули; только последний случай является математически возможным. Тот факт, что электроны подчиняются принципу Паули, а не статистике Бозе, находится, стало быть, в теснейшей математической связи с Дираковской теорией вращающегося электрона. Наконец, оказывается, что для волн материи не существует нулевой энергии.

Несмотря на свои утешительные результаты, эти последние рассуждения имеют лишь сомнительную цену, так как их основа, Дираковская теория отдельного электрона, подвергается тяжелым нападкам и заведомо не является совершенно правильной, хотя в ней несомненно заключается и ряд крупных достижений. Мы не имеем возможности рассмотреть здесь подробнее те обстоятельства,

которые говорят против теории Дирака: отметим только, что она запуталась в неразрешенных пока трудностях, связанных с темной проблемой асимметричности обоих родов электричества, неодинаковости масс положительных и отрицательных элементарных зарядов. Недостоверность наших современных познаний в проблеме отдельного электрона естественно переносится и на связанные с этим рассуждения относительно проблемы нескольких электронов.

Если, однако, сначала отвлечься от этих трудностей, то можно задаться вопросом, не удастся ли не только произвести инвариантное квантование Дираковских величин  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  самих по себе и величин  $\mathcal{E}, \mathcal{H}$  самих по себе, но и удовлетворительно формулировать в инвариантной форме взаимодействия света и материи. Это означало бы осуществить программу Шредингера и дать известное завершение всему циклу идей, поясненному выше. К сожалению, кажется, что здесь, так близко от цели, преодолев столько трудностей, мы все же терпим неудачу. Соображения, приведенные Гейзенбергом и Паули, повидимому доказывают это с полной определенностью. Выше было объяснено, какое важное значение в нерелятивистской теории имел тот факт, что можно оставить вне рассмотрения своеобразное обратное действие электрона на самого себя. Это не удается, однако, для релятивистского взаимодействия электронов, осуществляемого электромагнитным полем; при том математические источники этих трудностей лежат в тех же свойствах квантованного поля  $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ , которые обуславливают появление нулевой энергии.

Таким образом, мы сталкиваемся здесь с серьезной неудачей, и нужно подумать о том, что она означает. Рассуждения Гейзенберга-Паули отчетливо показывают, что все эти трудности лежат только в электромагнитном поле, с самими волнами все обстоит благополучно. Это заставляет предполагать, что быть может нет оснований сопоставлять на равных началах  $\psi$ -поле и поле  $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ , но что, быть может, следует, в соответствии с гипотезой Эддингтона, только поле  $\psi$  рассматривать как первичную величину,

а электромагнитное поле с его световыми квантами считать вторичным „продуктом нейтрализации“ положительных и отрицательных зарядов, учитывая возможные взаимопревращения материи и излучения. В настоящее время это, конечно, еще неразрешимая проблема, но выводы Гейзенберга-Паули отнюдь не лишают нас возможности приближенного решения проблемы в более или менее тесной связи с изложенными идеями; таких приближенных решений мы должны искать раньше всего, чтобы медленно продвигаться дальше. Но окончательное решение вероятно будет в указанном смысле связано с Эддингтоновской проблемой превращения материи в излучение.

Таким образом современное положение квантовой теории характеризуется тем, что нерешенные к настоящему времени задачи, касающиеся проблемы одного и нескольких электронов, находятся, повидимому, в тесной связи, с одной стороны, с вопросом о значении асимметрии обоих родов электричества, а с другой стороны, с вопросом об Эддингтоновском превращении материи в излучение, т. е. с двумя вопросами, которые в известной мере превосходят по порядку величины решенные до сих пор проблемы и при решении которых мы не можем опереться ни на достаточно обширный опытный материал, ни на помощь классической теории, оказываемую принципом соответствия.

Однако, сейчас своевременно вспомнить о том, что собственно предметом этой статьи является только гипотеза световых квантов и что в более трудные вопросы проблемы материальных частиц мы должны были входить лишь для того, чтобы показать дальнейшее развитие и плодотворность идей световых квантов в этой более широкой области. Если в вопросах, относящихся к материи, мы должны были остановиться перед более глубокими, еще непреодоленными трудностями, то достигнутое нами в понимании световых квантов дает нам полную уверенность в том, что мы стоим на правильном пути.

---